Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Л. М. Зубов

(Ростов-на-Дону)

Получено видоизменение восьми вариационных принципов классической теории упругости [1] для случая конечных деформаций упругого тела. Отличие от классической теории состоит в том, что дуальные тензоры несимметричны. В качестве последних принимаются тензор напряжений Пиола и тензор-градиент радиус-вектора точки деформированного тела.

Уравнения равновесия упругого тела в объеме и на поверхности могут быть записаны в виде [2, 3]

$$\nabla \cdot \mathrm{D} + \rho_0 \mathbf{K} = 0 \quad \text{в} \quad v \tag{1}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathrm{D} = \mathbf{F}^\circ \quad \text{на} \quad o \tag{2}$$

Здесь ∇ — набла-оператор в метрике недеформированного тела, D — несимметричный тензор напряжений Пиола, ρ_0 — плотность материала в недеформированном состоянии, $\mathbf{K}$ — вектор массовых сил, $\mathbf{F}^\circ$ — вектор поверхностных сил, приходящийся на единицу площади недеформированного тела, v — объем, занимаемый телом в недеформированном состоянии, o — поверхность, ограничивающая объем v, $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности o.

Общее решение уравнения (1) имеет следующий вид:

$$\mathrm{D} = \nabla \times \Phi + U\mathrm{E} \qquad (\rho_0 \mathbf{K} = -\nabla U) \tag{3}$$

Здесь Φ — произвольный дважды дифференцируемый тензор, U — потенциал объемных сил, E — единичный тензор.

Тензор D является потенциальной тензорной функцией от тензор-градиента радиус-вектора точки деформированного тела [4]:

$$\mathrm{D} = \frac{dW}{d\mathrm{C}}, \qquad \mathrm{C} = \nabla \mathbf{R} \tag{4}$$

Здесь W — удельная потенциальная энергия деформации.

Далее вводится в рассмотрение удельная дополнительная работа деформации как функция от компонентов тензора напряжений Пиола, связанная с W преобразованием Лежандра

$$B = \mathrm{D} \cdot\cdot \mathrm{C}^T - W \tag{5}$$

По свойству преобразования Лежандра имеем

$$\mathrm{C} = \frac{dB(\mathrm{D})}{d\mathrm{D}} \tag{6}$$

Способ выражения удельной дополнительной работы деформации через тензор напряжений Пиола для изотропного тела указан в работе [4].

Тензор С, определяемый по (6), вообще не является градиентом вектора. Необходимым и достаточным условием градиентальности тензора С является следующее уравнение совместности:

$$\nabla \times \mathrm{C} = 0 \tag{7}$$

В основу последующих рассмотрений положены следующие тождества, справедливые для произвольных дифференцируемых тензоров P, Q и вектора **a**:

$$\nabla \cdot (\mathrm{P} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot (\nabla \cdot \mathrm{P}) + \mathrm{P}^T \cdot\cdot \nabla \mathbf{a} \tag{8}$$

$$I_1 [\nabla \times (\mathrm{P} \cdot \mathrm{Q})] = -\nabla \cdot \epsilon \cdot\cdot (\mathrm{P} \cdot \mathrm{Q}) = \mathrm{Q} \cdot\cdot (\nabla \times \mathrm{P}) - \mathrm{P}^T \cdot\cdot (\nabla \times \mathrm{Q}^T) \tag{9}$$

Здесь I_1 — первый инвариант тензора, $\epsilon = -\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ — изотропный тензор третьего ранга (тензор Леви-Чивита).

Из (8), (9) следуют интегральные тождества

$$\iiint_v \mathbf{a} \cdot (\nabla \cdot P)\, d\tau = -\iiint_v \mathrm{P}^T \cdot\cdot \nabla \mathbf{a}\, d\tau + \iint_o \mathbf{n} \cdot \mathrm{P} \cdot \mathbf{a}\, do \tag{10}$$

$$\iiint_v \mathrm{Q} \cdot\cdot (\nabla \times \mathrm{P})\, d\tau = \iiint_v \mathrm{P}^T \cdot\cdot (\nabla \times \mathrm{Q}^T)\, d\tau - \iint_o \mathbf{n} \cdot \epsilon \cdot\cdot (\mathrm{P} \cdot \mathrm{Q})\, do \tag{11}$$

Пусть o_1 — часть поверхности, на которой заданы внешние силы, на $o_2 = o - o_1$ заданы перемещения $\mathbf{R} = \mathbf{R}^*$. Внешние силы предполагаются мертвыми, т. е. векторы **K** и $\mathbf{F}^\circ$ не зависят от перемещений.

