

Граничные точки этого эллипса соответствуют только функциям вида

$$T_0(t) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{g_1(t)}{g(t)} \frac{l \cos \alpha}{\sqrt{B_{11}}} [2R^2(3r^2 + R^2) - \\ - 2Rr(r^2 + 3R^2) \cos(\theta - t)] + \frac{1}{4\pi r^2} \frac{g_2(t)}{g(t)} \frac{(R^2 - r^2) l \sin \alpha}{\sqrt{B_{22}}} [3r^2 + \\ + R^2 - 4Rr \cos(\theta - t)] \\ N_0(t) = - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{g_2(t)}{g(t)} \frac{l \cos \alpha}{\sqrt{B_{11}}} (R^2 - r^2)^2 + \\ + \frac{1}{4\pi r^2} \frac{g_1(t)}{g(t)} \frac{l \sin \alpha}{\sqrt{B_{22}}} 2r(R^2 - r^2) [R \cos(\theta - t) - r].$$

Эти функции реализуют максимум R_0 при $\alpha = 0$ и максимум R_p при $\alpha = 1/2 \pi$.

Поступила 21 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. К о л о с о в Г. В. Применение функций комплексных переменных диаграмм к теории упругости. Л.—М., гл. ред. общ. техн. дисциплин, 1935.
3. Функциональный анализ (под ред. С. Г. Крейна, Справочн. матем. библиотека). М., «Наука», 1964.

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ, В ЧАСТНОСТИ, ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

В. А. Штейнберг

(Москва)

Получены критерии стационарной и колебательной неустойчивости плоского горизонтального слоя бинарной смеси, ограниченного твердыми поверхностями. Результаты счета методом Бубнова — Галеркина приведены в виде диаграмм устойчивости. Показано, что учет градиента давления в равновесии для бинарной смеси изменяет критерии возникновения конвекции, особенно при нулевом диффузионном потоке.

Учет эффектов, связанных с градиентом давления в равновесии, вблизи линии критических точек смешения бинарной смеси дает новый критерий устойчивости, аналогичный критерию Шварцшильда в чистой жидкости.

1. Условия возникновения конвекции в смеси с неоднородным распределением температуры и концентрации существенно отличаются от случая чистой жидкости. Как было показано в [1] на примере устойчивости плоского вертикального слоя, в смеси возможны два вида неустойчивости — относительно монотонного и колебательного возмущений. Этот вывод подтверждается в [2,3]. Во всех этих работах простая форма области или соответствующие граничные условия позволяют точно решить нестационарные уравнения малых возмущений.

Рассмотрим устойчивость механического равновесия плоского горизонтального слоя смеси, ограниченного твердыми поверхностями. При этом принимаем градиенты температуры и концентрации постоянными и вертикальными

$$\nabla T_0 = -A_0 \gamma, \quad \nabla C_0 = -B_0 \gamma \quad (1.1)$$

Здесь γ — единичный вектор, направленный вертикально вверх — вдоль оси z . Исключая из обезразмеренных уравнений конвекции смеси с учетом термодиффузии и диффузионной теплопроводности [4] давление и горизонтальные компоненты скорости и рассматривая (из-за неограниченности задачи в горизонтальных направлениях) зависимость от горизонтальных координат в виде e^{ikr} , где k — двумерный волновой вектор в плоскости xy , получим уравнения для амплитуд вертикальной скорости $V_z \equiv f(z, t)$, температуры $T' \equiv \tau(z, t)$ и концентрации $C' \equiv \xi(z, t)$

$$\begin{aligned} (D^2 - k^2) \frac{\partial f}{\partial t} &= (D^2 - k^2)^2 f - R_T k^2 \tau - R_c k^2 \xi \\ P_T \frac{\partial \tau}{\partial t} &= f + (1 + a_1) (D^2 - k^2) \tau + a_2 (D^2 - k^2) \xi \\ P_c \frac{\partial \xi}{\partial t} &= f + \frac{a_1}{a_2} (D^2 - k^2) \tau + (D^2 - k^2) \xi \quad \left(D \equiv \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

В качестве единиц длины выбрана высота слоя l , времени l^2/ν ; скорости κ/l , температуры $A_0 l$ и концентрации $B_0 \lambda \kappa / D$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{N \lambda^2 D}{\kappa}, \quad a_2 = \frac{N \lambda B_0}{A_0}, \quad P_T = \frac{\nu}{\kappa}, \quad P_c = \frac{\nu}{D}, \quad R_T = \frac{A_0 \beta_1 g l^4}{\nu \kappa} \\ R_c &= \frac{B_0 \beta_2 g l^4}{\nu D}, \quad \lambda = \frac{k_T}{T}, \quad N = \frac{T (\partial \mu / \partial c)_{p,T}}{c_p}, \quad \beta_1 = - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p,c} \\ \beta_2 &= - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_{p,T} \end{aligned}$$

Здесь P_T и P_c — числа Прандтля и Шмидта; R_T и R_c — температурное и диффузионное числа Рэлея; κ , D и $k_T D$ — коэффициенты теплопроводности, диффузии и термодиффузии; N — термодинамический коэффициент; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; μ — химический потенциал; β_1 и β_2 — коэффициенты теплового и концентрационного расширения.

Граничные условия на твердых поверхностях имеют вид

$$f = Df = \tau = \xi = 0 \quad \text{при } z = \pm 1/2 \quad (1.3)$$

Считая, что решения системы уравнений (1.2) зависят от времени по закону $e^{\sigma t}$, доумножаем каждое из уравнений на $f(z)$, $\tau(z)$ и $\xi(z)$ соответственно и интегрируем в пределах $(-1/2; 1/2)$. В результате получаем систему алгебраических линейных однородных уравнений для амплитуд возмущений. Приравнявая нулю определитель этой системы, получаем характеристическое уравнение для декремента σ

$$\sigma^3 + S_1 \sigma^2 + S_2 \sigma + S_3 = 0 \quad (1.4)$$

где коэффициенты S_1 , S_2 и S_3 выражаются через параметры задачи. Из теории алгебраических уравнений известно [5], что границей существования только действительных отрицательных корней многочлена (1.4) является

$$S_3 = 0 \quad (1.5)$$

а условием существования пары чисто мнимых корней (т. е. условие нейтральной колебательной неустойчивости) [5]

$$S_3 > 0, \quad S_1 S_2 - S_3 = 0 \quad (1.6)$$

Характерная частота нейтральных колебаний при этом равна

$$\omega^2 = S_2 \quad (1.7)$$

Из условий (1.5) и (1.6) получаем соотношения для критериев R_T и R_c в случае стационарной и колебательной неустойчивости (индексы (s) и (0) означают критерии

