Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

О КЛАССАХ СТРАТЕГИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ УКЛОНЕНИЯ ОТ ВСТРЕЧИ

Н. Н. Барабанова, А. И. Субботин

(Свердловск)

Рассматривается игровая задача о приведении управляемого движения на заданное множество. Исследуются возможности второго игрока (преследуемого) при выборе стратегий из класса разрывных управлений, формируемых по принципу обратной связи. С этой целью введены в рассмотрение множества поглощения, определенные для классов непрерывных, программных и разрывных управлений, и доказано их совпадение. Выяснено, что решение задачи об оптимальном уклонении, которое существует в классе смешанных и аппроксимационных стратегий, может не существовать в классе разрывных стратегий, формализуемых в рамках теории дифференциальных уравнений в контингенциях. Материал данной статьи примыкает к исследованиям [1-7].

1. Пусть управляемое движение описывается уравнением

$$dx / dt = A(t)x + B(t)u - C(t)v \tag{1.1}$$

где x — n-мерный фазовый вектор системы; u и v — векторные управления первого и второго игроков; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — непрерывные матрицы-функции соответствующих размерностей. В фазовом пространстве X_n задано выпуклое, замкнутое множество M, на которое первый игрок стремится привести систему (1.1), а второй, напротив, не заинтересован в осуществлении условия $x[t] \in M$. Предполагается, что реализации управлений игроков стеснены условиями

$$u[t] \in P, \qquad v[t] \in Q \tag{1.2}$$

где P и Q — выпуклые, замкнутые и ограниченные множества в соответствующих векторных пространствах. Будем полагать, что каждому из игроков неизвестно будущее поведение партнера, но известна реализовавшаяся в каждый текущий момент времени t позиция $\{t, x[t]\}$. Начальная позиция $\{t_0, x_0\}$ задана.

В работах [5,6] определены классы смешанных и аппроксимационных стратегий первого и второго игроков. Показано, что классы этих стратегий будут полными. Для класса смешанных стратегий справедлива альтернатива [6], которую в рассматриваемом случае можно сформулировать следующим образом.

Пусть $\{t_0, x_0\}$ — некоторая начальная позиция игры, M — некоторое замкнутое множество в пространстве векторов $\{x\}$. Через $\mathbf{U}^{(c)}$ и $\mathbf{V}^{(c)}$ обозначим классы смешанных стратегий первого и второго игроков. Справедливо одно из следующих двух утверждеий.

(1) Либо существует момент $\vartheta \geqslant t_0$ и существует стратегия $\mathbf{U}_* \in \mathbf{U}^{(c)}$ такая, что, какова бы ни была стратегия $V \in \mathbf{V}^{(c)}$, любое движение $x[t] = x[t;\ t_0,\ x_0,\ U_*,\ V]$ попадает на M не позже, чем в момент $t = \vartheta$.

(2) Либо для любого сколь угодно большого момента времени $\vartheta > t_0$ можно указать число $\varepsilon > 0$ и стратегию $V_* \in \mathbf{V}^{(c)}$ такие, что, какова бы ни была стратегия $U \in \mathbf{U}^{(c)}$, для любого движения $x[t] = x[t;\ t_0,\ x_0,\ U,\ V_*]$ будет выполняться условие $x[t] \notin M^\varepsilon$ при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$.

Здесь $x[t;\ t_0,\ x_0,\ U,\ V]$ — движения, порожденные стратегиями U, V и удовлетворяющие начальному условию $x[t_0] = x_0$; символ M^ε обозначает замкнутую ε-окрестность множества M.

Таким образом, поставленная выше позиционная игровая задача всегда разрешима в классе смешанных стратегий, т. е. либо в классе $\mathbf{U}^{(c)}$ найдется стратегия первого игрока, гарантирующая встречу точки $x[t]$ с множеством M, либо среди стратегий $V \in \mathbf{V}^{(c)}$ существует стратегия уклонения. Аналогичное положение имеет место также и для класса аппроксимационных стратегий [5].