Первый принцип. Рассмотрим функционал над вектором перемещений **u**

$$J_1(\mathbf{R}) = \iiint_v [W(\mathbf{R}) - \rho_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}]\, d\tau - \iint_{o_1} \mathbf{F}^\circ \cdot \mathbf{u}\, do \tag{12}$$

Условия $\delta J_1(\mathrm{R}) = 0$, $\delta \mathbf{R} = 0$ на o_2 эквивалентны уравнениям в перемещениях

$$\nabla \cdot \mathrm{D}(\mathbf{R}) + \rho_0 \mathbf{K} = 0 \quad \text{в } v$$

и граничным условиям

$$\mathbf{n} \cdot \mathrm{D}(\mathbf{R}) = \mathbf{F}^\circ \quad \text{на } o_1$$

Доказательство. По (4), (10) имеем

$$\delta J_1 = \iiint_v (\mathrm{D} \cdot\cdot \delta \nabla \mathbf{R}^T - \rho_0 \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{R})\, d\tau - \iint_{o_1} \mathbf{F}^\circ \cdot \delta \mathbf{R}\, do =$$

$$= \iint_{o_1} (\mathbf{n} \cdot \mathrm{D} - \mathbf{F}^\circ) \cdot \delta \mathbf{R}\, do - \iiint_v \delta \mathbf{R} \cdot (\nabla \cdot \mathrm{D} + \rho_0 \mathbf{K})\, d\tau$$

Второй принцип. Рассматривается функционал над вектором перемещений и тензором напряжений Пиола

$$J_2(\mathbf{R}, \mathrm{D}) = \iiint_v [\mathrm{D} \cdot\cdot \nabla \mathbf{R}^T - B(\mathrm{D}) - \rho_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}]\, d\tau -$$

$$- \iint_{o_1} \mathbf{F}^\circ \cdot \mathbf{u}\, do - \iint_{o_2} \mathbf{n} \cdot \mathrm{D} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}^*)\, do$$

Условие $\delta J_2(\mathbf{R}, \mathbf{D}) = 0$ эквивалентно уравнениям

$$\nabla \cdot \mathbf{D} + \rho_0 \mathbf{K} = 0, \quad \nabla \mathbf{R} = \frac{dB(\mathbf{D})}{d\mathbf{D}} \quad \text{в } v$$

и граничным условиям

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{F}^\circ \quad \text{на } o_1, \qquad \mathbf{R} = \mathbf{R}^* \quad \text{на } o_2$$

Доказательство. По (6), (10) имеем

$$\delta J_2 = -\iiint\limits_v (\nabla \cdot \mathbf{D} + \rho_0 \mathbf{K}) \cdot \delta \mathbf{R}\, d\tau + \iiint\limits_v \left(\nabla \mathbf{R} - \frac{dB}{d\mathbf{D}}\right) \cdot\cdot\, \delta \mathbf{D}^T d\tau +$$
$$+ \iint\limits_{o_1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{F}^\circ) \cdot \delta \mathbf{R}\, do - \iint\limits_{o_2} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{D} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}^*)\, do$$

Третий принцип. Функционал

$$J_3(\mathbf{R}, \mathbf{D}, \mathbf{C}) = \iiint\limits_v [W(\mathbf{C}) - \mathbf{D}^T \cdot\cdot\, (\mathbf{C} - \nabla \mathbf{R}) - \rho_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}]\, d\tau -$$
$$- \iint\limits_{o_1} \mathbf{F}^\circ \cdot \mathbf{u}\, do - \iint\limits_{o_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}^*)\, do$$

Условие $\delta J_3(\mathbf{R}, \mathbf{D}, \mathbf{C}) = 0$ эквивалентно уравнениям

$$\nabla \cdot \mathbf{D} + \rho_0 \mathbf{K} = 0, \quad \mathbf{D} = \frac{dW}{d\mathbf{C}}, \quad \mathbf{C} = \nabla \mathbf{R} \quad \text{в } v$$