стационарной и колебательной неустойчивости соответственно)

$$\begin{aligned}
 (1 + \alpha) R_T^{(s)} + (1 + a_1 + a_1/\alpha) R_C^{(s)} &= \gamma_0 \quad (\alpha = -\lambda\beta_2/\beta_1) \\
 P_c [\gamma P_T P_c + (1 + a_1) P_c - \alpha P_T] R_T^{(0)} + P_T [\gamma P_T P_c + P_c - a_1 P_c/\alpha] R_C^{(0)} &= \\
 = \gamma_1^{-1} [P_T + (1 + a_1) P_c] [(1 + \gamma P_c)(1 + \gamma P_T) + \gamma a_1 P_c] & \quad (1.8) \\
 \gamma_0 = \frac{[f, (D^2 - k^2)^2 f]}{[f, \tau_k]}, \quad \gamma = -\frac{[f, (D^2 - k^2)^2 f] [\tau_k, \tau_k]}{k^2 [f, \tau_k] [f, (D^2 - k^2) f]} \\
 \gamma_1 = -\frac{[\tau_k, \tau_k]}{k^2 [f, (D^2 - k^2) f]}, \quad \tau = \frac{(1 - a_2) \tau_k}{k^2}, \quad [uv] \equiv \int_{-1/2}^{1/2} uv dz
 \end{aligned}$$

На плоскости $R_T R_C$ прямые из (1.8) пересекаются в точке с координатами

$$\begin{aligned}
 R_T^* &= -\gamma_1^{-1} \frac{[1 + \gamma P_T + \gamma(1 + a_1) P_c] a_1/\alpha + [(1 + a_1)(1 + \gamma P_c + \gamma a_1 P_c) + \gamma a_1 P_T]}{P_T(1 + \alpha) - P_c(1 + a_1 + a_1/\alpha)} \\
 R_C^* &= \gamma_1^{-1} \frac{(1 + \gamma P_T + \gamma a_1 P_c) + \alpha [1 + \gamma P_T + (1 + a_1) \gamma P_c]}{P_T(1 + \alpha) - P_c(1 + a_1 + a_1/\alpha)} \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

Частота нейтральных колебаний определяется выражением через $R_T^{(0)}$ и R_T^*

$$\omega^2 = \left(\frac{[f, \tau_k] k^2}{[\tau_k, \tau_k]} \right)^2 \gamma_1 \frac{(1 + a_1 + a_1/\alpha) P_c - (1 + \alpha) P_T}{P_T (\gamma P_c P_T + P_T - P_c a_1/\alpha)} (R_T^{(0)} - R_T^*) \quad (1.10)$$

(аналогично через $R_C^{(0)}$ и R_C^*).

До этого момента при анализе и выводе всех результатов использовалось точное решение, если считать функции f , τ и ξ точными решениями системы уравнений (1.2).

Условия устойчивости (1.8) определяют при заданных физических константах и параметрах P_T , P_c , a_1 , a_2 и R_c стационарное и колебательное числа Рэля R_T как функции волнового числа k .

Чтобы определить минимальное значение $R_T(k_0)$, которое и представляет собой соответствующий критерий конвективной неустойчивости, а значение k_0 — периодичность в горизонтальной плоскости, необходимо вычислить значения интегралов¹. Для приближенного вычисления воспользуемся методом Бубнова — Галеркина, применяя одни и те же аппроксимирующие функции как для стационарной, так и колебательной неустойчивости.

В общем случае в выражения для критериев (1.8) входят много параметров, что усложняет анализ и счет, поэтому рассмотрим только некоторые частные случаи.

2. Пренебрежем в уравнениях конвекции бинарной смеси перекрестными эффектами термодиффузии и диффузионной теплопроводности ($\lambda = 0$). Тогда условия монотонной и колебательной неустойчивости запишутся в виде

$$R_T^{(s)} + R_C^{(s)} = \gamma_0 \quad (2.1)$$

$$P_c^2 (1 + \gamma_T P_T) R_T^{(0)} + P_T^2 (1 + \gamma P_c) R_C^{(0)} = \gamma_1^{-1} (P_T + P_c) (1 + \gamma P_c) (1 + \gamma P_T)$$

Координаты точки бифуркации на плоскости $R_T R_C$ равны

$$R_T^* = -\gamma_1^{-1} \frac{1 + \gamma P_c}{P_T - P_c}, \quad R_C^* = \gamma_1^{-1} \frac{1 + \gamma P_c}{P_T - P_c} \quad (2.2)$$

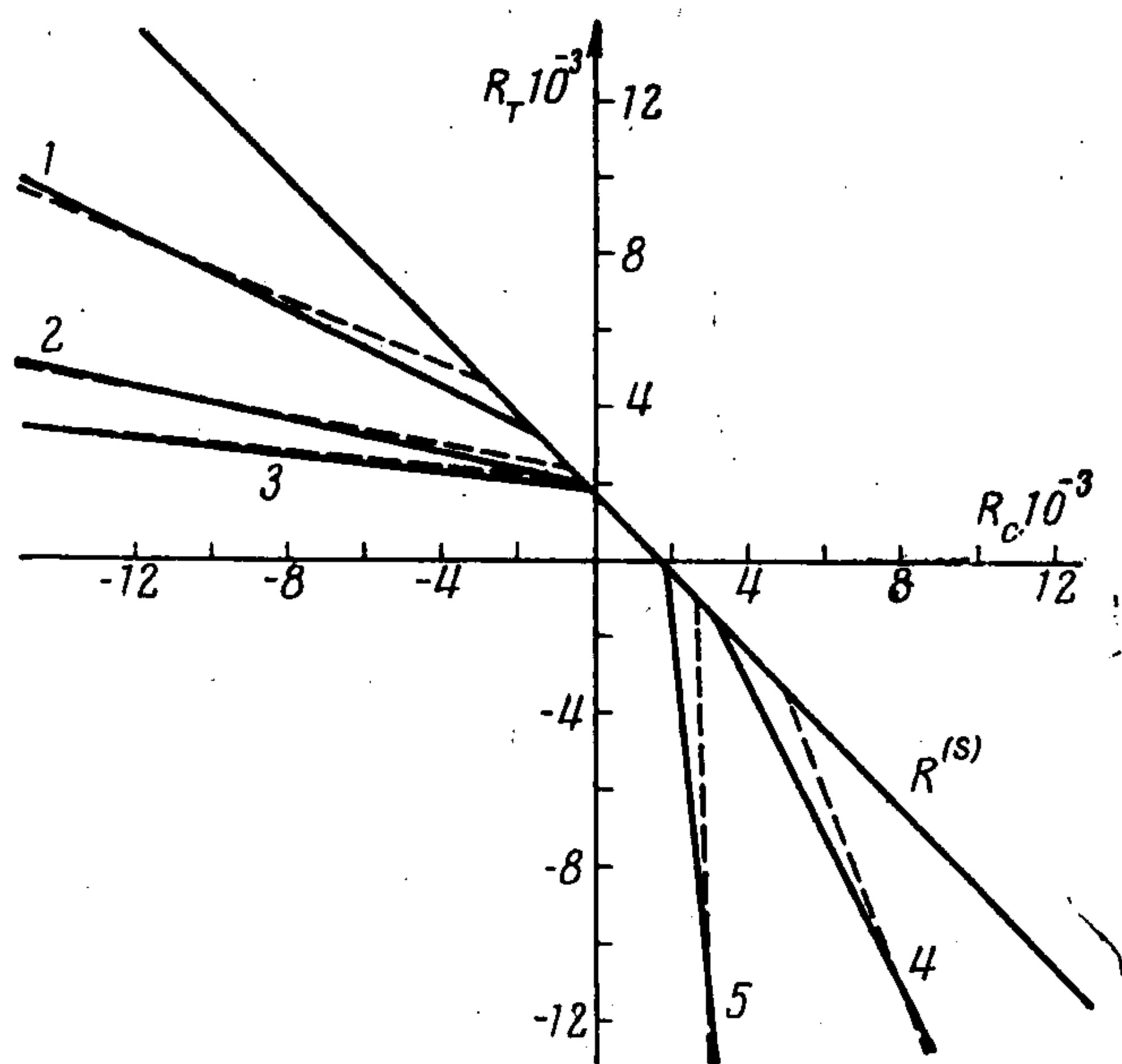
и частота нейтральных колебаний определяется из

$$\omega^2 = \left(\frac{[f, \tau_k] k^2}{[\tau_k, \tau_k]} \right)^2 \frac{1}{P_T^2} \left\{ \frac{R_T^{(0)}}{R_T^*} - 1 \right\} \quad (2.3)$$

