Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОВЕДЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Н. Н. Голубь

(Москва)

Для двух задач рассматривается построение оптимального по быстродействию управления распределенными системами со случайными свойствами.

В задаче 1 распределенная система описывается совокупностью n интегральных соотношений при наличии ограничения, наложенного на норму управления $u(z, \tau)$ в пространстве $L_2[\nu_z \times (0 \leqslant \tau \leqslant T)]$. В задаче 2 изучается построение оптимального по быстродействию управления угловыми движениями и крутильными колебаниями идеализированной модели упругого летательного аппарата типа «летающее крыло» [1, 2]. При полете этой модели в однородной турбулентной атмосфере на энергию, необходимую для создания управляющего воздействия $u(x, t)$, накладывается ограничение типа неравенства.

1. Постановка задачи. Пусть объект управления описывается следующими интегральными соотношениями

$$q_i(x, t) = \int\limits_{\nu_z} \int\limits_0^t u(z, \tau) G_i(z, \tau, x, t)\, dz\, d\tau \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — две различные точки области ν, в которой протекает рассматриваемый процесс, причем при интегрировании по z область ν обозначается как ν_z; t, τ — различные моменты времени; $q_i(x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — функции, характеризующие состояние объекта управления; $u(z, \tau)$ — детерминированная управляющая функция; $G_i(z, \tau, x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — заданные вещественные случайные функции. Ниже предполагается, что функции $G_i(z, \tau, x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ представимы в виде следующих канонических разложений [3]

$$G_i(z, \tau, x, t) = G_{i0}(z, \tau, x, t) + \sum_{r=1}^{p} h_r G_{ir}(z, \tau, x, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Здесь выражения $G_{i0}(z, \tau, x, t) \equiv \langle G_i(z, \tau, x, t) \rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ описывают математические ожидания случайных функций $G_i(z, \tau, x, t)$, при этом $G_{ir}(z, \tau, x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ r = 1, 2, \ldots, p)$ — координатные функции; h_r $(r = 1, 2, \ldots, p)$ — некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и известными дисперсиями.

Предположим, что

$$G_{ir}(z, \tau, x, t) \in L_2[\nu_z \times (0 \leqslant \tau \leqslant T) \times \nu_x \times (0 \leqslant t \leqslant T)]$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ r = 1, 2, \ldots, p)$$

Используя выражения (1.2), можно найти, что математические ожидания $\langle q_i(x, t)\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и взаимные корреляционные моменты $R_{ik}(x, t)$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ функций состояния $q_i(x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ для некоторого фиксированного момента времени t имеют следующий вид

$$\langle q_i(x, t)\rangle = \int\limits_{\nu_z}\int\limits_0^t u(z, \tau)\, G_{i0}(z, \tau, x, t)\, dz\, d\tau \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.3}$$

$$R_{ik}(x, t) = \sum_{r=1}^{p}\Big\{\theta_r \int\limits_{\nu_z}\int\limits_0^t \int\limits_{\nu_y}\int\limits_0^t [u(z, \tau)\, G_{ir}(z, \tau, x, t)\, u(y, \varphi)\, G_{kr}(y, \varphi, x, t)] \times$$
$$\times\, dz\, d\tau\, dy\, d\varphi\Big\} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.4}$$

Здесь $\theta_r = \langle h_r^2\rangle$ $(r = 1, 2, \ldots, p)$ — дисперсии некоррелированных случайных величин h_r $(r = 1, 2, \ldots, p)$. Введем следующие функции

$$Q_i(x, t) = \eta_i \langle q_i(x, t)\rangle + \mu_i \langle q_i(x, t)\rangle^2 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} R_{ik}(x, t) \equiv$$
$$\equiv \eta_i \int\limits_{\nu_z}\int\limits_0^t u(z, \tau)\, G_{i0}(z, \tau, x, t)\, dz\, d\tau + \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.5}$$
$$+ \int\limits_{\nu_z}\int\limits_0^t \int\limits_{\nu_y}\int\limits_0^t u(z, \tau)\, u(y, \varphi)\, H_i(z, \tau, y, \varphi, x, t)\, dz\, d\tau\, dy\, d\varphi$$

$$H_i(z, \tau, y, \varphi, x, t) = H_i(y, \varphi, z, \tau, x, t) = \mu_i G_{i0}(z, \tau, x, t)\, G_{i0}(y, \varphi, x, t) +$$
$$+ \sum_{r=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} \theta_r \lambda_{ik} G_{ir}(z, \tau, x, t)\, G_{kr}(y, \varphi, x, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.6}$$

Здесь η_i, $\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$, μ_i $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ — заданные весовые постоянные. Функции $Q_i(x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ можно рассматривать как обобщенные функции состояния (1.1). Они дают некоторую среднюю, вероятностную характеристику процесса в момент времени t.