В данной работе рассматриваются более узкие классы стратегий игроков — класс непрерывных стратегий и класс разрывных управлений, формализуемых в рамках аппарата дифференциальных уравнений в контингенциях [8,9]. Показано, что эти классы стратегий не являются полными, т. е. для них неверна сформулированная выше альтернатива. Приведен пример, где существует стратегия уклонения V_*, принадлежащая классу $\mathbf{V}^{(c)}$, которую нельзя аппроксимировать непрерывными стратегиями и разрывными управлениями, определенными в соответствии с аппаратом дифференциальных уравнений в контингенциях.

Опишем рассматриваемые классы стратегий игроков и определим соответствующие им множества поглощения. Исследование соотношений между этими множествами поглощения позволит установить тот факт, что решение задачи об уклонении может не существовать в рассматриваемых классах стратегий. Обозначим через $\mathbf{U}_1$ ($\mathbf{V}_1$) множество программных управлений первого (второго) игрока, т. е. множество произвольных измеримых вектор-функций $u(t)$ ($v(t)$), при почти всех $t \geqslant t_0$ удовлетворяющих ограничениям (1.2).

В качестве второго класса стратегий $\mathbf{U}_2$ ($\mathbf{V}_2$) выберем множество непрерывных вектор-функций $u = u(t,\ x)$ $(v = v(t,\ x))$, при всех $\{t,\ x\}$, удовлетворяющих условию $u(t,\ x) \in P$ $(v(t,\ x) \in Q)$.

Класс стратегий $\mathbf{V}^*$ зададим следующим образом. Пусть $V = V(t,\ x)$ — функция, которая каждой позиции $\{t,\ x\}$ ставит в соответствие замкнутое, выпуклое множество $V(t,\ x) \in Q$, так что при изменении $\{t,\ x\}$ множества $V(t,\ x)$ меняются полунепрерывно сверху по включению, а именно: для любой последовательности $\{t_k,\ x_k\}$, сходящейся к какой-то точке $\{t_*,\ x_*\}$, произвольная сходящаяся последовательность v_k из соответствующих множеств $V(t_k,\ x_k)$ имеет предельной точкой элемент из $V(t_*,\ x_*)$.

В случае, когда первый игрок действует по программе $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$, а второй игрок выбирает управление, руководствуясь стратегией $V = V(t,\ x)$ из класса $\mathbf{V}^*$, под движением $x[t]$ системы (1.1) будем понимать всякую абсолютно непрерывную функцию $x[t]$, которая проходит в момент t_0 через точку x_0 и производная которой почти всюду удовлетворяет условиям

$$dx[t]/dt = A(t)x[t] + B(t)u(t) - C(t)v[t], \qquad v[t] \in V(t, x[t]) \quad (1.3)$$

Существование такой функции $x[t]$ следует из теории дифференциальных уравнений в контингенциях [8,9]. Итак, третий класс стратегий $\mathbf{V}^*$ будут составлять всевозможные функции $V = V(t, x)$ описанного выше вида. Заметим, что этот класс содержит разрывные управления второго игрока $v = v(t, x)$, формируемые по принципу обратной связи; при этом движения, порождаемые такими управлениями, определяются в соответствии с теорией дифференциальных уравнений с разрывной правой частью [8].

Используя введенные выше классы стратегий $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}^*$, построим в фазовом пространстве X_n следующие множества поглощения [5-7].

Множество программного поглощения $W_1(\tau, \vartheta)$ определим как совокупность всех точек $w \in X_n$, каждая из которых обладает свойством: для любого программного управления второго игрока $v(\cdot) \in \mathbf{V}_1$ существует управление первого игрока $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$ такое, что под действием этой пары $\{u(t), v(t)\}$, $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta$, система (1.1) перейдет из состояния $x(\tau) = w$ в состояние $x(\vartheta) \in M$.

