Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗОНАНСОВ

Л. Г. Хазин

(Москва)

Получены необходимые и достаточные условия устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем при наличии резонансов.

§ 1. Постановка задачи. Исследуется положение равновесия гамильтоновой системы

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial y_\alpha} H(x, y), \quad \frac{dy_\alpha}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} H(x, y) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Без ограничения общности будем считать, что положением равновесия служит начало координат $x = (x_1, \ldots, x_n) = 0$, $y = (y_1, \ldots, y_n) = 0$. Функция Гамильтона в этом случае может быть представлена в следующем виде:

$$H(x, y) = H_2(x, y) + H_3(x, y) + \ldots \tag{1.2}$$

Здесь $H_k(x, y)$ — однородный многочлен степени k.

Вопрос об устойчивости рассматривается для случая, когда он не решается в линейном приближении. Другими словами, предполагается:

а) квадратичная форма $H_2(x, y)$ в (1.2) индефинитна (иначе устойчивость следует из теоремы Лагранжа — Дирихле);

б) собственные значения линеаризованной системы чисто мнимы (иначе неустойчивость гарантируется теоремой Ляпунова).

Кроме того, будем предполагать, что

в) среди собственных значений $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, -\beta_1, -\beta_2, \ldots, -\beta_n$ линеаризованной системы — нет кратных.

При перечисленных предположениях можно считать, что квадратичная форма $H_2(x, y)$ в (1.2) записывается в виде

$$H_2(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \tag{1.3}$$

Важную роль в вопросах устойчивости играют некоторые целочисленные соотношения между частотами линеаризованной системы — резонансные соотношения.

Определение. Говорят, что система (1.2) обладает резонансом, если существует целочисленный вектор

$$k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \neq 0, \qquad k_\alpha \geqslant 0$$

такой, что

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \ldots + k_n\beta_n = 0$$

Число $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ называют порядком резонанса.

Как известно [1, 2], при отсутствии резонансов в системе, она устойчива в любом конечном порядке; лишь наличие резонанса может приводить к неустойчивости.

Работа посвящена исследованию устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем, нейтральных [1] в линейном приближении, при наличии резонансов.

Все исследования в работе проводятся в два этапа.

1. Исследование укороченных систем, которое приводит к теореме:

Для устойчивости по Ляпунову укороченной системы необходимо и достаточно наличия среди решений этой системы «инвариантного луча», являющегося аналогом собственной функции в нелинейной ситуации.

2. Перенесение результатов об устойчивости укороченной (модельной) системы для исходной системы (1.1).

Теорема 1.1. Если среди решений модельной системы есть инвариантный луч, то система неустойчива по Ляпунову, в противном случае устойчивость по Биркгофу в любом конечном порядке.

Результаты данной работы служат подтверждением гипотезы А. М. Молчанова, сформулированной в его докторской диссертации, правда, в безрезонансной ситуации и не для гамильтоновых систем.

Гипотеза Молчанова. Для неустойчивости системы необходимо и достаточно наличия инвариантного луча у модельной системы.

§ 2. Резонансы третьего и четвертого порядка. 1°. Пусть система (1.1) обладает резонансом порядка три. Полиномиальным каноническим преобразованием гамильтониан (1.2) системы (1.1) можно привести к нормальной форме до третьего порядка. Отбрасывая члены выше третьего порядка, гамильтониан укороченной системы в полярных канонических переменных записывается в следующем виде:

$$\Gamma = \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha\rho_\alpha + 2A\sqrt{\rho^k}\cos\psi \tag{2.1}$$

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \ldots + k_n\beta_n = 0, \quad \rho^k = \rho_1^{k_1}\rho_2^{k_2}\ldots\rho_n^{k_n}, \quad |k| = 3$$

$$\psi = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \ldots + k_n\varphi_n, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

Здесь ρ_α и φ_α — канонические полярные координаты, k — целочисленный вектор, ψ — резонансная фаза.