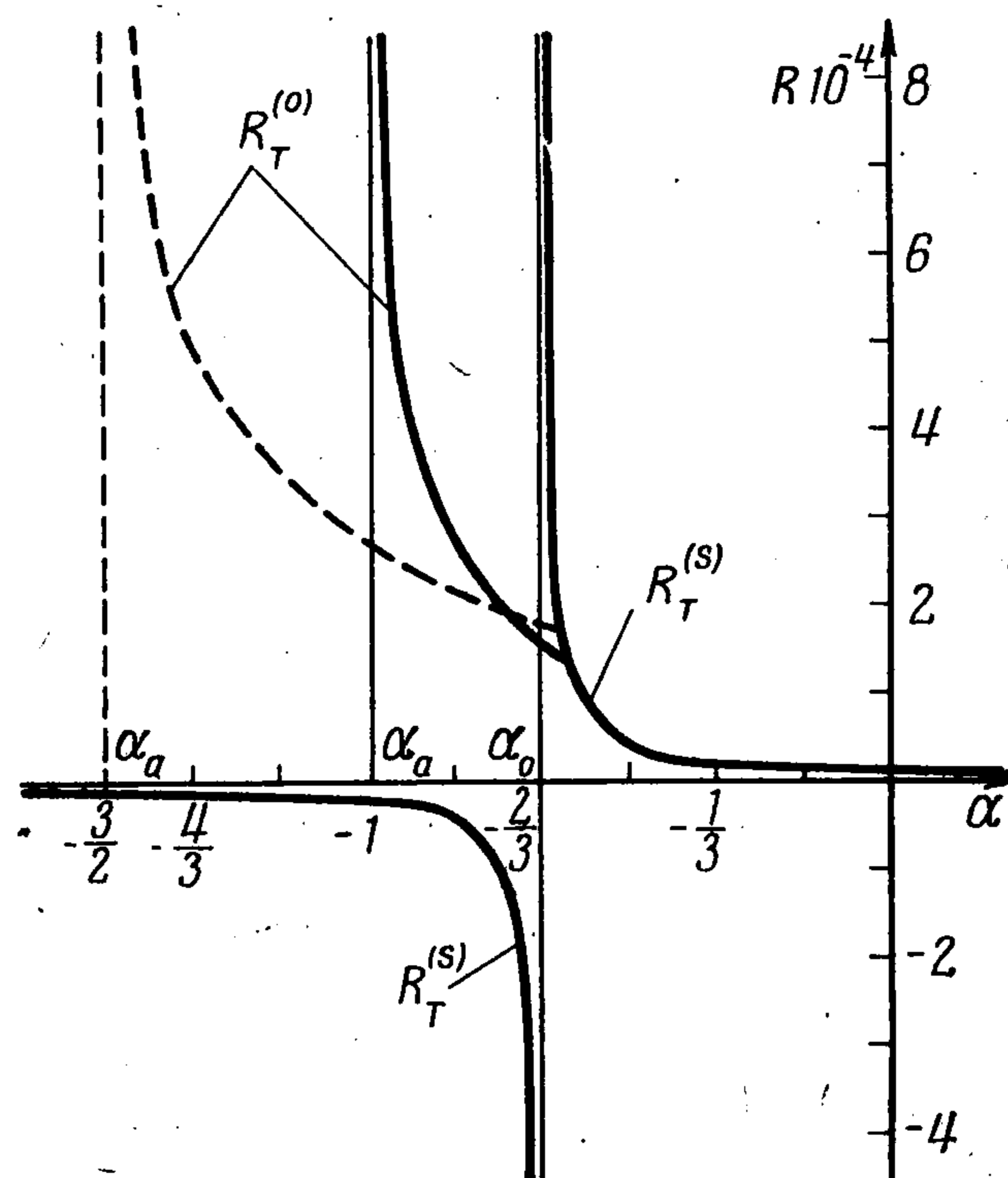
¹ Очевидно, можно считать заданным R_T , а определять критическое значение диффузионного числа Рэля R_c .

Результаты вычислений при различных значениях отношения $P_c / P_T = \kappa / D$ представлены на фиг. 1; прямые 1—5 — ветви колебательной неустойчивости при $P_c = 2; 5; 10; 05; 01$ соответственно (при этом $P_T = 1$). Из графиков видно, что приведенные диаграммы устойчивости аналогичны полученным в [1]. Методика и анализ счета приведены в приложении.

3. До сих пор предполагалось, что постоянные градиенты температуры A_0 и концентрации B_0 , определяющие тепловой q и диффузионный j потоки, задаются независимо. Однако в эксперименте чаще всего как раз осуществляется другая ситуация, когда $j = 0$. В этом случае градиенты A_0 и B_0



Фиг. 1



Фиг. 2

оказываются связанными (тепловой поток q при этом отличен от нуля и определяется условиями подогрева)

$$P_T R_c = \alpha R_T P_c \quad (\text{или } \lambda A_0 = -B_0) \quad (3.1)$$

Тогда критические числа Рэлея при монотонной и колебательной неустойчивости получаются

$$R_T^{(s)} = \gamma_0 \frac{P_T}{(P_T + a_1 P_c) + \alpha [P_T + (1 + a_1) P_c]} \quad (3.2)$$

$$R_T^{(0)} = \gamma_1^{-1} \frac{P_T + (1 + a_1) P_c}{P_c^2 [1 + \gamma (1 + \alpha) P_T]} [(1 + \gamma P_c)(1 + \gamma P_T) + \gamma a_1 P_c]$$

На фиг. 2 $R_T^{(s)}$ и $R_T^{(0)}$ изображены как функции параметра термодиффузии α при постоянных P_T, P_c, a_1 ($P_T = P_c = a_1 = 1$). Кривые $R_T^{(s)}$ и $R_T^{(0)}$ пересекаются при $\alpha = \alpha^*$ и равном

$$\alpha^* = - \frac{(P_T + a_1 P_c)(1 + \gamma P_T + \gamma a_1 P_c) + \gamma a_1 P_c^2}{[P_T + (1 + a_1) P_c](1 + \gamma P_T + \gamma a_1 P_c) + \gamma (1 + a_1) P_c^2} \quad (3.3)$$

Частота нейтральных колебаний

$$\omega^2 = \left(\frac{[f, \tau_k] k^2}{[\tau_k, \tau_k]} \right)^2 \frac{[P_T + (1 + a_1) P_c](1 + \gamma P_T + \gamma a_1 P_c) + \gamma (1 + a_1) P_c^2}{P_c^2 P_T [1 + \gamma (1 + \alpha) P_T]} (\alpha^* - \alpha) \quad (3.4)$$

обращается в нуль в точке бифуркации (3.3).