Аналогично строится $W_2(\tau, \vartheta)$ — множество точек w из X_n, удовлетворяющих условию: для любого управления второго игрока $v(\cdot) \in \mathbf{V}_2$ можно так подобрать управление первого игрока $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$, что среди решений $x[t]$ системы (1.1), порожденных парой $\{u(t), v(t, x)\}$, найдется движение, выходящее из точки $x[\tau] = w$ и попадающее на M в момент ϑ.

Множество $W^*(\tau, \vartheta)$ определим как совокупность точек $w \in X_n$, таких, что какова бы ни была стратегия $V(\cdot) \in \mathbf{V}^*$, существует управление $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$, которое порождает семейство движений системы (1.1), содержащее траекторию $x[t]$, удовлетворяющую условиям $x[\tau] = w$, $x[\vartheta] \in M$.

В работе [7] показано, что для построенных выше множеств справедливо равенство

$$W_1(\tau, \vartheta) = W_2(\tau, \vartheta) \quad (1.4)$$

В предлагаемой статье будет показано, что

$$W_1(\tau, \vartheta) = W_2(\tau, \vartheta) = W^*(\tau, \vartheta) \quad .$$

Это означает следующее. Если для начальной позиции игры $\{t_0, x_0\}$ справедливо включение $x_0 \in W_1(t_0, \vartheta)$, т. е. второй игрок не может избежать приведения системы (1.1) на множество M в момент ϑ, используя программные управления $v(\cdot) \in \mathbf{V}_1$, то он также не может гарантировать себе непопадание на M выбором стратегий из класса $\mathbf{V}_2$ или $\mathbf{V}^*$. Наоборот, соотношение $x_0 \notin W^*(t_0, \vartheta)$ означает, что для второго игрока можно указать не только стратегию $V_0(\cdot) \in \mathbf{V}^*$, которая гарантирует ему непопадание системы (1.1) на целевое множество M в момент ϑ, но существует также программное управление $v_0(\cdot) \in \mathbf{V}_1$, порождающее в паре с любым $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$ движение системы (1.1) $x[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, удовлетворяющее условиям $x[t_0] = x_0$, $x[\vartheta] \notin M$.

2. *Теорема.* Множества $W_1(\tau, \vartheta)$, $W_2(\tau, \vartheta)$, $W^*(\tau, \vartheta)$ совпадают, т. е.

$$W_1(\tau, \vartheta) = W_2(\tau, \vartheta) = W^*(\tau, \vartheta) \qquad (-\infty < \tau \leqslant \vartheta < \infty) \tag{2.1}$$

Доказательство. Включение $W_2(\tau, \vartheta) \supset W^*(\tau, \vartheta)$ очевидно, так как для классов стратегий $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}^*$ справедливо соотношение $\mathbf{V}_2 \subset \mathbf{V}^*$. Тогда в силу (1.4) имеет место включение $W_1(\tau, \vartheta) \supset W^*(\tau, \vartheta)$.

Покажем, что выполняется и обратное включение $W_1(\tau, \vartheta) \subset W^*(\tau, \vartheta)$. Предположим противное. Пусть существуют τ и ϑ $(-\infty < \tau \leqslant \vartheta < \infty)$ такие, что для соответствующих множеств $W_1(\tau, \vartheta)$ и $W^*(\tau, \vartheta)$ выполняется следующее соотношение:

$$W^*(\tau, \vartheta) \not\supset W_1(\tau, \vartheta) \tag{2.2}$$

т. е. существует точка w_*, для которой выполняются соотношения $w_* \in W_1(\tau, \vartheta)$, $w_* \notin W^*(\tau, \vartheta)$. Это означает следующее. Если в момент τ система (1.1) находится в точке w_*, то по любому программному управлению второго игрока первый игрок всегда может подобрать управление $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$ так, что движение $x[t]$ системы (1.1) из $\{\tau, w_*\}$ под действием этой пары переходит в момент ϑ в точку $x[\vartheta] \in M$. Однако существует такая стратегия второго игрока $V^\circ = V^\circ(t, x)$ из класса $\mathbf{V}^*$, что все движения системы (1.1), порожденные парами $\{u(\cdot), V^\circ(\cdot)\}$ и выходящие из точки $x[\tau] = w_*$ в момент ϑ, не попадают на множество M.