Пусть в некоторый фиксированный момент времени $t = T$ по предположению выполняется условие

$$Q_i(x, T) = \gamma_i(x, T) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.7}$$

$$\gamma_i(x, T) = \eta_i \int\limits_{\nu_z}\int\limits_0^T u(z, \tau)\, G_{i0}(z, \tau, x, t)\, dz\, d\tau + \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$
$$+ \int\limits_{\nu_z}\int\limits_0^T \int\limits_{\nu_y}\int\limits_0^T u(z, \tau)\, u(y, \varphi)\, H_i(z, \tau, y, \varphi, x, T)\, dz\, d\tau\, dy\, d\varphi \tag{1.8}$$

Здесь $\gamma_i(x, T)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — заданные функции, удовлетворяющие условиям

$$\gamma_i(x, T) \in L_2[\nu], \qquad \int\limits_{\nu_x} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2(x, T)\, dx > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.9}$$

Поставим следующую задачу: требуется найти такое детерминированное управление

$$u(z, \tau) \in L_2 [\nu_z \times (0 \leqslant \tau \leqslant T)]$$

$$\|u\| \equiv \left(\int\limits_{\nu_z} \int\limits_0^T u^2 (z, \tau) \, dz \, d\tau \right)^{1/2} \leqslant a \equiv \mathrm{const} > 0 \tag{1.10}$$

которое переводит систему (1.1) из состояния

$$q_i (x, 0) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.11}$$

в состояние $Q_i (x, T) = \gamma_i (x, T)$ (1.8) ($i = 1, 2, \ldots, n$) за минимально возможное время T.

Предположим, что: а) существует по крайней мере одно решение системы (1.8), б) норма $\| u \|$ оптимального управления непрерывно зависит от T.

Замечание 1. Если $h_r = 0$ ($r = 1, 2, \ldots, p$), то исследуемый процесс будет не стохастическим, а детерминированным. В этом случае исходная задача представляет собой задачу о достижении конечных состояний за наименьшее время T при ограниченной норме управления. Подобные задачи для конечного и счетного множества моментных равенств типа (1.8), когда моменты γ_i ($i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$) не зависят от пространственных координат, исследовались, например, в работах [4,5].

Для решения исходной задачи потребуются результаты ниже исследуемой вспомогательной задачи.

2. Постановка и решение вспомогательной задачи. Поставим следующую задачу: для фиксированного момента времени $t = T$ требуется найти оптимальное управление $u (x, t) \in L_2$, которое переводит систему (1.1) из состояния (1.11) в состояние $Q_i (x, T) = \gamma_i (x, T)$ (1.8) ($i = 1, 2, \ldots, n$) с наименьшим значением нормы управления $\| u \|$.

Для решения этой задачи применим метод множителей Лагранжа. Составим вспомогательный функционал

$$\Xi = - \int\limits_{\nu_x} \Big\{ \sum_{i=1}^n \Psi_i (x) \Big[\eta_i \int\limits_{\nu_z} \int\limits_0^T u (z, \tau) G_{i0} (z, \tau, x, T) \, dz \, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\nu_z} \int\limits_0^T \int\limits_{\nu_y} \int\limits_0^T u (z, \tau) u (y, \varphi) H_i (z, \tau, y, \varphi, x, T) \, dz \, d\tau \, dy \, d\varphi - \gamma_i (x, T) \Big] \Big\} dx +$$

$$+ \int\limits_{\nu_z} \int\limits_0^T u^2 (z, \tau) \, dz \, d\tau \tag{2.1}$$

Здесь $\Psi_i (x) \in L_2 [\nu]$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) — множители Лагранжа. Приращение функционала Ξ можно описать такими формулами

$$\Delta \Xi = \Xi (u, \Delta u) - \Xi (u) = \Pi (u, \Delta u) + \Gamma (\Delta u) \tag{2.2}$$

Здесь

$$\Pi (u, \Delta u) = \int\limits_{\nu_z} \int\limits_0^T \Delta u (z, \tau) \Big\{ 2u (z, \tau) - \Big[\int\limits_{\nu_x} \sum_{i=1}^n \Psi_i (x) \times$$

$$\times \left(\eta_i G_{i0}(z, \tau, x, T) + 2 \int\limits_{\nu_y} \int\limits_0^T u(y, \varphi) H_i(z, \tau, y, \varphi, x, T)\, dy\, d\varphi\right) dx\Big]\Big\} dz\, d\tau \qquad (2.3)$$

$$\Gamma(\Delta u) = \int\limits_{\nu_z} \int\limits_0^T \Delta u^2(z, \tau)\, dz\, d\tau - \int\limits_{\nu_x} \Big\{ \sum_{i=1}^n \Psi_i(x) \times$$

$$\times \int\limits_{\nu_z} \int\limits_0^T \int\limits_{\nu_y} \int\limits_0^T \Delta u(z, \tau) \Delta u(y, \varphi) H_i(z, \tau, y, \varphi, x, T)\, dz\, d\tau\, dy\, d\varphi \Big\} dx \qquad (2.4)$$

Можно показать, что имеет место следующая оценка

$$|\Gamma(\Delta u)| \leqslant \Big\{1 + \Big[\int\limits_{\nu_z} \int\limits_0^T \int\limits_{\nu_y} \int\limits_0^T \Big(\sum_{i=1}^n \Psi_i(x) H_i(z, \tau, y, \varphi, x, T)\, dx \Big)^2 \times$$

$$\times\, dz\, d\tau\, dy\, d\varphi \Big]^{1/2} \Big\} \|\Delta u\|^2 \qquad (2.5)$$

Очевидно, что $\Pi(u, \Delta u)$ — аддитивный относительно Δu функционал, для которого оказывается верной такая оценка

$$|\Pi(u, \Delta u)| \leqslant \Big\{ 2\|u\| + \Big\{ \int\limits_{\nu_z} \int\limits_0^T \Big[\int\limits_{\nu_x} \sum_{i=1}^n \eta_i \Psi_i(x) G_{i0}(z, \tau, x, T)\, dx \Big]^2 dz\, d\tau \Big\}^{1/2} +$$

$$+ 2 \Big\{ \int\limits_{\nu_z} \int\limits_0^T \int\limits_{\nu_y} \int\limits_0^T \Big[\int\limits_{\nu_x} \sum_{i=1}^n \Psi_i(x) H_i(z, \tau, y, \varphi, x, T)\, dx \Big]^2 dz\, d\tau\, dy\, d\varphi \Big\}^{1/2} \Big\} \|\Delta u\| \qquad (2.6)$$