Из (3.2) видно, что вертикальные прямые

$$\alpha = \alpha_0, \quad \alpha = \alpha_a \quad \left(\alpha_0 = -\frac{P_T + a_1 P_c}{P_T + (1 + a_1) P_c}, \quad \alpha_a = -\left(1 + \frac{1}{\gamma P_T}\right) \right) \quad (3.5)$$

будут асимптотами: первая — двух ветвей гиперболы, определяющих монотонную неустойчивость (другой асимптотой является ось абсцисс); вторая — ветви колебательной неустойчивости, т. е. колебательная ветвь ограничена с двух сторон точкой бифуркации α^* и асимптотой $\alpha = \alpha_a$.

Неустойчивость относительно монотонных возмущений определяется двумя ветвями и возможна как при подогреве снизу, так и при подогреве сверху:

при $\alpha > \alpha_0$ — верхняя ветвь, $R_T^{(s)} > 0$ (подогрев снизу)

при $\alpha < \alpha_0$ — нижняя ветвь, $R_T^{(s)} < 0$ (подогрев сверху)

Анализ расчета приведен в приложении.

4. Одним из предположений, принимаемых при выводе уравнений (1.2), является предположение о малости градиентов давления в бинарной смеси. Однако, как будет указано ниже, имеют место случаи, когда это предположение неприемлемо, и эффекты, связанные с градиентом давления, становятся одного порядка с эффектами, вызванными градиентами температуры и концентрации.

Тогда уравнения конвекции в бинарной смеси с учетом градиента давления только в равновесии в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= -\nabla p' + \Delta \mathbf{V} + (R_T T' + R_c C') \mathbf{V} + \left(\frac{\xi}{\nu} + \frac{1}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{V} \\ P_T \frac{\partial T'}{\partial t} &= (1 - \chi_0) \mathbf{V} \mathbf{V} + (1 + a_1) \Delta T' + a_2 \Delta C' \\ P_c \frac{\partial C'}{\partial t} &= \mathbf{V} \mathbf{V} + \frac{a_1}{a_2} \Delta T' + \Delta C' \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = -l(L_1 + L_2 + L_3) \mathbf{V} \mathbf{V} + lL_1 P_T \frac{\partial T'}{\partial t} + lL_3 P_c \frac{\partial C'}{\partial t}$$

$$\left(\chi_0 = \frac{\beta_1 T g}{A_0 c_p} = \frac{L_2}{L_1} \left(1 - \frac{c_v}{c_p} \right), \quad L_1 = \beta_1 A_0, \quad L_2 = g \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, c}, \quad L_3 = \beta_2 B_0 \right)$$

Здесь, как и в уравнениях конвекции сжимаемой чистой жидкости, появился критерий Шварцшильда χ_0 и, кроме того, три новых параметра lL_1 , lL_2 и lL_3 , характеризующих тепловое расширение, сжимаемость и расширение бинарной смеси из-за изменения концентрации.

Произведя преобразование и воспользовавшись вариационным методом аналогично сделанному выше, получим систему уравнений, исследование на устойчивость которой методом Рауса — Гурвица дает в общем случае условие монотонной и колебательной неустойчивости¹

$$\begin{aligned} (1 + \alpha - \chi_0) R_T^{(s)} + (1 + a_1 + a_1/\alpha) R_c^{(s)} &= \gamma_0 \\ P_c [\gamma P_c P_T + (1 + a_1) P_c - \alpha P_T - \chi_0 P_c (1 + a_1 + \gamma P_T)] R_T^{(0)} + \\ + P_T [\gamma P_c P_T + P_T - a_1 P_c / \alpha] R_c^{(0)} &= \\ = \gamma_1^{-1} [P_T + (1 + a_1) P_c] [(1 + \gamma P_c)(1 + \gamma P_T) + a_1 P_c] & \end{aligned} \quad (4.2)$$

¹ Появляющиеся в уравнении движения нечетные по z слагаемые малы в силу малости параметров L_1 , L_2 , L_3 . В дальнейшем нас интересуют только те физические параметры, которые имеют особенности вблизи критической линии растворения, а β_1 , β_2 и $(\partial \rho / \partial p)_{T, c}$ не имеют особенностей. Это в результате соответствует учету сжимаемости только в уравнении теплопроводности.

Рассмотрим далее тот наиболее интересный для эксперимента случай, когда градиенты температуры A_0 и концентрации B_0 связаны в равновесии условием $\mathbf{j} = 0$ с учетом градиента давления

$$B_0 + \lambda A_0 = -g\beta_2 / \mu_c \quad (\mu_c \equiv (\partial\mu / \partial c)_{p,T})$$

или в безразмерном виде (4.3)

$$P_T R_c = \alpha P_c R_T - \varepsilon P_T, \quad \varepsilon = \frac{(g\beta_2 l^2)^2}{\nu D \mu_c}$$

Выражения для критических чисел Рэлея при монотонных и колебательных возмущениях в этом случае имеют вид

$$R_T^{(s)} = P_T \frac{\gamma_0 + \varepsilon(1 + a_1 + a_1/\alpha)}{[(1 - \chi_0)P_T + a_1 P_c] + \alpha [P_T + (1 + a_1)P_c]}$$

$$R_T^{(0)} = \frac{1}{\gamma_1 P_c^2 F} \{ [P_T + (1 + a_1)P_c] [(1 + \gamma P_c)(1 + \gamma P_T) + \gamma a_1 P_c] + \varepsilon P_T (\gamma P_c P_T + P_T - a_1 P_c / \alpha) \}$$

$$F = [1 + (1 + \alpha)\gamma P_T] - \chi_0(1 + a_1 + \gamma P_T)$$
(4.4)

Частота нейтральных колебаний равна

$$\omega^2 = \left(\frac{[f, \tau_k] k^2}{[\tau_k, \tau_k]} \right)^2 \frac{(\alpha_1^* - \alpha)(\alpha_2^* - \alpha)}{P_T P_c^2 \alpha F}$$
(4.5)

Здесь α_1^* и α_2^* — точки бифуркации

$$\alpha_{1,2}^* = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4n\varepsilon\gamma_1 P_T P_c a_1}}{2n}$$

$$m = (1 - \chi_0) \{ [P_T + (1 + a_1)P_c] [\gamma_1 \varepsilon P_T - 1 - \gamma(P_T + a_1 P_c)] + P_c(1 + \gamma P_T) \} + \chi_0 \{ \gamma_1 \varepsilon P_T^2 (1 - \gamma P_c) - a_1 P_c [1 + \gamma P_T + \gamma(1 + a_1)P_c] \}$$

$$n = \gamma_1 \varepsilon P_T^2 - \gamma [P_T + (1 + a_1)P_c]^2 - [P_T + (1 + a_1)P_c - \gamma P_c P_T]$$
(4.6)