Чтобы получить противоречие, опровергающее (2.2), проведем следующее построение. Каждому элементу $v(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta$ из множества $\mathbf{V}_1$ поставим в соответствие управление $u(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta$, $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$ так, чтобы пара управлений $\{u(\cdot), v(\cdot)\}$ переводила систему (1.1) из состояния $x[\tau] = w_*$ в состояние $x[\vartheta] \in M$. Обозначим множество всех управлений $u(\cdot) \in \mathbf{U}_1$, подобранных таким образом по заданному $v(\cdot) \in \mathbf{V}_1$ через $\mathbf{U}_1(v(\cdot))$. Построенные множества $\mathbf{U}_1(v(\cdot))$ непусты в силу соотношения $w_* \in W_1(\tau, \vartheta)$. Заметим здесь же, что множества $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$, а также $\mathbf{U}_1(v(\cdot))$ ограничены, выпуклы и замкнуты в $L_2[\tau, \vartheta]$ вследствие выпуклости и замкнутости множеств M, P, Q и линейности системы (1.1).

Рассмотрим множество S, состоящее из всевозможных пар $\{u(\cdot), v(\cdot)\}$, где $v(\cdot)$ пробегает множество стратегий $\mathbf{V}_1$, а $u(\cdot)$ выбирается из соответствующих множеств $\mathbf{U}_1(v(\cdot))$. Непустота множества S есть очевидное следствие непустоты множеств $\mathbf{U}_1(v(\cdot))$. Выпуклость S также очевидна.

Введем в рассмотрение банахово пространство $B[\tau, \vartheta]$, элементами которого являются вектор-функции $\{u(t), v(t)\}$, $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta$ с компонентами из $L_2[\tau, \vartheta]$. Норму элемента в $B[\tau, \vartheta]$ определим соотношением

$$\gamma[u, v] = \left(\int_\tau^\vartheta \left[\sum_i u_i^2(t) + \sum_j v_j^2(t)\right] dt\right)^{1/2}$$

Множество S в пространстве $B[\tau, \vartheta]$ ограничено и слабо замкнуто в силу ограниченности и слабой замкнутости множеств $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$ в $L_2[\tau, \vartheta]$ и замкнутости M в фазовом пространстве X_n.

Построим отображение множества S в себя следующим образом. Всякая пара $\{u(\cdot), v(\cdot)\} \in S$ порождает движение системы (1.1) $x[t]$, $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta$, удовлетворяющее условиям: $x[\tau] = w_*$, $x[\vartheta] \in M$. Этому движению указанная выше при разъяснении соотношения (2.2) стратегия $V^\circ = V^\circ(t, x)$ ставит в соответствие множества $V^\circ[t] = V^\circ(t, x[t])$. Таким образом имеется отображение пары $\{u(t), v(t)\}$ из S в совокупность множеств $V^\circ[t]$ $(\tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$. Совокупности множеств $V^\circ[t]$, $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta$, поставим далее в соответствие множество функций $\psi(\cdot) \in L_2[\tau, \vartheta]$, почти всюду на $[\tau, \vartheta]$ удовлетворяющих условию