Из этого можно сделать вывод, что $\Pi(u, \Delta u)$ — линейный непрерывный функционал. Учтя формулу (2.5), можно утверждать, что $\Pi(u, \Delta u)$ является первой вариацией функционала (2.1) [6, 7]. Приравнивая первую вариацию функционала (2.1) нулю, получим для определения оптимального управления вспомогательной задачи такое интегральное уравнение

$$u(z, \tau) - \int\limits_{\nu_y} \int\limits_0^T u(y, \varphi) \int\limits_{\nu_x} \sum_{i=1}^n \Psi_i(x) H_i(z, \tau, y, \varphi, x, T)\, dx\, dy\, d\varphi -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{\nu_x} \sum_{i=1}^n \eta_i \Psi_i(x) G_{i0}(z, \tau, x, T)\, dx = 0 \qquad (2.7)$$

Если это уравнение умножить на $u(z, \tau)$ и проинтегрировать по области ν_z и по параметру τ в пределах от 0 до T, то найдем формулу для вычисления наименьшего значения нормы управления

$$\|u\|^2 = \int\limits_{\nu_x} \sum_{i=1}^n \Psi_i(x) \gamma_i(x, T)\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\nu_x} \Big[\sum_{i=1}^n \Psi_i(x) \times$$

$$\times \int\limits_{\nu_z} \int\limits_0^T u(z, \tau)\, \eta_i G_{i0}(z, \tau, x, T)\, dz\, d\tau \Big] dx \qquad (2.8)$$

Система (1.8) и уравнение (2.7) образуют замкнутую систему $(n+1)$ уравнений для определения $(n+1)$ неизвестных функций $u(z, \tau)$, $\Psi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Если в формулу (2.7) подставить выражение (1.6), то после использования обозначений

$$g_{ir}(x) = \int\limits_{v_y}\int\limits_0^T u(y, \varphi)\, G_{ir}(y, \varphi, x, T)\, dy\, d\varphi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ r = 0, 1, \ldots, p) \tag{2.9}$$

нетрудно найти, что

$$u(z, \tau) = \int\limits_{v_x}\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(x)\Big\{\mu_i g_{i0}(x)\, G_{i0}(z, \tau, x, T) +$$

$$+\sum_{r=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}[\theta_r\lambda_{ik}g_{kr}(x)\, G_{ir}(z, \tau, x, T)] + \frac{1}{2}\eta_i G_{i0}(z, \tau, x, T)\Big\}\, dx \tag{2.10}$$

Если управление (2.10) подставить в (2.9), то получим следующую систему интегральных уравнений

$$g_{sj}(\zeta) = \int\limits_{v_x}\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(x)\Big\{\mu_i g_{i0}(x)\, \varkappa_{sji0}(\zeta, x) +$$

$$+\sum_{r=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}[\theta_r\lambda_{ik}g_{kr}(x)\, \varkappa_{sjir}(\zeta, x)] + \frac{1}{2}\eta_i\varkappa_{sji0}(\zeta, x)\Big\}\, dx \tag{2.11}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, 2, \ldots, p)$$

Здесь

$$\varkappa_{sjir}(\zeta, x) = \int\limits_{v_z}\int\limits_0^T G_{sj}(z, \tau, \zeta, T)\, G_{ir}(z, \tau, x, T)\, dz\, d\tau \tag{2.12}$$

$$(i, s = 1, 2, \ldots, n;\ j, r = 0, 1, 2, \ldots, p)$$

Равенства (1.8) с учетом обозначений (2.9) перепишутся таким образом

$$\gamma_i(x, T) = \eta_i g_{i0}(x) + \mu_i g_{i0}^2(x) + \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[\theta_r\lambda_{ik}g_{ir}(x)\, g_{kr}(x)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.13}$$

Из системы $n(p+2)$ уравнений (2.11), (2.13) надо найти $n(p+2)$ неизвестные функции $g_{sj}(x)$, $\Psi_i(x)$ $(i, s = 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, 2, \ldots, p)$. Вследствие нелинейности системы (2.13) решение системы уравнений (2.11), (2.13) не единственно. Из всех этих решений необходимо выбрать то, которое сообщает минимум норме управления (2.8). Используя обозначения (2.9), соотношение (2.8) можно переписать таким образом:

$$\|u\|^2 = \int\limits_{v_x}\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(x)\Big[\gamma_i(x, T) - \frac{1}{2}g_{i0}(x)\Big]\, dx \tag{2.14}$$

Результаты изложенного резюмируем следующим образом.

Теорема 1. Алгоритм решения вспомогательной задачи состоит из следующих процедур: а) из системы $n(p+2)$ уравнений (2.11), (2.13) находим $n(p+2)$ неизвестных функций $g_{sj}(x)$, $\Psi_i(x)$ $(s, i = 1, 2, \ldots, n;$ $j = 0, 1, 2, \ldots, p)$, б) если решение этой системы единственно, то оптимальное управление $u(z, \tau)$ и его норму $\|u\|$ находим по формулам (2.10) и (2.14) соответственно, в) если решение системы (2.11), (2.13) не единственно, то из всех этих решений выбирают то, которое дает минимум норме (2.14).

