ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С. А. Касьянюк, Г. И. Ткачук

(Киев)

При помощи оценок для интегральных операторов плоской теории упругости изучается задача об экстремальных напряжениях в первой основной задаче для полуплоскости и круга в зависимости от распределения напряжений на контуре. Задачи для полуплоскости решены С. А. Касьянюком, для круга — Г. И. Ткачук.

Известно ([1], стр. 293, [2]), что компоненты напряжения X_x, X_y, Y_y в точке $z = x + iy$ в первой основной плоской задаче для полуплоскости $y < 0$ определяются через нормальные $N(t)$ и касательные $T(t)$ напряжения, заданные вдоль оси x, с помощью равенств

$$X_x + Y_y = 4\operatorname{Re}\Phi(z) \tag{0.1}$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N(t) - iT(t)}{(z-t)}dt$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N(t) + iT(t)}{(z-t)}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N(t) - iT(t)}{(z-t)^2}dt$$

В задаче для круга $|z| \leqslant R$, как известно [2],— касательное и нормальное напряжения R_θ и R_r в точке $z = re^{i\theta}$, $r \neq 0$, (в полярной системе координат) — определяются равенствами

$$2R_\theta r^2 = \frac{R^2 - r^2}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + \frac{R^2}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(t)T(t)\,dt \tag{0.2}$$

$$2R_r r^2 = r\frac{R^2 - r^2}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{R^2 - r^2}{\pi}\int_0^{2\pi} g_2(t)T(t)\,dt + \frac{r^2}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(t)N(t)\,dt$$

$$\Omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[g_1(t)N(t) - g_2(t)T(t)]\,dt$$

Здесь, а также для дальнейшего, введены обозначения

$$g_1(t) = \frac{R^2 - r^2}{g(t)}, \quad g_2(t) = \frac{2rR\sin(\theta - t)}{g(t)}, \quad g(t) = R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2 \tag{0.3}$$

а $N(t)$ и $T(t)$ — соответствующие заданные нормальные и касательные напряжения на окружности $z = Re^{it}$.

Таким образом, компоненты напряжений в произвольной точке z рассматриваемой области являются функционалами, определенными на множествах функций $N(t)$ и $T(t)$.

Если потребовать, чтобы функции $N(t)$ и $T(t)$ удовлетворяли некоторым ограничениям, например:

либо

$$|N(t)| \leqslant l, \qquad T(t) \equiv 0 \tag{0.4}$$

либо

$$|T(t)| \leqslant l, \qquad N(t) \equiv 0$$

либо

$$\int_{\Gamma} [N^2(t) + T^2(t)]\, dt \leqslant l^2$$

и т. д., то можно поставить задачу отыскания экстремальных значений величин

$$X_y,\ Y_y,\ R_\theta,\ R_r, \qquad \sqrt{X_y^2 + Y_y^2}, \qquad \sqrt{R_\theta^2 + R_r^2}$$

и т. п., и функций $N(t)$ и $T(t)$, их реализующих.

Для решения поставленных задач в этой работе используются различные модификации неравенства Коши — Буняковского в банаховом пространстве [3]

$$|X(x)| \leqslant \|X^{**}\| \cdot \|x\| \tag{0.5}$$

где $X(x)$ — линейный функционал, $\|x\|$ — норма элемента, $\|X^{**}\|$ — норма функционала.

1. Рассмотрим сначала случай, когда $T(t) \equiv 0$ вдоль границы полуплоскости, а $N(t)$ удовлетворяет условиям

$$N(t) = 0 \quad (|t| > a), \qquad |N(t)| \leqslant l \qquad |t| \leqslant a) \tag{1.1}$$

вызванным физическими соображениями [1]. Тогда

$$X_y = \frac{2}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{h_1(t)}{h^2(t)} N(t)\, dt, \qquad Y_y = -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{y^3}{h^2(t)} N(t)\, dt \tag{1.2}$$

Здесь, а также для дальнейшего, введены обозначения

$$h_1(t) = y^2(t - x), \qquad h_2(t) = y(t - x)^2, \qquad h(t) = (x - t)^2 + y^2 \tag{1.3}$$