Соответствующая (2.1) система уравнений имеет вид

$$\frac{d\rho_\alpha}{dt} = -2Ak_\alpha\sqrt{\rho^k}\sin\psi \qquad (\alpha = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\sqrt{\rho^k}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{k_\alpha^2}{\rho_\alpha}\cos\psi$$

Систему (2.2) назовем модельной системой третьего порядка. Если $A \neq 0$, то говорят, что резонанс включен.

[1] Т. е. выполняются условия а), б) и в).

Можно проверить, что система (2.2) обладает растущим решением

$$\rho_\alpha(t) = k_\alpha b(t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

$$\psi(t) = \text{const} = -\frac{\pi}{2}\frac{|A|}{A}, \quad \frac{db}{dt} = 2|A|\sqrt{k^k}\, b^{3/2} \tag{2.3}$$

Решение (2.3) будем называть инвариантным лучом модельной системы (2.2). Наличие луча означает неустойчивость (2.2). Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2.1. Если система (1.1) обладает одним включенным резонансом, то она неустойчива по Биркгофу в третьем порядке.

2°. Пусть теперь система (1.1) обладает одним резонансом и его порядок равен четырем. Каноническим, полиномиальным преобразованием гамильтониан (1.2) можно привести к нормальной форме; отбрасывая члены выше четвертого порядка, получим модельную систему четвертого порядка

$$\Gamma = \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha \rho_\alpha + 2A\sqrt{\rho^k}\cos\psi + A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta \tag{2.4}$$

$$\frac{d\rho_\alpha}{dt} = -2Ak_\alpha\sqrt{\rho^k}\sin\psi \qquad (\alpha = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\sqrt{\rho^k}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{k_\alpha^2}{\rho_\alpha}\cos\psi - 2A^{\alpha\beta}k_\alpha\rho_\beta$$

$$(k_1\beta_1 + \ldots + k_n\beta_n = 0, \quad k_1 + \ldots + k_n = 4)$$

Теорема 2.2. Достаточным условием устойчивости (2.5) является выполнение условия

$$|A| < \frac{|A^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta|}{2\sqrt{k^k}} = S \tag{2.6}$$

Доказательство. Система (2.5) обладает следующими интегралами:

$$I_\alpha = \rho_\alpha - \frac{k_\alpha}{k_1}\rho_1 \quad (\alpha = 2, 3, \ldots, n), \quad F = \Gamma - \sum_{\alpha=1}^{n}\beta_\alpha\rho_\alpha \tag{2.7}$$

Из этих интегралов построим неотрицательный интеграл системы

$$L = \sum_{\alpha=2}^{n} I_\alpha^4 + F^2 \tag{2.8}$$

который служит функцией Ляпунова, если он положительно определен, т. е. $L = 0$, лишь при $\rho = 0$. На инвариантной поверхности $I_2^4 + \ldots + I_n^4 = 0$, которая описывается уравнениями $\rho_\alpha = k_\alpha b(t)$, интеграл F принимает вид

$$F = [2A\sqrt{k^k}\cos\psi + A^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta]\, b^2$$

При выполнении условия (2.6) интеграл F обращается в нуль лишь при $\rho = 0$. Следовательно, L положительно определено. Теорема доказана.

Замечательным образом оказывается, что условие (2.6) служит и необходимым условием устойчивости.

Теорема 2.3. Положение равновесия системы (2.5) неустойчиво, если выполняется условие

$$|A| > S \tag{2.9}$$

Доказательство. Построим растущее решение системы (2.5), которое будем искать в виде инвариантного луча

$$\rho_\alpha(t) = k_\alpha b(t) \quad (\alpha = 1, \ldots, n), \qquad \psi(t) = \text{const.} \tag{2.10}$$

Если такое решение существует, то на нем

$$F = [2A\sqrt{k^k}\cos\psi + A^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta]\, b^2$$

При выполнении условия (2.9) можно выбрать ψ_0 так, чтобы

$$\cos\psi_0 = -\frac{A^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta}{2A\sqrt{k^k}}, \qquad A\sin\psi_0 < 0$$

При этом $d\psi / dt = 0$ и $\psi = \psi_0 = \text{const}$. Уравнение же для $b(t)$ принимает вид

$$db / dt = [(2A\sqrt{k^k})^2 - (A^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta)^2]^{1/2} b^2 \tag{2.11}$$

Из наличия растущего решения (2.9), (2.10) следует неустойчивость (2.5) при условии (2.8)[1].