Замечание 2. Из формулы (2.14) следует, что для непрерывности нормы оптимального управления по параметру T достаточно непрерывности по T заданных функций $\gamma_i(x, T)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и решения системы уравнений (2.11), (2.13).

3. Алгоритм решения задачи 1. Сформулируем такую теорему.

Теорема 2. Пусть $u'(z, \tau)$ — оптимальное управление для вспомогательной задачи. Если для этой задачи норма $\|u\|$ непрерывно зависит от T, то наименьший положительный корень T' уравнения

$$\|u'\|^2 \equiv \int\limits_{\nu_x} \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(x)\left[\gamma_i(x, T) - \frac{1}{2} g_{i0}(x)\right] dx = a^2 \tag{3.1}$$

дает время быстродействия для задачи 1.

Доказательство теоремы 2. Если $u(z, \tau) \in L_2[\nu_z \times (0 \leqslant \tau \leqslant T)]$ — любое управление, удовлетворяющее системе (1.8), то

$$\|u'\| = \min \|u\| \leqslant \|u\| \tag{3.2}$$

Заметим, что

$$\|u'\| \to \infty \quad \text{при} \quad T \to 0 \tag{3.3}$$

Действительно, этот факт следует из таких неравенств

$$\begin{gathered} 0 < \int\limits_{\nu_x} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2(x, T)\, dx \leqslant \\ \leqslant 2\|u\|^2 \int\limits_{\nu_z} \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\nu_x} \sum_{i=1}^{n} [\eta_i G_{i0}(z, \tau, x, T)]^2\, dz\, d\tau\, dx + \\ + 2\|u\|^4 \int\limits_{\nu_z} \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\nu_y} \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\nu_x} \sum_{i=1}^{n} H_i^2(z, \tau, y, \varphi, x, T)\, dz\, d\tau\, dy\, d\varphi\, dx \end{gathered} \tag{3.4}$$

которые вытекают из (1.8).

Предположим, что T_1 — время быстродействия для задачи 1. Пусть кроме того, норма

$$\|u'\| |_{T_1} < a \tag{3.5}$$

т. е. равенство (3.1) не выполняется. Так как норма $\|u'\|$ непрерывно зависит от T и удовлетворяет условию (3.3), то существует время $T_2 < T_1$

такое, что выполняются неравенства

$$\| u' \| |_{T_1} < \| u' \| |_{T_2} \leqslant a \tag{3.6}$$

Следовательно, время T_1 не является наименьшим временем регулирования. Так как норма оптимального управления (2.7) $\| u' \| \leqslant \| u \|$, где $u(z, \tau) \in L_2 [\nu_z \times (0 \leqslant \tau \leqslant T)]$ — некоторое решение системы (1.8), и при $T < T'$ норма $\| u \| > a$ в силу условия (3.3), то наименьший корень T' уравнения (3.1) является временем быстродействия для задачи 1. Итак, теорема 2 полностью доказана.

Замечание 3. Если норма $\| u' \|$ как функция от T имеет разрывы первого рода, то при оптимальном быстродействии равенство (3.1) может не выполняться. Правда, это не означает, что описанный выше подход неприменим и в этом случае для решения задачи быстродействия. Заметим, что при этом достаточно найти наименьшее значение T, при котором $\min \| u \| \leqslant a$.

Замечание 4. Если вспомогательная задача имеет решение $u(z, \tau) \in$ $\in L_2 [\nu_z \times (0 \leqslant \tau \leqslant T)]$ при любом значении параметра $T \in (0, \infty)$ и

$$\| u' \| \to 0 \quad \text{при } T \to \infty \tag{3.7}$$

то решение задачи 1 существует при любых значениях постоянной $a \in (0, \infty)$, т. е. всегда найдется такое T, для которого будет выполняться условие $\| u \| \leqslant a$. Заметим, что для выполнения условия (3.7) согласно соотношению (2.8) необходимо, чтобы

$$\| \Psi(x) \|^2 \equiv \int_{\nu_x} \sum_{i=1}^{n} \Psi_i^2 (x)\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty \tag{3.8}$$

4. Постановка задачи 2. Обычно в задачах аэроупругости предполагается, что конструкция крыла является идеально упругой [1,2]. При этом предположении вращательные движения и крутильные колебания «летающего крыла» можно описать таким дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\alpha(x) Q_{tt} - \frac{\partial}{\partial x} (\delta(x) Q_x) = \mu(x, t) + F_1(x) F_2(t) u(x, t) \tag{4.1}$$