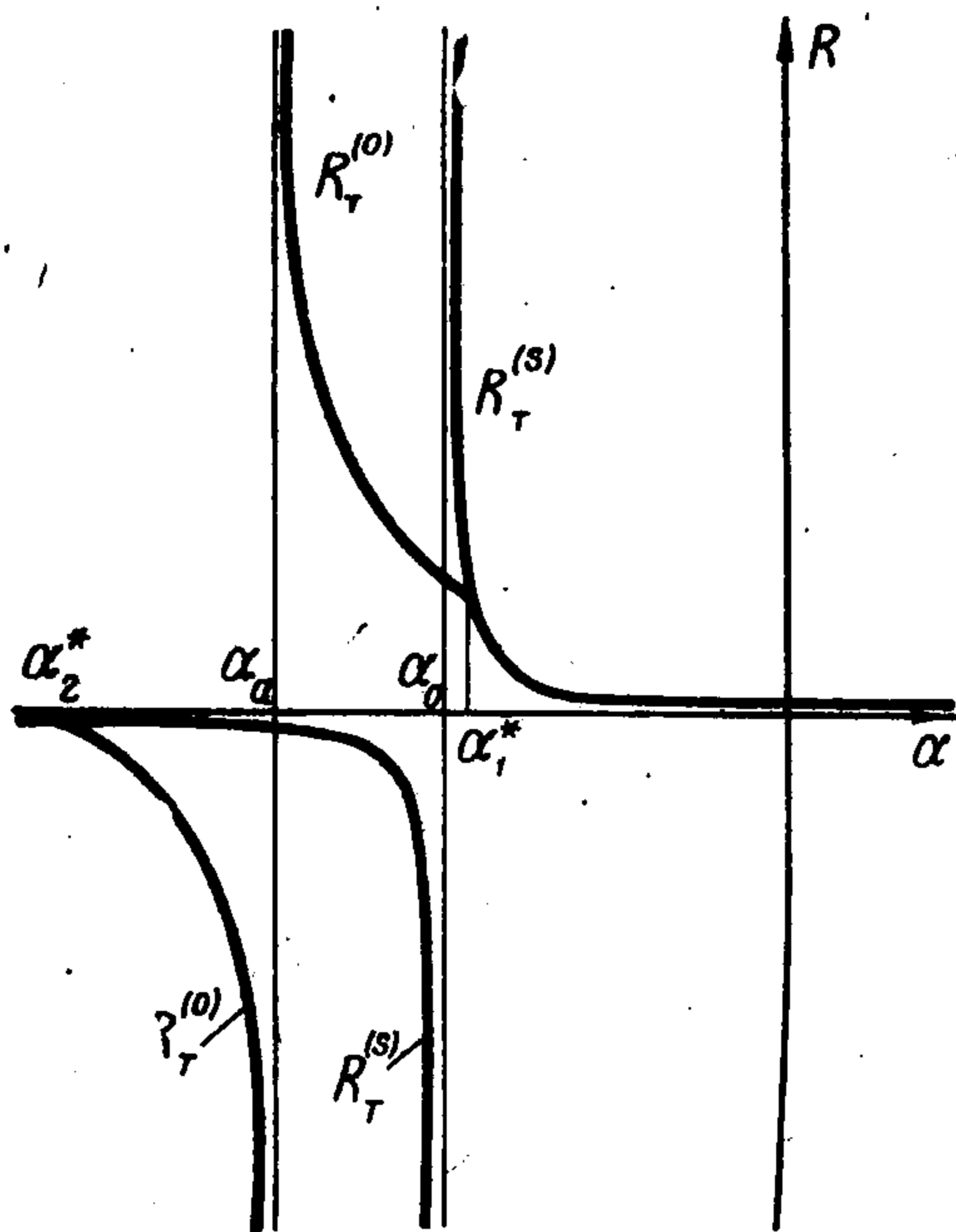
(m и n — одного знака, $\alpha_1^* < 0$, $\alpha_2^* < 0$, $\alpha_2^* < \alpha_1^*$).

Из (4.4) видно, что вертикальные прямые

$$\alpha = \alpha_0 \text{ и } \alpha = \alpha_a$$

$$\left(\alpha_0 = - (1 - \chi_0) \left(1 + \frac{1}{\gamma P_T} \right) + \frac{\chi_0 a_1}{\gamma P_T} \right)$$

$$\alpha_a = - \frac{(1 - \chi_0) P_T + a_1 P_c}{P_T + (1 + a_1) P_c}$$
(4.7)



Фиг. 3

будут асимптотами: первая — двух ветвей, определяющих монотонную неустойчивость, вторая — двух нейтральных колебательных ветвей, выходящих из разных точек бифуркации α_1^* и α_2^* (фиг. 3). Таким образом, в этом случае колебательная неустойчивость, как и монотонная, возможна и при подогреве снизу и при подогреве сверху.

5. В выражения для условий возникновения конвекции в бинарной смеси входят термодинамические производные, которые вблизи критической линии растворения имеют особенности. В связи с этим в критической области критерии конвекции могут существенно изменяться. Известно, что критическая линия опреде-

ляется следующим образом в координатах p, T, C [6]

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial C}\right)_{p, T} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial C^2}\right)_{p, T} = 0 \quad (5.1)$$

В критической области

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial C}\right)_{p, T} \sim t \quad \left(t = \frac{T - T_*}{T_*}\right)$$

Здесь $T_*(p)$ — критическая температура растворения на линии критических точек при фиксированном значении давления p . В соответствии с определениями

$$\alpha \sim \lambda \sim \left(\frac{\partial \mu}{\partial C}\right)_{p, T}^{-1}, \quad D \sim \left(\frac{\partial \mu}{\partial C}\right)_{p, T}, \quad P_c \sim \left(\frac{\partial \mu}{\partial C}\right)_{p, T}^{-1}, \quad \varepsilon \sim \left(\frac{\partial \mu}{\partial C}\right)_{p, T}^{-2}$$

Учитывая это и обозначая индексом (a) значения термодинамических величин вдали от T_* , перепишем полученные выше критерии возникновения конвекции.

В общем случае из (1.8) — (1.10) получаем асимптотические выражения при $t \rightarrow 0$

$$\alpha_{(a)} R_T^{(s)} + (1 + a_1) R_{c(a)}^{(s)} = \gamma_0 t \rightarrow 0$$

$$\left[1 + a_1 + \gamma P_T - P_T \left(\frac{\alpha}{P_c}\right)_{(a)}\right] R_T^{(0)} + \gamma P_T^2 \left(\frac{R_c^{(0)}}{P_c}\right)_{(a)} = \gamma_0 (1 + a_1) (1 + a_1 + \gamma P_T)$$

$$\omega^2 = \left(\frac{[f, \tau_k] k^2}{[\tau_k, \tau_k]}\right)^2 \gamma_1 \frac{(1 + a_1) P_{c(a)} - \alpha_{(a)} P_T}{\gamma P_T^2 P_{c(a)}} (R_T^{(0)} - R_T^*) \quad (5.2)$$

