Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Ил. Илиев

(Пловдив)

Классифицируются линейные интегралы механической системы в зависимости от решений уравнения Киллинга и от вида обобщенных сил. Пример механической системы с двумя степенями свободы, у которой нет линейного интеграла, при наличии силовой функции обобщенных сил приведен в работе [1].

Пусть $\lambda_\varkappa \dot{q}^\varkappa = c$ — линейный интеграл механической системы с двумя степенями свободы. Условиями для этого [1] будут

$$\nabla_s \lambda_\varkappa + \nabla_\varkappa \lambda_s = 0 \tag{1}$$

$$\lambda_\varkappa Q^\varkappa = 0 \tag{2}$$

Рассматривая

$$2T dt^2 = ds^2 = g_{\lambda\mu} dq^\lambda dq^\mu$$

как линейный элемент двухмерного риманова пространства V_2, для уравнений Киллинга (1) могут быть представлены следующие возможности [2, 3]:

(а) у уравнений (1) нет решения;

(б) у уравнений (1) — одно решение;

(в) у уравнений (1) — три решения.

В случае (а) у механической системы не будет линейного интеграла, так как у (1) нет решения.

В случаях (б) и (в) при помощи интегрируемых преобразований линейный элемент может быть приведен к виду

$$2T\, dt^2 = ds^2 = V(q^1)\,[(dq^1)^2 + (dq^2)^2] \tag{3}$$

В этом случае говорят [2], что задана метрика вращения. Как показано, каждая метрика вращения определяет поверхность вращения.

В случае (б)

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = V$$

будет единственным решением (1). Оно определяет вектор, направленный по параллели поверхности. Из условия (1) следует: для того чтобы у линейной системы был линейный интеграл, необходимо, чтобы $Q^2 = 0$, т. е. обобщенная сила должна быть направлена по меридиане. Если это условие выполнено, то у системы один линейный интеграл. В противном случае такого интеграла нет.

В случае (в) у риманова пространства постоянная гауссовая кривизна K. Уравнения (1) имеют три независимых решения. В [3] показано, как могут быть найдены эти решения для V_2, метрика которого имеет вид (3). Обозначим их через $\lambda_\varkappa{}^i$; $i = 1, 2, 3$; $\varkappa = 1, 2$. Любое решение $\lambda_\varkappa$ получается как линейная комбинация $\lambda_\varkappa{}^i$, а именно:

$$\lambda_\varkappa = \lambda_\varkappa{}^1 T_1 + \lambda_\varkappa{}^2 T_2 + \lambda_\varkappa{}^3 T_3, \qquad T_1, T_2, T_3 = \text{const}$$

Когда $Q^1 = Q^2 = 0$, у механической системы три независимых линейных интеграла

$$\lambda_\varkappa{}^1 q^{\cdot\varkappa} = c^1, \qquad \lambda_\varkappa{}^2 q^{\cdot\varkappa} = c^2, \qquad \lambda_\varkappa{}^3 q^{\cdot\varkappa} = c^3$$

Если хотя бы одно из $Q^\varkappa$ отлично от нуля, то для того чтобы у механической системы был линейный интеграл, необходимо

$$Q^1 = -\rho\,(T_1\lambda_2{}^1 + T_2\lambda_2{}^2 + T_3\lambda_2{}^3), \qquad Q^2 = \rho\,(T_1\lambda_1{}^1 + T_2\lambda_1{}^2 + T_3\lambda_1{}^3) \tag{4}$$

В этом случае у механической системы есть один линейный интеграл. Если допустим, что у (1) есть еще одно независимое решение $\mu_\varkappa$, удовлетворяющее (4), то оно должно быть коллинеарным с $\lambda_\varkappa$. Это невозможно, как было показано в [1]. Когда условие (4) не выполняется, у механической системы нет линейного интеграла.

Рассмотрим подробнее случай (б). Следующая теорема показывает, какова должна быть силовая функция U, для того чтобы у механической системы был линейный интеграл.

Теорема. Чтобы у механической системы в случае (б) был линейный интеграл, необходимо и достаточно, чтобы силовая функция U была функцией гауссовой кривизны K, т. е. $U(K)$.