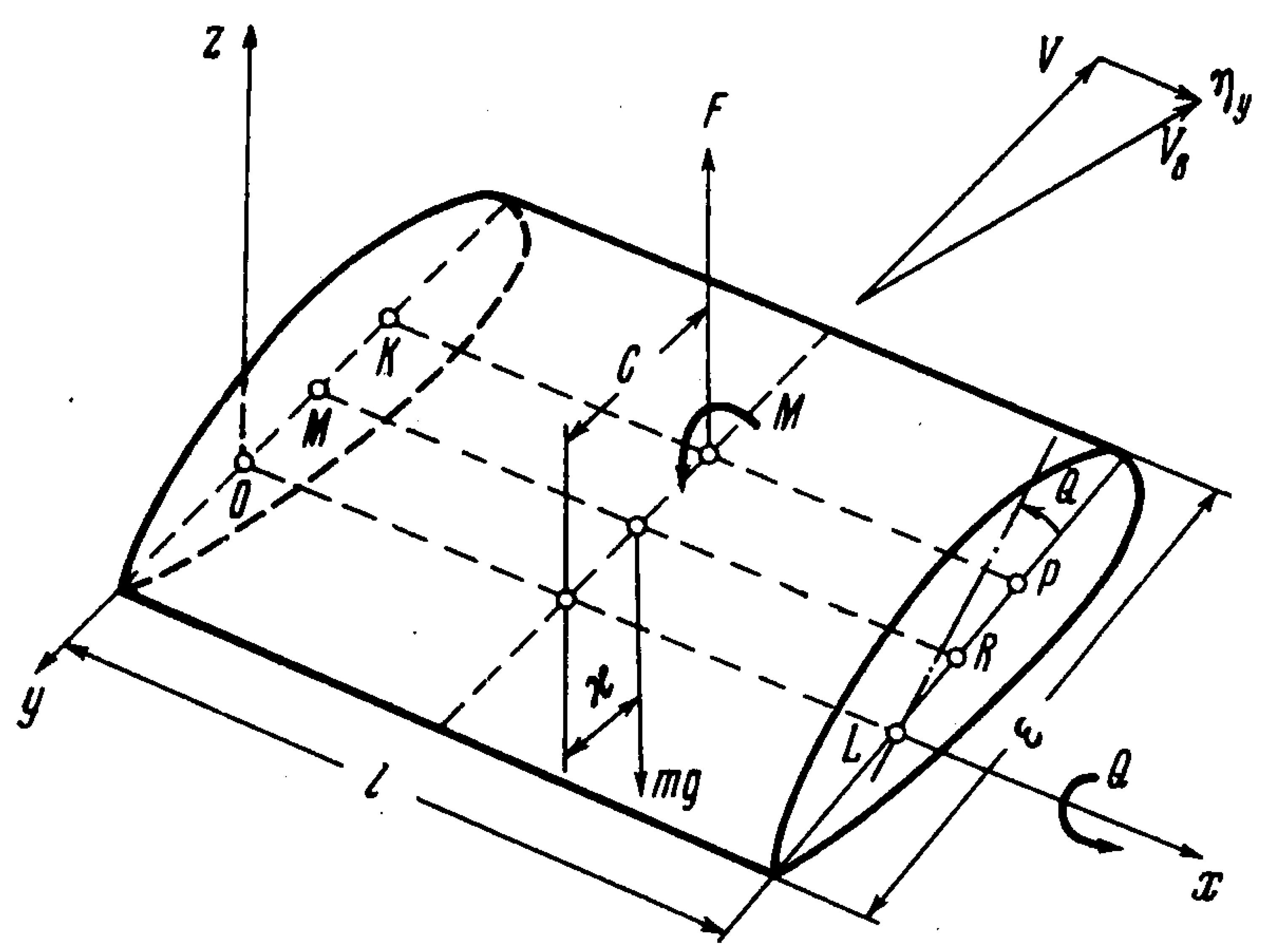
Здесь $Q = Q(x, t)$ — угол между хордами сечения x (в момент времени t) в невозмущенном и возмущенном полетах; $\alpha(x)$ — массовый погонный момент инерции; $\delta(x)$ — жесткость сечения крыла на кручение; $\mu(x, t)$ — дополнительный погонный крутящий момент, который возникает при возмущенном полете; $u(x, t)$ — детерминированное управление; произведение $F_1(x) F_2(t) u(x, t)$ имеет смысл распределенного крутящего момента, причем функция $F_1(x)$ характеризует распределение управления по длине крыла, а при помощи функции $F_2(t)$ учитывается влияние на управление различных случайных обстоятельств (например, турбулентность атмосферы).

Для уравнения (4.1) начальные и граничные условия описываются таким образом:

$$Q(x, 0) = f_1(x), \qquad Q_t(x, t)|_{t=0} = f_2(x) \tag{4.2}$$

$$Q_x(x, t)|_{x=0} = 0, \qquad Q_x(x, t)|_{x=l} = 0 \tag{4.3}$$

Здесь l — размах крыла; $f_1(x)$, $f_2(x)$ — функции, зависящие от случайного параметра и принимающие свои распределения с определенной вероятностью из некоторого набора функций-реализаций; реализации $f_1(x)$ — непрерывные, кусочно-дифференцируемые функции; реализации $f_2(x)$ — кусочно-непрерывные функции.



Предположим, что: а) «летающее крыло» имеет прямоугольную форму в плане, б) за невозмущенное движение крыла принимается горизонтальный полет в спокойной атмосфере, в) движение крыла рассматривается начиная с момента времени $t = 0$, причем с этого момента времени атмосфера становится турбулентной, г) высота и скорость полета остаются неизменными, д) функции $\alpha(x)$, $\delta(x)$ считаются не зависящими от пространственной переменной x.

При соблюдении предположения б) движение каждого сечения крыла является установившимся и происходит при неизменном угле атаки $\omega(x)$, который отсчитывается от направления нулевой подъемной силы. Этот угол атаки складывается из местного угла атаки $\omega_0(x)$, отсчитываемого от направления нулевой подъемной силы, без учета угла упругого закручивания $q_0(x)$ в установившемся горизонтальном полете, т. е. $\omega(x) = \omega_0(x) + q_0(x)$. При этом погонный крутящий момент не зависит от времени t и при некоторых общепринятых предположениях может быть описан следующим образом [1, 2]

$$\mu'(x) = \varepsilon c d S \omega(x) + M - mg\varkappa \tag{4.4}$$

$$M = \varepsilon^2 S E_\mu, \quad d = \frac{\partial E_y}{\partial \omega}\bigg|_{\omega=0}, \quad S = \frac{\rho V^2}{2}, \quad F = \varepsilon S E_y$$

Здесь ε — хорда крыла (фигура), c — расстояние между упругой осью (на фигуре линия OL) и линией KP, которая проходит через аэродинамические центры профилей крыла в данном сечении x, E_μ — коэффициент момента относительно линии KP, E_y — коэффициент подъемной силы сечения крыла, ρ — плотность набегающего потока, V — скорость полета, $\varkappa$ — расстояние между точками линий OL и MR в данном сечении крыла, MR — линия центров масс сечения крыла (см. фиг.).