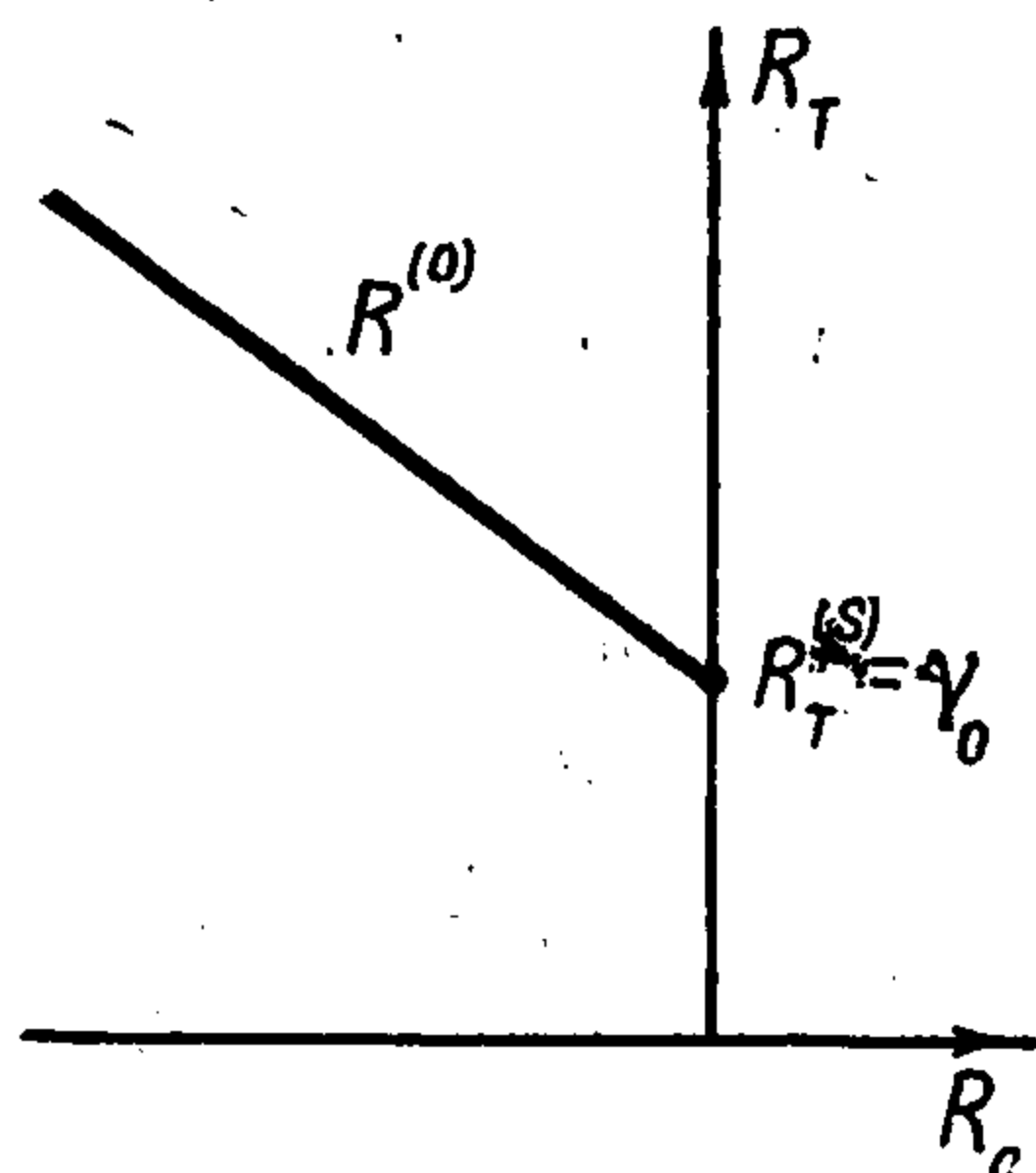
$$R_T^* = \gamma_0 (1 + a_1) \left[1 - \frac{P_T}{1 + a_1} \left(\frac{\alpha}{P_c}\right)_{(a)}\right]^{-1}, \quad R_{c(a)}^* = -\gamma_0 \alpha_{(a)} \left[1 - \frac{P_T}{1 + a_1} \left(\frac{\alpha}{P_c}\right)_{(a)}\right]^{-1}$$

В случае пренебрежения перекрестными эффектами из (2.1) — (2.3) имеем

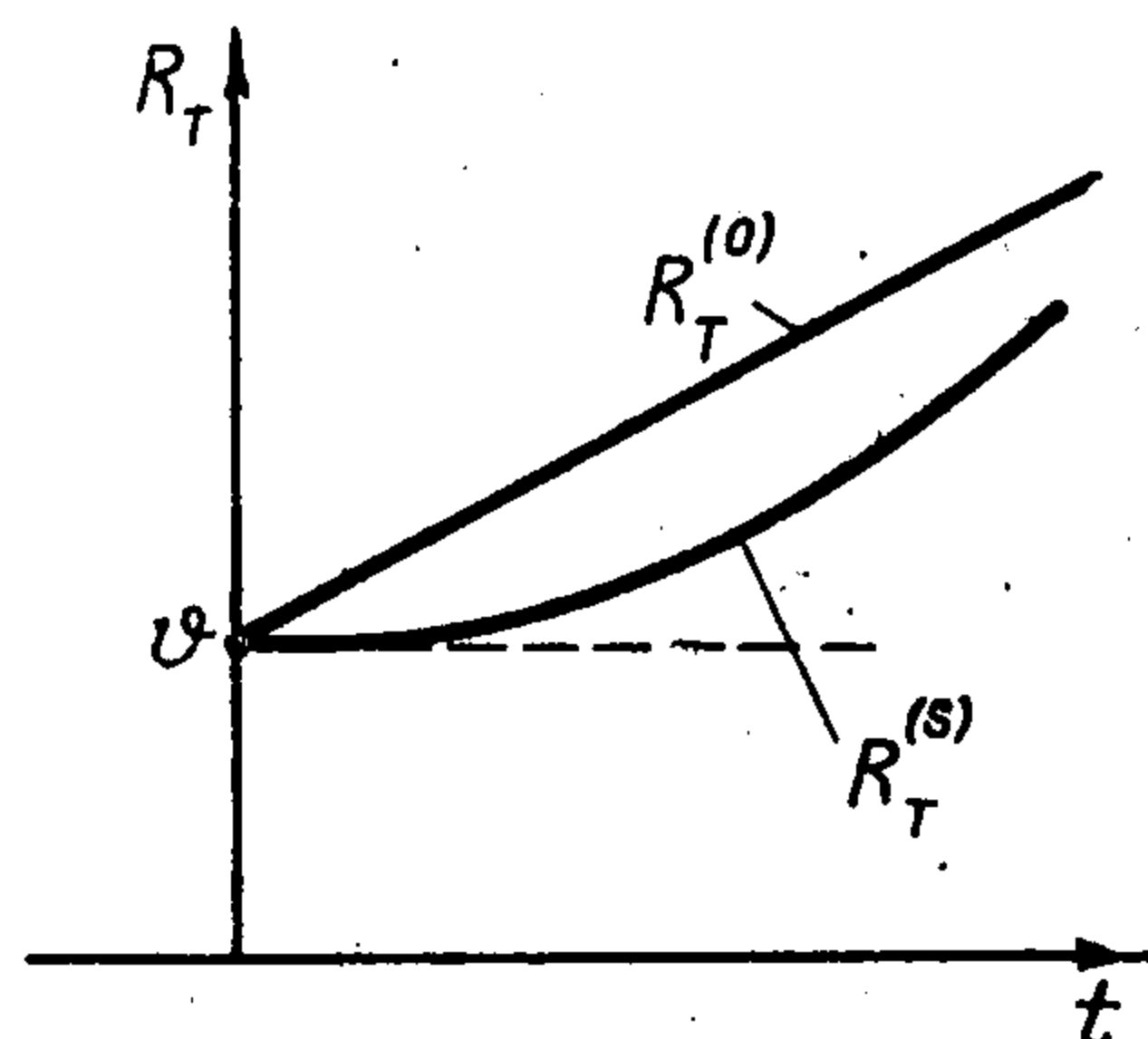
$$R_T^{(s)} + R_{c(a)}^{(s)} t^{-1} = \gamma_0, \quad R_T^{(0)} + \frac{\gamma P_T}{1 + \gamma P_T} P_T \left(\frac{R_c^{(0)}}{P_c}\right)_{(a)} = \gamma_0$$