Пограничный случай устойчивости $|A| = S$ разобран в дополнении.

§ 3. Инвариантный луч и неустойчивость по Ляпунову. *Теорема* 3.1. Если система (1.1) обладает одним резонансом и среди решений ее модельной системы ($|k| = 3$ или $|k| = 4$) есть инвариантный луч, то положение равновесия (1.1) неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство этой теоремы будет проведено при помощи известного алгоритма Четаева. Будет построена функция $P(\rho, \varphi)$ такая, что в области ее неположительности ($P(\rho, \varphi) \leqslant 0$) производная по времени, взятая в силу исходной системы, отрицательна. Из наличия функции Четаева следует неустойчивость по Ляпунову для (1.1).

Доказательство. Каноническим полиномиальным преобразованием приведем (1.2) к виду

$$\Gamma = \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha\rho_\alpha + \Gamma_p(\rho, \psi) + A_l\rho^l + R(\rho, \psi) \tag{3.1}$$

Здесь $l = (l_1, \ldots, l_n)$ — целочисленный вектор $l_\alpha \geqslant 0$, $|l| = l_1 + \ldots + l_n$, $2 < |l| < |k|$, степень $R(\rho, \varphi)$ по переменным ρ выше $|k|$.

$$\Gamma_p(\rho, \psi) = \begin{cases} 2A\sqrt{\rho^k}\cos\psi & (|k| = 3) \\ 2A\sqrt{\rho^k}\cos\psi + A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta & (|k| = 4) \end{cases} \tag{3.2}$$

Модельная система порядка $2|k|$ описывается гамильтонианом

$$\Gamma_1 = \Gamma - R(\rho, \varphi) \tag{3.3}$$

[1] Для систем с двумя степенями свободы аналогичный результат получен в [3].

Величины

$$I_\alpha = \rho_\alpha - \frac{k_\alpha}{k_1}\rho_1 \quad (\alpha = 2, \ldots, n) \quad F = \Gamma_1 - \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha \rho_\alpha$$

интегралы модельной системы, т. е.

$$\{\Gamma_1, I_\alpha\} = \{\Gamma_1, F\} = 0, \qquad \{\ \} \text{ — скобки Пуассона.}$$

Отсюда следует

$$\left|\frac{dI_\alpha}{dt}\right| = |\{I_\alpha, \Gamma\}| = |\{I_\alpha, R\}| < |\rho|^{|k|+1/2} \tag{3.4}$$

Здесь $|\rho| = \rho_1 + \ldots + \rho_n$, а значок $f(\rho) < \rho^m$ означает, что разложение $f(\rho)$ по ρ содержит лишь степени порядка не ниже m.

Рассмотрим теперь функцию

$$P(\rho, \psi) = \sum_{\alpha=2}^{n} I_\alpha^2 + F^2 - \varkappa^2 \rho_1^{|k|} \tag{3.5}$$

Введем обозначения для областей

$$\Omega(r) = \{P(\rho, \psi) \leqslant 0, \ \rho_1 < r\} \tag{3.6}$$

$$\Omega_1 = \left\{\sum_{\alpha=2}^{n} I_\alpha^2 \leqslant \varkappa^2 \rho_1^{|k|}, \ \rho_1 < r\right\} \tag{3.7}$$

$$\Omega_\psi = \{F^2 \leqslant \varkappa^2 \rho_1^{|k|}, \ \rho_1 < r\} \tag{3.8}$$

В этих обозначениях

$$\Omega(r) \subset \Omega_I \cap \Omega_\psi \tag{3.9}$$

Из (3.7) следует, что везде в Ω_I выполняется

$$|I_\alpha| \leqslant \varkappa \rho_1^{1/2|k|}$$

или

$$\rho_1 \left[\frac{k_\alpha}{k_1} - \varkappa \rho_1^{1/2|k|-1}\right] \leqslant \rho_\alpha \leqslant \rho_1 \left[\frac{k_\alpha}{k_1} + \varkappa \rho_1^{1/2|k|-1}\right] \tag{3.10}$$