При определении аэродинамических сил и моментов в неустановившемся движении воспользуемся теорией несущей полосы [1,2]. В этом случае имеет место такое равенство

$$\mu'(x) + \mu(x, t) = \varepsilon c d S\,[\omega(x) + Q(x, t) + \omega_\eta(x, t)] + M - \\ - mg\varkappa - \Gamma(x) Q(x, t) \tag{4.5}$$

Здесь $\Gamma(x)$ — постоянная жесткости крыла, ω_η — угол атаки, вызванный изменением вектора скорости за счет турбулентности атмосферы. Общепринято, что воздушная скорость $V_B \approx V$. Очевидно, что

$$\omega_\eta = \operatorname{arctg}[\eta_y / V] \approx \eta_y / V \tag{4.6}$$

Из формул (4.4), (4.5) следует, что

$$\mu(x, t) = \varepsilon c d S\,[Q(x, t) + \omega_\eta(x, t)] - \Gamma(x) Q(x, t) \tag{4.7}$$

Известно [8], что для однородной и изотропной турбулентности математическое ожидание $\langle \eta_y \rangle = 0$.

Учтя соотношение (4.7), уравнение (4.1) можно переписать таким образом

$$Q_{tt} = b^2 Q_{xx} - AQ + B\eta_y + \frac{1}{\alpha} F_1(x) F_2(t) u(x, t) \tag{4.8}$$

Здесь

$$A = \frac{1}{\alpha}[\Gamma(x) - dc\varepsilon S], \quad b^2 = \frac{\delta}{\alpha} \equiv \text{const}, \quad B = \frac{\varepsilon c\, dS}{\alpha V} \tag{4.9}$$

Начальные и граничные условия для уравнения (4.8) остаются прежними (см. формулы (4.2), (4.3) соответственно).

Считаем, что для случайных величин η_y, $F_2(t)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ заданы их математические ожидания.

В зависимости от скорости при полете возможны три ниже перечисленные ситуации: а) если $A > 0$, то имеет место устойчивость крыла по отношению к деформации кручения и угловому движению, б) если $A < 0$, то крыло становится неустойчивым по отношению к деформации кручения и угловому движению, в) если $A = 0$, то крыло находится в таком состоянии, которое часто называют критическим.

Предположим, что $\Gamma(x)$ и d не зависят от x. Ниже будем рассматривать только такой случай, когда $A \gg 0$.

Для каждой реализации случайных функций решение краевой задачи 2, описываемой совокупностью формул (4.8), (4.2), (4.3), можно охарактеризовать следующими формулами [9]

$$Q(x, t) = \theta(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ a_k \cos(\lambda_k t) + b_k \sin(\lambda_k t) + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^l \int_0^t V_k(\zeta) \times \tag{4.10}$$

$$\times \sin[\lambda_k (t - \tau)] \Big[B\eta_y + \frac{1}{\alpha} F_1(\zeta) F_2(\tau) u(\zeta, \tau) \Big] d\zeta\, d\tau \Big\} V_k(x)$$

Здесь если $A > 0$, то

$$\theta(x, t) = \left\{\frac{1}{\sqrt{A}}\int_0^l\int_0^t V_0(\zeta)\left[B\eta_y + \frac{1}{\alpha}F_1(\zeta)F_2(\tau)u(\zeta, \tau)\right]\sin[\sqrt{A}(t-\tau)] \times \right.$$
$$\left. \times\, d\zeta\, d\tau + a_0\cos(\sqrt{A}t) + b_0\sin(\sqrt{A}t)\right\}V_0(x) \tag{4.11}$$

$$\omega_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \lambda_k{}^2 = (A + b^2\omega_k{}^2) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.12}$$

$$V_0(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}; \quad V_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos(\omega_k x) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4.13}$$

$$a_0 = \int_0^l f_1(x)V_0(x)\,dx, \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{A}}\int_0^l f_2(x)V_0(x)\,dx \tag{4.14}$$

$$a_k = \int_0^l f_1(x)V_k(x)\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\lambda_k}\int_0^l f_2(x)V_k(x)\,dx \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4.15}$$

Если же $A = 0$, то выражения (4.11), (4.14), преобразуются к такому виду

$$\theta(x, t) = \left\{a_0 + b_0{}'t + \int_0^l\int_0^t (t-\tau)V_0(\zeta) \times \right.$$
$$\left. \times \left[B\eta_y + \frac{1}{\alpha}F_1(\zeta)F_2(\tau)u(\zeta, \tau)\right]d\zeta\, d\tau\right\}V_0(x) \tag{4.16}$$

$$b_0{}' = \int_0^l f_2(x)V_0(x)\,dx \tag{4.17}$$

Детерминированное управление $u(x, t)$ будем называть допустимым, если выполняются такие условия

$$u(x, t) \in L_2, \quad \|u\| \equiv \left(\int_0^l\int_0^T u^2(x, t)\,dx\,dt\right)^{1/2} \leqslant a \tag{4.18}$$

где a — заданное положительное число.