$$\omega^2 = \left(\frac{[f, \tau_k] k^2}{[\tau_k, \tau_k]}\right)^2 \frac{1}{P_T^2} \left\{ \frac{R_T^{(0)}}{R_T^*} - 1 \right\}, \quad R_T^* = \gamma_0, \quad R_{c(a)}^* \sim -t^2 \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

Из условия монотонной неустойчивости в (5.3) видно, что допустимый градиент концентрации $R_c^{(s)} \sim t \rightarrow 0$ и, следовательно, ветвь монотонной неустойчивости в плоскости $R_T R_c$ вырождается в точку $R_T^{(s)} = \gamma_0$, т. е. имеет условие стационарной неустойчивости чистой жидкости.



Фиг. 4



Фиг. 5

ветви $R_T R_c$ вырождается в точку $R_T^{(s)} = \gamma_0$, т. е. имеет условие стационарной неустойчивости чистой жидкости. Ветвь колебательной неустойчивости в этом случае начинается в точке $R_T^* = \gamma_0, R_c^* = 0 (T = T_*)$ и существует при $R_c^{(0)} \leq 0$ и $R_T^{(0)} \geq \gamma_0$ (Фиг. 4). В наиболее интересном (с точки зрения сравнения с экспериментом) случае, при $j = 0$, из (4.4) — (4.6) получаем вблизи критической линии растворения бинарной

смеси асимптотические выражения для монотонного и колебательного чисел Рэлея и частоты нейтральных колебаний

$$R_T^{(s)} = P_T (\varepsilon / \alpha P_c)_{(a)} + \gamma_0 \frac{P_T}{(1 + a_1) (\alpha P_c)_{(a)}} t^2 \quad (5.4)$$

$$R_T^{(0)} = P_T (\varepsilon / \alpha P_c)_{(a)} + \gamma_1^{-1} \frac{(1 + a_1) (1 + a_1 + \gamma P_T)}{P_T (\alpha P_c)_{(a)}} t, \quad \omega \sim |t| \rightarrow 0$$

Таким образом, и колебательное и монотонное числа Рэлея, изменяясь по разным законам с приближением к T_* , стремятся к одной постоянной $P_T (\varepsilon / \alpha P_c)_{(a)}$ (фиг. 5). Но так как при этом $\omega \rightarrow 0$, то на линии критических точек имеет место только стационарная неустойчивость с критическим числом Рэлея

$$R_T^{(s)} = P_T (\varepsilon / \alpha P_c)_{(a)}, \quad \text{или} \quad \vartheta \equiv -\frac{A_0/\lambda}{g\beta_2} = 1 \quad (5.5)$$

т. е. в критической точке бинарного раствора появляется новый критерий.

Если же учитывать градиент давления в равновесии, то из (3.2) — (3.4) получается совершенно иной результат

$$R_T^{(s)} \sim t^2, \quad R_T^{(0)} \sim t, \quad \omega^2 = \left(\frac{[f, \tau_k] k^2}{[\tau_k, \tau_k]} \right)^2 \left(\frac{1 + a_1}{P_T} \right)^2 \left(\frac{\alpha^*}{\alpha} - 1 \right) \quad (5.6)$$

т. е. оба типа неустойчивости существуют, но значения критериев стремятся к нулю с приближением к критической точке. Следовательно, в критической области бинарного раствора учет эффектов, связанных с градиентом давления в равновесии существенно изменяет критерии возникновения конвекции.

Ситуация эта аналогична положению в чистой жидкости [7], когда при учете сжимаемости только в уравнении теплопроводности (только в равновесии) критическое число Рэлея вблизи критической точки жидкости — пар уже стремится не к нулю, а к постоянной величине, определяемой критерием Шварцшильда χ_0 .

В чистой жидкости это связано с особенностью сжимаемости при приближении к T_* , в критической же области бинарной смеси особенность имеет соответствующую восприимчивость μ_c^{-1} . Этот критерий определяет также конвективную неустойчивость бинарной смеси и при больших высотах слоя, как и критерий Шварцшильда для чистой жидкости.

Надо отметить, что здесь рассматривалась только критическая точка смешения, где сжимаемость бинарной смеси мала.

Однако, как известно [8], на линии критических точек парообразования для бесконечно разбавленных растворов и вблизи точки пересечения с линией азеотропа сжимаемость бинарного раствора также имеет особенность, и здесь требуется последовательный учет сжимаемости в уравнениях гидродинамики, а также учет зависимости коэффициентов уравнений от координат из-за гидростатического эффекта, как это было проделано для чистой сжимаемой жидкости [9].

Приложение. Численный счет интегралов, входящих в выражения для собственных значений задачи, проводится методом Бубнова — Галеркина с использованием вместо точных решений уравнений некоторых аппроксимирующих функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи.

В рассматриваемом случае использование уже второго приближения (ряд из двух функций) сильно усложняет решение задачи на колебательную неустойчивость. Характеристическое уравнение вместо кубического (1.4) становится шестого порядка, и соответствующее условие колебательной неустойчивости приводит к очень громоздкому выражению.

Условие монотонной неустойчивости, как и в случае чистой жидкости, при этом не усложняется, так как определитель шестого порядка S_6 сводится к клеточному определителю третьего порядка, из которого следует условие (1.8) с отличной правой частью, совпадающей с соответствующим значением в случае чистой жидкости.

Следовательно, в случае монотонной неустойчивости бинарной смеси, использование аппроксимирующих функций для амплитуды вертикальной скорости, проверенных в [7], $f_1 = (1 - 4z^2)^2$ и $f_2 = 1 + \cos 2\pi z$ и соответствующих им решений уравнений теплопроводности и диффузии дает для γ_0 значение, близкое к точному 1707.8 и 1802 соответственно (точное значение $\gamma_0 = 1707.8$ при $k_0 = 3.1$ — здесь случай чистой жидкости является предельным при $B_0 = 0$).