и граничным условиям:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{F}^\circ \quad \text{на } o_1, \qquad \mathbf{R} = \mathbf{R}^* \quad \text{на } o_2$$

Доказательство

$$\delta J_3 = \iiint\limits_v \left(\frac{dW}{d\mathbf{C}} - \mathbf{D}\right) \cdot\cdot\, \delta \mathbf{C}^T d\tau - \iiint\limits_v (\nabla \cdot \mathbf{D} + \rho_0 \mathbf{K}) \cdot \delta \mathbf{R}\, d\tau -$$
$$- \iiint\limits_v (\mathbf{C} - \nabla \mathbf{R}) \cdot\cdot\, \delta \mathbf{D}^T d\tau + \iint\limits_{o_1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{F}^\circ) \cdot \delta \mathbf{R}\, do - \iint\limits_{o_2} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{D} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}^*)\, do$$

Четвертый принцип. Предполагается, что $o = o_1$. Через $B[\mathbf{D}(\Phi)]$ обозначим удельную дополнительную работу деформации, выраженную, согласно (3), через тензор Φ. Функционал

$$J_4(\Phi) = \iiint\limits_v B[\mathbf{D}(\Phi)]\, d\tau$$

Условия $\delta J_4 = 0$, $\delta \Phi = 0$ на $o = o_1$ эквивалентны уравнениям совместности для тензора Φ

$$\nabla \times \mathbf{C}(\Phi) = 0 \quad \text{в } v$$

Доказательство. По (11), (6) имеем

$$\delta J_4 = \iiint\limits_v \frac{dB}{d\mathbf{D}} \cdot\cdot\, (\nabla \times \delta \Phi)^T d\tau = \iiint\limits_v \mathbf{C}^T \cdot\cdot\, (\nabla \times \delta \Phi)\, d\tau =$$
$$= \iiint\limits_v \delta \Phi^T \cdot\cdot\, (\nabla \times \mathbf{C})\, d\tau - \iint\limits_o \mathbf{n} \cdot \epsilon \cdot\cdot\, (\delta \Phi \cdot \mathbf{C}^T)\, do$$

В несколько другой форме вариационный принцип, из которого вытекают уравнения совместности, записанные через компоненты тензора D, был дан в работе [4].

Пятый принцип. Функционал

$$J_5(\mathrm{C}, \Phi) = \iiint\limits_v [\mathrm{D}(\Phi) \cdot\cdot\, \mathrm{C}^T - W(\mathrm{C})]\, d\tau$$

Условия $\delta J_5 = 0$, $\delta\Phi = 0$ на $o = o_1$ эквивалентны уравнениям:

$$\mathrm{D}(\Phi) = \frac{dW}{d\mathrm{C}}, \quad \nabla \times \mathrm{C} = 0 \quad \text{в } v.$$

Доказательство

$$\delta J_5 = \iiint\limits_v \left(\mathrm{D} - \frac{dW}{d\mathrm{C}}\right) \cdot\cdot\, \delta \mathrm{C}^T d\tau + \iiint\limits_v \delta\Phi^T \cdot\cdot\, (\nabla \times \mathrm{C})\, d\tau - \iint\limits_o \mathbf{n} \cdot \epsilon \cdot\cdot\, (\delta\Phi \cdot \mathrm{C}^T)\, do$$

Шестой принцип. Функционал

$$J_6(\mathrm{C}, \mathrm{D}, \Phi) = \iiint\limits_v [B(\mathrm{D}) - \mathrm{C}^T \cdot\cdot\, (\mathrm{D} - \nabla \times \Phi - U\mathrm{E})]\, d\tau$$

Условия $\delta J_6 = 0$, $\delta\Phi = 0$ на $o = o_1$ эквивалентны уравнениям

$$\mathrm{C} = \frac{dB}{dD}, \quad \nabla \times \mathrm{C} = 0, \qquad \mathrm{D} = \nabla \times \Phi + U\mathrm{E}$$