$$\psi[t] \in V^\circ[t] \tag{2.3}$$

В силу полунепрерывности по $\{t, x\}$ множеств $V^\circ(t, x)$ из теории дифференциальных уравнений в контингенциях [8,9] следует, что множество функций $\psi(\cdot) \in L_2[\tau, \vartheta]$, удовлетворяющих условию (2.3), непусто. Каждой из этих функций $\psi(\cdot)$ подберем функцию $\varphi(\cdot) \in \mathbf{U}_1(\psi(\cdot))$, т. е. таким образом, чтобы пара управлений $\{\varphi(\cdot), \psi(\cdot)\}$ переводила систему (1.1) из состояния $x[\tau] = w_*$ в $x[\vartheta] \in M$. Это можно сделать, так как $w_* \in W_1(\tau, \vartheta)$. Множество всех возможных пар $\{\varphi(\cdot), \psi(\cdot)\}$, поставленное таким образом в соответствие системе множеств $V^\circ[t]$, $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta$, обозначим через Φ. По построению система множеств $V^\circ[t]$, $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta$, отвечает какой-то вполне определенной паре $\{u(\cdot), v(\cdot)\} \in S$, а значит, и множество Φ, соответствующее $V^\circ[\cdot]$, зависит от этой пары. Это обстоятельство мы и отметим тем, что будем писать u и v в качестве аргументов у множества Φ, т. е. $\Phi = \Phi(u, v)$. Заметим попутно тот очевидный факт, что $\Phi(u, v) \subset S$. Итак, построено отображение множества S в себя.

Нашей задачей в дальнейшем будет доказательство существования неподвижной точки этого отображения, а именно такой пары $\{u_*(\cdot), v_*(\cdot)\} \in S$, для которой справедливо соотношение

$$\{u_*(\cdot), v_*(\cdot)\} \in \Phi(u_*, v_*) \tag{2.4}$$

Наличие неподвижной точки будет означать, что, с одной стороны, движение $x_*[t]$, $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta$, системы (1.1), отвечающее паре управлений $\{u_*(\cdot), v_*(\cdot)\}$, удовлетворяет условиям $x[\tau] = w_*$ и $x[\vartheta] \in M$. С другой стороны, это же движение $x_*[\cdot]$ по определению множества $\Phi(u_*, v_*)$ соответствует паре стратегий $\{u_*(\cdot), V^\circ(\cdot)\}$ и поэтому в силу соотношения $w_* \notin W^*(\tau, \vartheta)$ и по определению стратегии $V^\circ(\cdot) \in \mathbf{V}^*$ не должно в момент ϑ попадать на множество M. Таким образом, придем к противоречию с предположением (2.2) и, следовательно, докажем равенство (2.1).

Для доказательства существования неподвижной точки построенного выше отображения воспользуемся теоремой С. Карлина и Х. Ф. Боненбласта ([10], стр. 496). Проверим выполнение ее условий:

1) непустота $\Phi(u, v)$ показана выше;

2) выпуклость $\Phi(u, v)$ есть следствие выпуклости множеств $\mathbf{U}_1$, $V(t, x)$, M и линейности системы (1.1);

3) объединение всех множеств $\Phi(u, v)$ по $\{u(\cdot), v(\cdot)\} \in S$ содержится во множестве S, которое обладает свойством секвенциальной ω-компактности, т. е. в каждой последовательности точек из S содержится подпоследовательность, слабо сходящаяся к некоторой точке этого множества S (это свойство следует из секвенциальной ω-компактности классов $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{V}_1$ и замкнутости M в X_n);

4) покажем полунепрерывность сверху отображения $\{u(\cdot), v(\cdot)\}$ в $\Phi(u, v)$. Возьмем произвольную последовательность точек $\{u_k(\cdot), v_k(\cdot)\}$, слабо сходящуюся к $\{u_*(\cdot), v_*(\cdot)\}$ при $k \to \infty$, а также некоторую последовательность $\{\varphi_k(\cdot), \psi_k(\cdot)\}$

$$\{\varphi_k(\cdot), \psi_k(\cdot)\} \in \Phi(u_k, v_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.5}$$