Соответствующие этим функциям интегралы, входящие в выражения для γ_0 , γ и γ_1 из (1.8), равны

$$1) \text{ для } f_1 = (1 - 4z^2)^2$$

$$[f, f] = \frac{128}{315}, \quad [f, (D^2 - k^2)^2 f] = \frac{128}{315} (k^4 + 24k^2 + 504), \quad [f, (D^2 - k^2) f] = -\frac{128}{315} (12 + k^2)$$

$$[f, \tau_k] = \frac{128k^{-9}}{315} \{k^5 (k^4 - 12k^2 + 504) + 5040 (12 + k^2) [6k - (12 + k^2) th^{1/2}k]\}$$

$$[\tau_k, \tau_k] = \frac{128k^{-9}}{315} \{k (k^8 - 24k^6 + 4914k^4 + 362880) + (12 + k^2) (k + 4shk) (1 + chk)^{-1} + 20160 (12 + k^2) [6k - (18 + k^2) th^{1/2}k]\}$$

$$2) \text{ для } f_2 = 1 + \cos 2\pi z$$

$$[f, f] = 3/2, \quad [f, (D^2 - k^2)^2 f] = 3/2 k^4 + 4\pi^2 k^2 + 8\pi^4, \quad [f, (D^2 - k^2) f] = -1/2 (3k^2 + 4\pi^2)$$

$$[f, \tau_k] = 1 - \left(\frac{4\pi^2}{4\pi^2 + k^2} \right)^2 \frac{2}{k} th^{1/2}k + \frac{4}{2} \frac{k^2}{4\pi^2 + k^2}$$

$$[\tau_k, \tau_k] = 1 - \frac{64\pi^4 (2\pi^2 + k^2)}{(4\pi^2 + k^2)^3} \frac{2}{k} th^{1/2}k + \frac{4}{2} \left(\frac{k^2}{4\pi^2 + k^2} \right)^2 + \left(\frac{4\pi^2}{4\pi^2 + k^2} \right)^2 \frac{k + shk}{k (1 + chk)}$$

Если при использовании этих же аппроксимирующих функций для расчета колебательной неустойчивости полученные приближенные собственные значения задачи будут близки, то можно надеяться, что они близки к точному собственному значению задачи.

Прежде всего из условия совпадения точки пересечения прямых в (1.8) и точки, где выполняется $\omega = 0$, имеем $\gamma\gamma_1^{-1} = 1707.8$ и $k_0 = 3.1$ (для f_1) и 1802 при $k_0 = 3.1$ (для f_2) в точке бифуркации (это также следует из того, что $\gamma\gamma_1^{-1} = \gamma_0$ и в точке бифуркации равно значению, принимаемому на монотонной ветви устойчивости).

Из счета колебательного числа Рэля $R_T^{(0)}(k)$ как функции k с аппроксимирующей функцией f_2 получаем плавную кривую с одним минимумом при $k_0 = 3.1$ как по уравнению (2.1), так и по (3.2) для всех значений параметров P_c, P_T, R_c, a_1 .

При счете критерия колебательной неустойчивости $R_T^{(0)}$ с аппроксимирующей функцией f_1 значения критерия и периодичность в горизонтальной плоскости k_0 , посчитанные при различных значениях параметров задачи по второму уравнению из (2.1), близки к значениям, посчитанным с пробной функцией f_2 (фиг. 1)¹.

Однако, несмотря на близкие значения критериев, даваемые функциями f_1 и f_2 , значения γ и γ_1 из (1.8) и критических частот ω отличаются сильно: так при $P_T = 1, P_c = 2$ и $k_0 = 3.1$

$$\text{для } f_1 = (1 - 4z^2)^2$$

$$\gamma = -122.56, \quad \gamma_1 = -0.072, \quad \omega^2 = 0.062 \quad \text{при } R_c^{(0)} = 6000$$

$$\omega^2 = 0.119 \quad \text{при } R_c^{(0)} = 10000$$

$$\text{для } f_2 = 1 + \cos 2\pi z$$

$$\gamma = 1.937, \quad \gamma_1 = 0.00107, \quad \omega^2 = 108.35 \quad \text{при } R_c^{(0)} = 6000$$

$$\omega^2 = 253.98 \quad \text{при } R_c^{(0)} = 10000$$

¹ На всех фигурах сплошной линией представлены результаты счета с аппроксимирующей функцией f_1 , а пунктирной — с функцией f_2 .

Здесь надо отметить, что при счете с пробной функцией f_1 (в отличие от f_2) на кривой $R_T^{(0)}(k)$ по мере удаления от точки бифуркации при любых значениях параметров P_T и P_c появляется дополнительный минимум при $k = 3.5$ (одном и том же для разных параметров), который углубляется и при больших значениях становится глубже основного при $k = k_0$. При этом вблизи этого минимума функция $R_T^{(0)}(k)$ испытывает скачок (при $P_T = 1$; $P_c = 0,1$; $R_c^{(0)} = 10\,000$ при $k = 3.4$ функция $R_T^{(0)}(k)$ меняется на двенадцать порядков). Кроме того, при $P_c < P_T = 1$ по мере удаления от точки бифуркации по колебательной ветви положение минимума k_0 сдвигается в сторону меньших значений при больших $R_c^{(0)}$ (так, если $P_c = 0,1$; $R_c^{(0)} = 10^4$; то $k_0 = 2.7$) (так как P_c и P_T входят в критерии симметрично, то это все верно и для обратного случая).

Аналогичные результаты получаются при счете критерия колебательной неустойчивости из (3.2) с пробной функцией f_1 . Здесь, кроме того, сильное отличие значения γ , посчитанного с функцией f_1 , от значения, посчитанного с f_2 , существенно заменяет положение асимптоты колебательной ветви неустойчивости (см. фиг. 2).

Таким образом, на основании приведенных расчетов можно сделать вывод, что при применении метода Бубнова — Галеркина для счета критерия колебательной неустойчивости надо еще более осторожно, чем в случае монотонной неустойчивости, подходить к выбору аппроксимирующей функции. Как видно из примеров счета, неудачный выбор аппроксимирующей функции ($f_1 = (1 - 4z^2)^2$), хотя и дает хорошее приближение в значении критерия во многих случаях, однако приводит к большим ошибкам при вычислении γ , γ_1 и ω^2 .

Автор благодарит М. Ш. Гитермана за внимание к работе, а также Г. З. Гершуни за обсуждение и ценные замечания.

Поступила 7 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О конвективной неустойчивости двухкомпонентной смеси в поле тяжести. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
2. Nield D. A. The thermohaline Rayleigh — Jeffreys problem. J. Fluid Mech., 1967, vol. 29, pt. 3.
3. Baines P. G., Gill A. E. On thermohaline convection with linear gradients. J. Fluid Mech., 1969, N 37, pt. 2.
4. Гитерман М. Ш., Штейнберг В. А. Критерии возникновения свободной конвекции в сжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
5. Шапошников И. Г., К теории конвективных явлений в бинарной смеси. ПММ, 1953, т. 17, вып. 2.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, изд. 2. М., «Наука», 1966.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 5. Статистическая физика, изд. 2. М., «Наука», 1964.
8. Ротт Л. А. Применение обобщенных функций в термодинамике бесконечно разбавленных растворов, Ж. физ. хим., 1961, т. 35, № 9.
9. Гитерман М. Ш., Штейнберг В. А. Критерии возникновения конвекции в жидкости, находящейся вблизи критической точки. Теплофизика высоких температур, 1970, т. 8, вып. 4.
10. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.