Если теперь рассмотреть (3.9) в Ω_I при $\rho_1 \to 0$, то при $|k| \geqslant 3$ получим

$$\rho_\alpha = \frac{k_\alpha}{k_1}\rho_1 [1 + o(1)] \tag{3.11}$$

Неравенство (3.4) в Ω_I при $\rho_1 \to 0$ переходит в

$$\left|\frac{dI_\alpha}{dt}\right| = o(\rho_1^{|k|}) \tag{3.12}$$

Покажем теперь, что $\Omega(r)$ при достаточно малых r разбивается в сумму двух замкнутых областей

$$\Omega_+(r) = \{P(\rho, \varphi) \leqslant 0, \ \rho_1 < r, \ \sin\psi > 0\}$$

$$\Omega_-(r) = \{P(\rho, \varphi) \leqslant 0, \ \rho_1 < r, \ \sin\psi > 0\}$$

так что

$$\Omega(r) = \Omega_-(r) \cup \Omega_+(r), \qquad \Omega_+(r) \cap \Omega_-(r) = \{\rho = 0\}$$

Для этого достаточно показать, что $\sin\psi \neq 0$ в $\Omega(r)$ при достаточно малых r. Предположим противное и придем к противоречию. Итак, пусть $\sin\psi = 0$ для произвольно малого r.

Дальнейшие рассуждения проведем отдельно для $|k| = 3$ и $|k| = 4$.

Случай $|k| = 3$, $A \neq 0$.

При сделанном предположении из (3.8) следует

$$4A^2\rho^{|k|} \leqslant \varkappa^2\rho_1^3 \tag{3.13}$$

Рассмотрим (3.12) в Ω_I при $\rho_1 \to 0$; получим

$$4A^2 \frac{k^3}{k_1^3} \rho_1^3 [1 + o(1)] \leqslant \varkappa^2\rho_1^3 \tag{3.14}$$

Выбирая $\varkappa^2 = 2A^2k^k / k_1^3$, убеждаемся, что (3.13) не выполняется для достаточно малого r.

Случай $|k| = 4$, $2A\sqrt{k^k} - |A^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta| = \delta^2$

При сделанном предположении из (3.8) вытекает

$$|\pm 2A\sqrt{\rho^k} + A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta| < \varkappa\rho_1^2 \tag{3.15}$$

Левую часть (3.15) оценим снизу

$$|\pm 2A\sqrt{\rho^k} + A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta| \geqslant |2|A|\sqrt{\rho^k} - |A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta|| \tag{3.16}$$

Подставляя в (3.15), получим

$$|2|A|\sqrt{\rho^k} - |A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta|| < \varkappa\rho_1^2 \tag{3.17}$$

Рассматривая (3.17) в Ω_I при $\rho_1 \to 0$ и учитывая (3.10), убеждаемся, что

$$k_1^{-2}[|2|A|\sqrt{k^k} - |A^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta| + o(1)|\rho_1^2 = k_1^{-2}[\delta^2 + o(1)]\rho_1^2 < \varkappa\rho_1^2$$

не выполняется для достаточно малых r, если выбрать

$$\varkappa = {}^1/_2 k_1^{-2}\delta^2$$

Рассмотрим теперь производную

$$\frac{dP}{dt} = \{P, \Gamma\} = \{P, \Gamma_1\} + \{r, R\} = 2\sum_{\alpha=2}^{n} I_\alpha \{I_\alpha, R\} + \tag{3.18}$$

$$+ 2F\{F, \Gamma_1\} + 2F\{F, R\} - \varkappa^2|k|\rho_1^{|k|-1}\{\rho_1, \Gamma\}$$