слабо сходящуюся к $\{\varphi_*(\cdot), \psi_*(\cdot)\}$. Надо показать справедливость включения

$$\{\varphi_*(\cdot), \psi_*(\cdot)\} \in \Phi(u_*, v_*) \tag{2.6}$$

В силу секвенциальной ω-компактности множества S слабые пределы элементов из S также принадлежат этому множеству, т. е. $\{\varphi_*(\cdot), \psi_*(\cdot)\} \in S$. Но тогда из способа построения S и $\Phi(u_*, v_*)$ вытекает, что для доказательства (2.6) остается проверить справедливость включения

$$\psi_*(t) \in V^\circ(t, x_*[t]) = V_*^\circ[t] \tag{2.7}$$

которое должно выполняться при почти всех $t \in [\tau, \vartheta]$. Здесь $x_*[t]$ — движение системы (1.1) под действием пары управлений $\{u_*(\cdot), v_*(\cdot)\}$ на отрезке $[\tau, \vartheta]$ при начальном условии $x[\tau] = w_*$.

Для суммируемой функции $\psi_*(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta$, почти все точки отрезка $[\tau, \vartheta]$ являются точками Лебега, т. е. в них выполняется соотношение

$$\psi_*(t) = \lim \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} \psi_*(\zeta)\, d\zeta \quad \text{при } \Delta \to 0 \tag{2.8}$$

Покажем, что соотношение (2.7) выполняется для функции $\psi_*(\cdot)$ во всех ее точках Лебега, т. е. (2.7) не выполняется разве что на множестве меры нуль.

Пусть $t_* \in [\tau, \vartheta]$ — некоторая точка Лебега функции $\psi_*(\cdot)$. Зададимся некоторым числом $\varepsilon > 0$. Теперь по заданному ε выберем в силу (2.8) число $\Delta_1 > 0$ таким образом, чтобы при всех $\Delta \leqslant \Delta_1$ имело место неравенство

$$\left\| \psi_*(t_*) - \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_*}^{t_*+\Delta} \psi_*(\zeta)\, d\zeta \right\| < \varepsilon \tag{2.9}$$

Из слабой сходимости в пространстве $B[\tau, \vartheta]$ вектор-функций $\{\varphi_k(\cdot), \psi_k(\cdot)\}$ следует слабая сходимость в $L_2[\tau, \vartheta]$ их компонент. Поэтому из сходимости последовательности $\{\varphi_k(\cdot), \psi_k(\cdot)\}$ к точке $\{\varphi_*(\cdot), \psi_*(\cdot)\}$ вытекает сходимость в слабой топологии пространств $L_2[\tau, \vartheta]$ последовательностей $\{\varphi_k(\cdot)\}$ и $\{\psi_k(\cdot)\}$ к точкам $\varphi_*(\cdot)$ и $\psi_*(\cdot)$ соответственно.

При почти всех $t \in [\tau, \vartheta]$ для функций $\psi_k(t)$ справедливы соотношения

$$\psi_k(t) \in V^\circ(t, x_k[t]) = V_k^\circ[t]$$

где $x_k[t]$ — движения системы (1.1) из начального состояния $x_k[\tau] = w_*$, порожденные управлениями $\{u_k(\cdot), v_k(\cdot)\}$. Заметим, что при каждом $t \in [\tau, \vartheta]$ последовательность $\{x_k[t]\}$ сходится к $x_*[t]$, где $x_*[t]$, $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta$ — траектория системы (1.1), отвечающая паре $\{u_*(\cdot), v_*(\cdot)\}$ и начальному условию $x_*[\tau] = w_*$.

Кроме того, множество этих траекторий равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, поэтому из последовательности $\{x_k[\cdot]\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $x_*[\cdot]$ равномерно. В дальнейшем, чтобы не усложнять обозначений, будем считать последовательность $\{x_k[\cdot]\}$ равномерно сходящейся к $x_*[\cdot]$. Используя это свойство, а также полунепрерывность сверху $V^\circ(t, x)$ по совокупности $\{t, x\}$, можно для выбранных выше t_* и $\varepsilon > 0$ найти такое число $\Delta_2 > 0$ и такой номер K_1, что для всех t, $|t - t_*| \leqslant \Delta_2$ и $k \geqslant K_1$ выполнится включение

$$V_k^\circ[t] \subset V_*^{\circ(\varepsilon)}[t_*] \tag{2.10}$$

где $V_*^{\circ(\varepsilon)}$ — выпуклая, замкнутая ε-окрестность множества V°_*.