Доказательство

$$\delta J_6 = \iiint\limits_v \left(\frac{dB}{d\mathrm{D}} - \mathrm{C}\right) \cdot\cdot\, \delta \mathrm{D}^T d\tau - \iiint\limits_v (\mathrm{D} - \nabla \times \Phi - U\mathrm{E}) \cdot\cdot\, \delta \mathrm{C}^T d\tau +$$

$$+ \iiint\limits_v \delta\Phi^T \cdot\cdot\, (\nabla \times \mathrm{C})\, d\tau - \iint\limits_o \mathbf{n} \cdot \epsilon \cdot\cdot\, (\delta\Phi \cdot \mathrm{C}^T)\, do$$

Седьмой принцип. Функционал

$$J_7(\mathbf{R}, \mathrm{D}, \mathrm{C}, \Phi) = \iiint\limits_v [\mathrm{D} \cdot\cdot\, \nabla \mathbf{R}^T - B(\mathrm{D}) + \mathrm{D}(\Phi) \cdot\cdot\, \mathrm{C}^T - W(\mathrm{C})]\, d\tau -$$

$$- \iiint\limits_v \rho_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}\, d\tau - \iint\limits_o \mathbf{F}^\circ \cdot \mathbf{u}\, do$$

Условия $\delta J_7 = 0$, $\delta\Phi = 0$ на $o = o_1$ эквивалентны уравнениям

$$\nabla \cdot \mathrm{D} + \rho_0 \mathbf{K} = 0, \quad \mathrm{D}(\Phi) = \frac{dW}{d\mathrm{C}}, \quad \nabla \mathbf{R} = \frac{dB}{d\mathrm{D}}, \quad \nabla \times \mathrm{C} = 0$$

и граничным условиям

$$\mathbf{n} \cdot \mathrm{D} = \mathbf{F}^\circ \quad \text{на } o = o_1$$

Доказательство

$$\delta J_7 = - \iiint\limits_v (\nabla \cdot \mathrm{D} + \rho_0 \mathbf{K}) \cdot \delta \mathbf{R}\, d\tau + \iiint\limits_v \left(\nabla \mathbf{R} - \frac{dB}{d\mathrm{D}}\right) \cdot\cdot\, \delta \mathrm{D}^T d\tau +$$

$$+ \iiint\limits_v \left(\mathrm{D} - \frac{dW}{d\mathrm{C}}\right) \cdot\cdot\, \delta \mathrm{C}^T d\tau + \iint\limits_o (\mathbf{n} \cdot \mathrm{D} - \mathbf{F}^\circ) \cdot \delta \mathbf{R}\, do -$$

$$- \iint\limits_o \mathbf{n} \cdot \epsilon \cdot\cdot\, (\delta\Phi \cdot \mathrm{C}^T)\, do + \iiint\limits_v \delta\Phi^T \cdot\cdot\, (\nabla \times \mathrm{C})\, d\tau$$

Восьмой принцип. **Уравнения совместности для тензора C вытекают из стационарности функционала J_8 (C) при условии $\delta C = 0$ на o**

$$J_8(C) = \frac{1}{2}\iiint\limits_v C^T \cdot\cdot (\nabla \times C)\, d\tau$$

Доказательство. Согласно (11) имеем

$$\delta J_8 = \frac{1}{2}\iiint\limits_v [\delta C^T \cdot\cdot (\nabla \times C) + C^T \cdot\cdot (\nabla \times \delta C)]\, d\tau = \frac{1}{2}\iiint\limits_v \delta C^T \cdot\cdot (\nabla \times C)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\iiint\limits_v \delta C^T \cdot\cdot (\nabla \times C)\, d\tau - \frac{1}{2}\iint\limits_o \mathbf{n} \cdot \epsilon \cdot\cdot (\delta C \cdot C^T)\, do = \iiint\limits_v \delta C^T \cdot\cdot (\nabla \times C)\, d\tau$$

Автор благодарит А. И. Лурье за внимание к работе.

Поступила 30 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Т о н т и Э. Вариационные принципы в теории упругости. Механика. Период. сб. перев. иностр. стат., 1969, № 5.
2. Л у р ь е А. И. Теория упругости для полулинейного материала. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
3. Л у р ь е А. И. Теория упругости. М., «Наука», 1970.
4. З у б о в Л. М. Принцип стационарности дополнительной работы в нелинейной теории упругости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.