Оценим порядки величин в правой части (3.18) в Ω_I при $\rho_1 \to 0$

$$|I_\alpha\{I_\alpha, R\}| = o(\rho_1^{3/2|k|}), \qquad |F\{F, \Gamma_1\}| = o(\rho_1^{3/2|k|-1/2})$$

$$\{\rho_1, \Gamma\}\rho_1^{|k|-1} \sim \rho_1^{3/2|k|-1} \tag{3.19}$$

Учитывая (3.18), (3.19) в Ω_I при $\rho_1 \to 0$, можно переписать (3.18) следующим образом:

$$dP / dt = 2\varkappa^2 k_1 |k| \rho_1^{3/2|k|-1} A \sin\psi [1 + o(1)] \tag{3.20}$$

Отсюда следует, что $dP / dt \leqslant 0$ в одной из областей $\Omega_+(r)$ или $\Omega_-(r)$ там, где $A\sin\psi < 0$, для достаточно малых r. Причем $dP / dt = 0$ лишь в случае $\rho = 0$.

Итак, функция

$$P(\rho, \psi) = \sum_{\alpha=2}^{n} I_\alpha^2 + F^2 - \varkappa^2\rho_1^{|k|}$$

$$\varkappa^2 = \begin{cases} 2A^2k^k / k_1^3 & (|k| = 3) \\ {}^1/_4\,\delta^2 / k_1^2 & (|k| = 4) \end{cases}$$

является функцией Четаева рассматриваемой системы. Теорема доказана.

Теорема 3.2. Если система (1.1) обладает одним резонансом и его порядок равен четырем ($|A| < S$), то из устойчивости системы в четвертом порядке ($|k| = 4$) следует устойчивость (1.1) в любом порядке по Биркгофу.

Построение функции Ляпунова модельной системы произвольного порядка вполне аналогично построению § 2.

Теорема 3.3. Если система (1.1) кроме резонанса порядка p ($p \leqslant 4$) содержит еще резонансы высших порядков, то теорема 3.1 остается справедливой.

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 3.1. Функция Четаева в этом случае строится так:

$$P(\rho, \psi) = \sum_{\alpha=2}^{n} I_\alpha^{2s} + F^{2m} - \rho_1^3$$

$$1 < s < {}^3/_2, \qquad {}^3/_4 < m < 1$$

для $|k| = 3$.

Для резонанса же четвертого порядка

$$P(\rho, \psi) = \sum_{\alpha=2}^{n} I_\alpha^{2s} + F^2 - \varkappa^2\rho_1^4$$

$${}^4/_3 < s < 2, \quad \varkappa = {}^1/_2\, \delta^2 / k_1^2$$

§ 4. **Резонансы высоких порядков** ($|k| \geqslant 5$). Если порядок единственного резонанса системы $p \geqslant 5$, то гамильтониан модельной системы порядка записывается в виде

$$\Gamma = \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha \rho_\alpha + A_l \rho^l + \Gamma_p(\rho, \psi) \tag{4.1}$$

Здесь $l = (l_1, \ldots, l_n)$ — целочисленный вектор, $l_\alpha \geqslant 0$ $|l| = l_1 + \ldots + l_n$, $\gamma = [p - {}^1/_2]$, $2 \leqslant |l| \leqslant \gamma$; $p = |k|$

$$\Gamma_p(\rho, \psi) = \begin{cases} 2A\sqrt{\rho^k}\cos\psi & (|k| = 2m+1,\ m \geqslant 2) \\ 2A\sqrt{\rho^k}\cos\psi + A_l\rho^l & (|k| = 2m,\ |l| = m,\ m > 2) \end{cases} \tag{4.2}$$

$$k_1\beta_1 + \ldots + k_n\beta_n = 0$$

Здесь $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — резонансный вектор. Нетрудно проверить, что условия

$$A_l k^l = 0, \qquad |l| = 2, 3, \ldots, \gamma \tag{4.3}$$

будут необходимыми условиями неустойчивости.

Невыполнение, по крайней мере, одного из условий (4.3) служит достаточным условием устойчивости (1.1) в любом конечном порядке [1].