Введем в рассмотрение следующие вспомогательные функции на $[t_*, \vartheta]$:

$$y_k(t) = \int\limits_{t_*}^{t} \psi_k(\zeta)\, d\zeta, \qquad y_*(t) = \int\limits_{t_*}^{t} \psi_*(\zeta)\, d\zeta$$

Последовательность $y_k(t)$ сходится к $y_*(t)$ при $k \to \infty$ поточечно на $[t_*, \vartheta]$. Легко показать, что множество этих абсолютно непрерывных функций равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, а значит, можно из последовательности $y_k(\cdot)$ выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к $y_*(\cdot)$ при $k \to \infty$. Снова, в целях упрощения записи, не станем переобозначать выделенную подпоследовательность, а будем полагать в дальнейших рассуждениях, что с самого начала имеет место свойство: из слабой сходимости $\psi_k(\cdot)$ к $\psi_*(\cdot)$ следует равномерная сходимость $y_k(\cdot)$ к $y_*(\cdot)$. Но тогда по ε и $\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2\}$ можно выбрать число $K_2 \geqslant K_1$ так, чтобы при всех $k \geqslant K_2$ и для всех $t \in [t_*, \vartheta]$ имело место

$$\| y_k(t) - y_*(t) \| \leqslant {}^1\!/_2\, \varepsilon\Delta \tag{2.11}$$

Теперь при любых $k \geqslant K_2$ и $\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2\}$ справедливы в силу (2.9) и (2.11) следующие оценки:

$$\left\| \psi_*(t_*) - \frac{1}{\Delta} \int_{t_*}^{t_*+\Delta} \psi_k(\zeta)\, d\zeta \right\| = \left\| \psi_*(t_*) - \frac{y_k(t_*+\Delta) - y_k(t_*)}{\Delta} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \psi_*(t_*) - \frac{1}{\Delta} \int_{t_*}^{t_*+\Delta} \psi_*(\zeta)\, d\zeta \right\| + \left\| \frac{y_*(t_*+\Delta) - y_k(t_*+\Delta)}{\Delta} \right\| +$$

$$+ \left\| \frac{y_*(t_*) - y_k(t_*)}{\Delta} \right\| \leqslant 2\varepsilon \tag{2.12}$$

Причем при почти всех ζ, $|\zeta - t_*| \leqslant \Delta \leqslant \Delta_1$ и при $k \geqslant K_2 \geqslant K_1$ имеет место (2.10). Следовательно, в силу выпуклости множества $V_*^\circ [t_*]$ справедливо включение

$$\frac{1}{\Delta} \int_{t_*}^{t_*+\Delta} \varphi_k(\zeta)\, d\zeta \in V_*^{\circ(\varepsilon)} [t_*]$$

Отсюда в силу (2.12) вытекает

$$\psi_*(t_*) \in V_*^{\circ(3\varepsilon)} [t_*] \tag{2.13}$$

В проведенных рассуждениях ε и t_* были выбраны произвольно; следовательно, из условия (2.13) вытекает справедливость включения (2.7) почти всюду на $[\tau, \vartheta]$, что и требовалось доказать.

Итак, все условия теоремы существования неподвижной точки выполнены и тем самым исходное утверждение (2.1) доказано.

3. Совпадение множеств поглощения $W_1(\tau, \vartheta)$, $W_2(\tau, \vartheta)$ и $W^*(\tau, \vartheta)$ означает, что решение задачи об уклонении, вообще говоря, может не существовать в классе непрерывных стратегий $v = v(t, x)$ и в классе разрывных стратегий $V = V(t, x)$, формализуемых в рамках теории дифференциальных уравнений в контингенциях. В качестве примера, иллюстрирующего этот факт, здесь, как и в работе [7], можно привести задачу преследования безынерционной точки материальной точкой.