Доказательство. Как известно [1]

$$(\nabla_k R^j_{sks} + \nabla_s R^j_{ksk})\,\lambda_j = 2\,(R^j_{ksk}\varepsilon_{js} + R^j_{kss}\varepsilon_{kj}) \tag{5}$$

Когда у системы две степени свободы и $k = 1$, $s = 2$, имеем

$$R^l_{121}\varepsilon_{l2} + R^l_{122}\varepsilon_{1l} = (R^1_{121} + R^2_{122})\,\varepsilon_{12} = g^{12}\varepsilon_{12}\,(R_{1212} + R_{1212}) = 0$$

Поэтому (5) принимает вид

$$(\nabla_1 R_{212j} + \nabla_2 R_{121j})\,\lambda^j = 0 \tag{6}$$

Имея в виду, что $R_{ijkl} = K\,(g_{ik}g_{lj} - g_{il}g_{jk})$, находим [4]

$$\nabla_s R_{ijkl} = \nabla_s K\,(g_{ik}g_{lj} - g_{il}g_{jk})$$

Подставляя в (6), получаем

$$(g_{22}g_{1l} - g_{2l}g_{12})\,\nabla_1 K\lambda^l + (g_{11}g_{2l} - g_{1l}g_{21})\,\nabla_2 K\lambda^l = 0 \tag{7}$$

В случае (б) кривизна K не будет постоянной величиной, поэтому хотя бы одно из $\nabla_s K$ отлично от нуля. Преобразуя (7), имеем

$$\nabla_1 K\lambda^1 + \nabla_2 K\lambda^2 = \nabla_s K\lambda^s = 0$$

Следовательно

$$\lambda^j = \varepsilon^{js}\,\nabla_s K \tag{8}$$

где ε^{js} — бивектор [2]. Используя условие (2) и равенство $Q_j = \partial U / \partial q^j$, находим

$$\varepsilon^{js} \nabla_s K \nabla_j U = 0$$

Последнее равенство показывает, что U и K — функционально зависимые, т. е. $U = U(K)$.

Пусть, наоборот, известно, что $U = U(K)$. Тогда для обобщенных сил находим

$$Q_j = (dU / dK) \nabla_j K$$

Так как условие (8) выполнено, нужно проверить, выполняется ли и условие (2). Действительно

$$\lambda^j Q_j = \varepsilon^{js} \nabla_s K \frac{dU}{dK} \nabla_j K = 0$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть при условии теоремы $g_{\lambda\mu}$ зависит только от одной из переменных, например $g_{\lambda\mu}(q^1)$. Тогда [4]

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \tag{9}$$

Числитель и знаменатель зависят только от q^1. Следовательно, $K = K(q^1)$; по теореме $U = U(q^1)$. Таким образом, если $g_{\lambda\mu}(q^1)$, то, для того чтобы у механической системы был линейный интеграл, необходимо и достаточно, чтобы $U(q^1)$.

Обратимся к примеру, рассмотренному в [1]

$$2T = A\varphi^{\cdot 2} + B\theta^{\cdot 2} + 2C \cos(\theta - \varphi) \varphi^{\cdot} \theta^{\cdot}$$

$$A = {}^{16}/_3 mr^2, \qquad B = {}^4/_3 mr^2, \qquad C = mr^2$$

$$U = 3mgr \cos\varphi + mgr \cos\theta$$

Сделаем замену переменных $q^1 = \theta - \varphi$ и $q^2 = \varphi$. Тогда

$$2T^* = A(q^{2\cdot})^2 + B(q^{2\cdot} + q^{1\cdot})^2 + 2C \cos q^1 (q^{1\cdot} + q^{2\cdot}) q^{2\cdot}$$

$$U^* = 3mgr \cos q^1 + mgr \cos(q^1 + q^2)$$

Как видно $g_{\lambda\mu}(q^1)$. Силовая функция U зависит от q^2, так как $\partial U / \partial q^2 = -mgr \sin(q^1 + q^2) \neq 0$.

Из следствия получается, что у системы не будет линейного интеграла, как было показано непосредственно в [1].

Поступила 15 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Илиев И. О линейных интегралах голономной механической системы. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
2. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., Физматгиз, 1963.
3. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
4. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ, изд. 3. М., «Наука», 1967.