Если условия (4.3) выполняются, то вопрос об устойчивости решается в полной аналогии с резонансами низших порядков. Так, включенный

---

[1] При $|l| = 2$ это условие следует из [4].

резонанс нечетного порядка всегда приводит к неустойчивости по Ляпунову при выполнении условия

$$|A| > \frac{|A_l k^l|}{2\sqrt{k^k}}, \qquad |k| = 2m, \ |l| = m$$

В противном случае устойчивость в любом конечном порядке.

Доказательства этих утверждений вполне аналогичны доказательствам предыдущих параграфов.

Результаты предыдущих параграфов можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Основная теорема. Если система (1.1) нейтральна в линейном приближении и обладает одним резонансом ($|k| = p$), то наличие инвариантного луча среди решений модельной системы порядка p является необходимым и достаточным условием неустойчивости (1.1) по Ляпунову. В противном случае (если луча нет) устойчивость по Биркгофу — в любом конечном порядке.

Приложение. Пограничный случай устойчивости. Пограничный случай устойчивости рассмотрим на примере резонанса четвертого порядка, так как все рассуждения переносятся на случай произвольного резонанса четного порядка.

Итак, система обладает одним резонансом четвертого порядка

$$\Gamma = \sum_{\alpha=2}^{n} \beta_\alpha \rho_\alpha + 2A\sqrt{\rho^k}\cos\psi + A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta \tag{П.1}$$

гамильтониан модельной системы четвертого порядка.

$$|A| = \frac{|A^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta|}{2\sqrt{k^k}} = S \tag{П.2}$$

условие (П.2) соответствует пограничному случаю устойчивости. Прежде всего заметим, что в этом случае $\rho = 0$ не является изолированной стационарной точкой. Действительно, инвариантный луч состоит в этом случае сплошь из неподвижных точек. Поэтому естественно ожидать, что вопрос об устойчивости положения равновесия (1.1) не решается в четвертом порядке, а существенно зависит от старших членов. Так дело и обстоит. Для иллюстрации этого приведем пример системы, неустойчивой в четвертом порядке, но устойчивой в восьмом.

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

$$\Gamma_1 = \rho_1 - 3\rho_2 + 2\sqrt{3}\sqrt{\rho_1^3\rho_2}\cos\psi + 2\rho_1^2 \tag{П.3}$$

$$\Gamma_2 = 2\rho_1^2\rho_2\cos 2\psi + \rho_1^4$$

Гамильтониан Γ_1 описывает модельную систему четвертого порядка. Выберем в этой системе начальные данные так, чтобы значение интеграла $I = \rho_1 - 3\rho_2$ было отрицательным ($I < 0$), и так, чтобы интеграл системы

$$F = 2\sqrt{3}\sqrt{\rho_1^3\rho_2}\cos\psi + 2\rho_1^2\,|_{t=0} = 0$$

Это можно сделать при выполнении условия (П.2).

Уравнение для ρ_1 получим в виде

$$d\rho_1 / dt = 6\sqrt{3}\, |I|^{1/2} \rho_1^{3/2}$$

Отсюда следует неустойчивость системы (П.3) в четвертом порядке.

Покажем теперь, что положение равновесия (П.3) устойчиво. Построим неотрицательный интеграл

$$L = I^4 + G^2, \quad G = \Gamma - I$$

На инвариантной поверхности $\rho_1 = 3\rho_2$ G принимает вид

$$G = [18\,(1 + \cos\psi) + (54 \cos 2\psi + 81)\, \rho_2^2]\, \rho_2^2$$

Итак, $L = 0$ лишь при $\rho_1 = \rho_2 = 0$ и тем самым является функцией Ляпунова. Существование систем, неустойчивых в порядке выше четырех, в данном случае очевидно.

Автор благодарит А. М. Молчанова, В. В. Румянцева и А. Д. Брюно за полезные обсуждения.

Поступила 26 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. М., Изд-во иностр. лит. 1959.
2. Moser J. New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems. Comm. Pure and Appl. Math., 1964, vol. 17, No. 4.
3. Маркеев А. П. Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
4. Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона. Матем. зам., 1967, т. 1, вып. 3.