Обозначим через y двумерный вектор, компонентами которого являются разности соответствующих координат материальной и безынерционной точек, а через z — вектор скорости материальной точки. Получим следующие уравнения движения:

$$dy_1 / dt = z_1 - v_1, \quad dz_1 / dt = u_1; \qquad dy_2 / dt = z_2 - v_2, \quad dz_2 / dt = u_2 \tag{3.1}$$

где управления удовлетворяют неравенствам

$$u_1^2 + u_2^2 \leqslant \mu^2, \qquad v_1^2 + v_2^2 \leqslant \nu^2$$

Множество M задается условием $y_1 = y_2 = 0$.

Известно [1], что в данной задаче при любой начальной позиции игры $x[t_0] = \{y[t_0], z[t_0]\} = x_0$ существует момент программного поглощения $\vartheta^\circ(x_0)$, т. е. существует наименьшее значение параметра $\vartheta = \vartheta^\circ(x_0)$, для которого выполняется включение

$$x_0 \in W_1(t_0, \vartheta) \tag{3.2}$$

Из доказанных выше равенств (2.1), из включения (3.2) и из определения множеств $W_1(t, \vartheta)$, $W_2(t, \vartheta)$, $W^*(t, \vartheta)$ вытекает, что при выборе вторым игроком любой стратегии из класса $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ или $\mathbf{V}^*$ нельзя избежать встречи на промежутке времени $[t_0, \vartheta^\circ(x_0)]$. Известно также [3,7], что в данной задаче существуют способы формирования управления второго игрока, которые гарантируют уклонение от попадания на M на сколь угодно большом промежутке времени. Такой стратегией, например, является смешанная стратегия $V^e = V^e(t, x)$, экстремальная к некоторой системе сильно v-стабильных множеств [5]

$$S(t, \vartheta_*), \quad S(t, \vartheta_*) \cap M = \varnothing, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta_* \tag{3.3}$$

Здесь число ϑ_* можно выбрать сколь угодно большим, в частности можно полагать, что $\vartheta_* > \vartheta^\circ(x_0)$.

Таким образом, в рассматриваемом примере стратегия уклонения V содержится в классе смешанных стратегий, но не принадлежит классу стратегий $\mathbf{V}^*$. Заметим, что из соотношений $V^e \in \mathbf{V}^{(c)}$, $V^e \notin \mathbf{V}^*$ вытекает существование участков негладкой вогнутой границы у сильно v-стабильных множеств $S(t, \vartheta_*)$ (3.3). Действительно, если бы множества $S(t, \vartheta_*)$ (3.3) не имели участков негладкой вогнутой границы, то экстремальная стратегия V^e принадлежала бы классу $\mathbf{V}^*$. (Справедливость последнего утверждения непосредственно вытекает из соотношений, задающих функцию $V^e = V^e(t, x)$ [5]).

Приведенный пример показывает, что решение задачи об уклонении может существовать лишь в полных классах смешанных или аппроксимационных стратегий и не содержится в классах $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}^*$. Это обстоятельство следует учитывать при построении стратегий, устойчивых к ошибкам измерения текущей позиции игры $p[t] = \{t, x[t]\}$. Можно показать, что в дискретной схеме, реализующей такие стратегии, шаг формирования кусочно-постоянных управлений следует выбирать не меньше некоторого положительного числа, определяемого величиной допустимых ошибок измерения.

Авторы благодарят Н. Н. Красовского за постановку задачи и помощь в работе.

Поступила 3 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
3. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого. Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 4.
4. Пшеничный Б. Н. Структура дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. О структуре дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 3.
6. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
7. Барабанова Н. Н., Субботин А. И. О непрерывных стратегиях уклонения в игровых задачах о встрече движений. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
8. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960, т. 51 (93), № 1.
9. Cellina A. Multivalued Differential Equations and Ordinary Differential Equations. SIAM J. Appl. Math., 1970, vol. 18, No. 2.
10. Бесконечные антагонистические игры. М., Физматгиз, 1963.