Поставим следующую задачу: найти такое допустимое управление $u(x, t)$, которое за минимально возможное время T переводило бы систему (4.8), (4.3) из начального состояния (4.2) в состояние, описываемое такими формулами

$$\langle Q(x, t)\rangle|_{t=T} = 0, \qquad \langle Q_t(x, t)\rangle|_{t=T} = 0 \tag{4.19}$$

5. Алгоритм решения задачи 2. Если вычислить математические ожидания $\langle Q(x, t)\rangle$, $\langle Q_t(x, t)\rangle$, то, используя условия (4.19) и $\langle\eta_y\rangle = 0$, после ряда преобразований можно получить следующие соотношения

$$\gamma_i(x, T) = \int_0^l\int_0^T u(\zeta, \tau)G_i(\zeta, \tau, x, t)\,d\zeta\,d\tau \qquad (i = 1, 2) \tag{5.1}$$

Здесь

$$\gamma_i(x, T) = \sum_{k=0}^{\infty} [\gamma_{ik} V_k(x)] \qquad (i = 1, 2) \tag{5.2}$$

$$\gamma_{10} = -(h_1 + \rho_1), \quad \gamma_{1k} = -a_k' \cos(\lambda_k T) - b_k' \sin(\lambda_k T) \tag{5.3}$$
$$(k = 1, 2, \ldots)$$

$$\gamma_{20} = -(h_2 + \rho_2), \quad \gamma_{2k} = \lambda_k [a_k' \sin(\lambda_k T) - b_k' \cos(\lambda_k T)] \tag{5.4}$$
$$(k = 1, 2, \ldots)$$

$$a_k' = \int_0^l V_k(x) \langle f_1(x) \rangle dx, \quad b_k' = \frac{1}{\lambda_k} \int_0^l V_k(x) \langle f_2(x) \rangle dx \tag{5.5}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_0^* = \int_0^l V_0(x) \langle f_2(x) \rangle dx \tag{5.6}$$

$$G_1(\zeta, \tau, x, T) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_k} \sin[\lambda_k (T - \tau)] F_1(\zeta) \times \right.$$
$$\left. \times \langle F_2(\tau) \rangle V_k(x) V_k(\zeta) \right\} + \Phi_1(\zeta, \tau, x, T) \tag{5.7}$$

$$G_2(\zeta, \tau, x, T) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \{\cos[\lambda_k (T - \tau)] F_1(\zeta) \langle F_2(\tau) \rangle V_k(x) V_k(\zeta)\} +$$
$$+ \Phi_2(\zeta, \tau, x, T) \tag{5.8}$$

причем если $A > 0$, то

$$\Phi_1(\zeta, \tau, x, T) = \frac{1}{\alpha \sqrt{A}} F_1(\zeta) \langle F_2(\tau) \rangle V_0(\zeta) V_0(x) \sin\left[\sqrt{A}(T - \tau)\right]$$

$$\Phi_2(\zeta, \tau, x, T) = \frac{1}{\alpha} F_1(\zeta) \langle F_2(\tau) \rangle V_0(\zeta) V_0(x) \cos\left[\sqrt{A}(T - \tau)\right]$$

$$h_1 = a_0' \cos\left(\sqrt{A} T\right), \qquad \rho_1 = b_0' \sin\left(\sqrt{A} T\right) \tag{5.9}$$

$$h_2 = -a_0' \sqrt{A} \sin\left(\sqrt{A} T\right), \qquad \rho_2 = b_0' \sqrt{A} \cos\left(\sqrt{A} T\right) \tag{5.10}$$

если же $A = 0$, то

$$\Phi_1(\zeta, \tau, x, T) = \frac{1}{\alpha} F_1(\zeta) \langle F_2(\tau) \rangle (T - \tau) V_0(\zeta) V_0(x)$$

$$\Phi_2(\zeta, \tau, x, T) = \frac{1}{\alpha} F_1(\zeta) \langle F_2(\tau) \rangle V_0(\zeta) V_0(x) \tag{5.11}$$

$$h_1 = a_0', \quad \rho_1 = b_0^* T, \qquad h_2 = 0, \qquad \rho_2 = 0$$

Итак, решение задачи 2 свелось к исследованию системы (5.1), которая изучалась в пунктах 1—3 данной работы. Согласно этим результатам, оптимальное управление имеет такой вид:

$$U(\zeta, \tau) = \int_0^l \sum_{i=1}^{2} \Psi_i(x) G_i(\zeta, \tau, x, T) dx \tag{5.12}$$

Используя разложение

$$\Psi_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [\Psi_{ik} V_k(x)] \qquad (i = 1, 2) \tag{5.13}$$

оптимальное управление (5.12) можно представить следующим образом:

$$u(\zeta, \tau) = \frac{1}{\alpha} \Xi(\zeta, \tau) + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_k} \Psi_{1k} \sin[\lambda_k (T - \tau)] + \right.$$
$$\left. + \Psi_{2k} \cos[\lambda_k (T - \tau)]\right] F_1(\zeta) \langle F_2(\tau) \rangle V_k(\zeta) \tag{5.14}$$

Здесь

$$\Xi(\zeta, \tau) = F_1(\zeta) \langle F_2(\tau) \rangle V_0(\zeta) \left\{\frac{1}{\sqrt{A}} \Psi_{10} \sin[\sqrt{A}(T - \tau)] + \right.$$
$$\left. + \Psi_{20} \cos[\sqrt{A}(T - \tau)]\right\} \quad \text{при } A > 0 \tag{5.15}$$

$$\Xi(\zeta, \tau) = F_1(\zeta) \langle F_2(\tau) \rangle V_0(\zeta) \{(T - \tau) \Psi_{10} + \Psi_{20}\} \quad \text{при } A = 0 \tag{5.16}$$

Наименьший корень T уравнения

$$\|u\|^2 = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^l \int_0^T \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_k} \Psi_{1k} \sin[\lambda_k (T - \tau)] + \Psi_{2k} \cos[\lambda_k (T - \tau)]\right] \times \right.$$
$$\left. \times F_1(\zeta) \langle F_2(\tau) \rangle V_k(\zeta) + \Xi(\zeta, \tau)\right\}^2 d\zeta\, d\tau \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2} (\Psi_{ik} \gamma_{ik}) = a^2 \tag{5.17}$$

дает время быстродействия. Неизвестные постоянные Ψ_{1k}, Ψ_{2k} ($k = 0, 1, 2, \ldots$) находятся из приведенной ниже системы уравнений, которую можно получить, если в систему (5.1) подставить значения $u(\zeta, \tau)$, описываемого формулой (5.14). В итоге получим, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} \{E_{ik} (A_{ik} \Psi_{1i} + B_{ik} \Psi_{2i})\} = \gamma_{1k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.18}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \{E_{ik} (C_{ik} \Psi_{1i} + D_{ik} \Psi_{2i})\} = \gamma_{2k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.19}$$

Здесь

$$A_{ik} = A_{ki} = \frac{1}{\lambda_k \lambda_i} \int_0^T \langle F_2(\tau) \rangle^2 \sin[\lambda_k (T - \tau)] \sin[\lambda_i (T - \tau)]\, d\tau$$

$$B_{ik} = C_{ki} = \frac{1}{\lambda_k} \int_0^T \langle F_2(\tau) \rangle^2 \sin[\lambda_k (T - \tau)] \cos[\lambda_i (T - \tau)]\, d\tau$$

$$D_{ik} = D_{ki} = \int_0^T \langle F_2(\tau) \rangle^2 \cos[\lambda_k (T - \tau)] \cos[\lambda_i (T - \tau)]\, d\tau$$

$$E_{ik} = E_{ki} = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^l F_1^2(\zeta) V_i(\zeta) V_k(\zeta)\, d\zeta \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Если же $A = 0$, то коэффициенты A_{0k}, B_{0k}, C_{0k}, D_{0k} ($k = 0, 1, 2, \ldots$) имеют несколько иной вид, а именно

$$A_{00} = \int_0^T \langle F_2(\tau)\rangle^2 (T-\tau)^2\, d\tau, \qquad D_{00} = \int_0^T \langle F_2(\tau)\rangle^2\, d\tau$$

$$B_{00} = C_{00} = \int_0^T (T-\tau)\langle F_2(\tau)\rangle^2\, d\tau$$

$$A_{i0} = A_{i0} = \frac{1}{\lambda_i}\int_0^T (T-\tau)\langle F_2(\tau)\rangle^2 \sin[\lambda_i(T-\tau)]\, d\tau$$

$$B_{i0} = \int_0^T (T-\tau)\langle F_2(\tau)\rangle^2 \cos[\lambda_i(T-\tau)]\, d\tau$$

$$C_{i0} = \frac{1}{\lambda_i}\int_0^T \langle F_2(\tau)\rangle^2 \sin[\lambda_i(T-\tau)]\, d\tau$$

$$D_{0i} = D_{i0} = \int_0^T \langle F_2(\tau)\rangle^2 \cos[\lambda_i(T-\tau)]\, d\tau \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Способы решения системы (5.18), (5.19) (при фиксированном значении T) можно, например, найти в работе [10].

Замечание 5. Из формул (5.14) — (5.19) следует, что решение задачи 2 существенно зависит от вида функции $F_1(x)$. Выше приведенные в пункте 5 формулы существенно упрощаются, например в таких случаях:

1) управление распределено по всей оси крыла, т. е.

$$F_1(x) = 1 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

2) управление приложено на двух симметричных относительно середины участка оси крыла, т. е.

$$F_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \leqslant x \leqslant b, \quad l-b \leqslant x \leqslant l-a \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant x < a, \quad b < x < l-b, \quad l-a < x \leqslant l \end{cases}$$

3) управление приложено на центральной части оси крыла, т. е.

$$F_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \leqslant x \leqslant l-a \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant x < a, \quad l-a < x \leqslant l \end{cases}$$

4) заранее задан вид функции $F_1(x)$ вдоль всей оси крыла, причем оптимальное управление ищется в виде функции, зависящей только от t.

Поступила 14 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Бисплингофф Р. Л., Эшли Х., Халфмэн Р. Л. Аэроупругость. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Фын Я. Ц. Введение в теорию аэроупругости. М., Физматгиз, 1961.
3. Пугачев В. С. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.
4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. М., «Наука», 1968.
5. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965.
6. Шилов Г. Е. Математический анализ (специальный курс). М., Физматгиз, 1961.
7. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы (общая теория). М., Изд-во иностр. лит., 1962.
8. Доброленский Ю. П., Иванов В. И., Поспелов Г. С. Автоматика управляемых снарядов. М., Оборонгиз, 1963.
9. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1967.
10. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики, изд. 3, М., «Наука», 1966.