Используя оценки вида (0.5) для интегралов (1.2) с ограничениями (1.1), немедленно получаем, что максимум X_y по $N(t)$ реализуется только функцией $N_0(t)$ вида:

1) если $|x| \leqslant a$

$$N_0(t) = 0\ (|t| > a),\ N_0(t) = -l\ (-a \leqslant t < x),\ N_0(t) = l\ (x \leqslant t \leqslant a)$$

$$X_y = \frac{l}{\pi} [2 - \omega(x, y) - \omega(-x, y)]$$

$$Y_y = \frac{l}{\pi} [\varepsilon(x, y) - \varepsilon(-x, y)] + \frac{ly}{\pi} [\theta(x, y) - \theta(-x, y)]$$

$$\theta(x, y) = \frac{(a + x)}{h(-a)}, \qquad \omega(x, y) = \frac{y^2}{h(-a)}, \qquad \varepsilon(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{(a + x)}{y}$$

2) если $x < -a$ (или $x > a$)

$$N_0(t) = 0 \quad (|t| > a), \qquad N_0(t) = \pm l \quad (|t| \leqslant a)$$

$$X_y = \mp \frac{l}{\pi} [\omega(x, y) - \omega(-x, y)]$$

$$Y_y = \pm \frac{ly}{\pi} [\theta(x, y) + \theta(-x, y)] \pm \frac{l}{\pi} [\varepsilon(x, y) + \varepsilon(-x, y)]$$

(нижние знаки соответствуют случаю $x > a$).

Из тех же соображений ясно, что максимум Y_y по $N(t)$ реализуется только функцией $N_0(t)$ вида

$$N_0(t) = l \quad (|t| \leqslant a), \quad N_0(t) = 0 \quad (|t| > a)$$

$$Y_y = -\frac{ly}{\pi} [\theta(x, y) + \theta(-x, y)] - \frac{l}{\pi} [\varepsilon(x, y) + \varepsilon(-x, y)]$$

$$X_y = \frac{l}{\pi} [\omega(x, y) - \omega(-x, y)]$$

Далее рассмотрим случай, когда $N(t) \equiv 0$ вдоль границы полуплоскости, а $T(t)$ удовлетворяет условиям

$$T(t) = 0 \quad (|t| > a), \qquad |T(t)| \leqslant l \quad (|t| \leqslant a) \tag{1.4}$$

Тогда

$$X_y = -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{h_2(t)}{h^2(t)} T(t)\,dt, \quad Y_y = \frac{2}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{h_1(t)}{h^2(t)} T(t)\,dt \tag{1.5}$$

Используя оценки вида (0.5) интегралов (1.5) с ограничениями (1.4), получаем: максимум X_y по $T(t)$ реализуется только функцией $T_0(t)$ вида

$$T_0(t) = l \ (|t| \leqslant a), \quad T_0(t) = 0 \ (|t| > a)$$

$$X_y = \frac{ly}{\pi}[\theta(x, y) + \theta(-x, y)] - \frac{l}{\pi}[\varepsilon(x, y) + \varepsilon(-x, y)]$$

$$Y_y = \frac{l}{\pi}[\omega(x, y) - \omega(-x, y)]$$

максимум Y_y по $T(t)$ реализуется только функцией $T_0(t)$ вида:

1) если $|x| \leqslant a$

$$T_0(t) = 0 \quad (|t| > a), \quad T_0(t) = -l \ (-a \leqslant t < x), \quad T_0(t) = l \quad (x \leqslant t \leqslant a)$$

$$Y_y = \frac{l}{\pi}[2 - \omega(x, y) - \omega(-x, y)]$$

$$X_y = \frac{ly}{\pi}[\theta(x, y) - \theta(-x, y)] + \frac{l}{\pi}[\varepsilon(x, y) - \varepsilon(-x, y)]$$

2) если $x < -a$ (или $x > a$)

$$T_0(t) = 0 \quad (|t| > a), \quad T_0(t) = \pm l \quad (|t| \leqslant a)$$

$$Y_y = \mp \frac{l}{\pi}[\omega(x, y) - \omega(-x, y)]$$

$$X_y = \pm \frac{ly}{\pi}[\theta(x, y) + \theta(-x, y)] \mp \frac{l}{\pi}[\varepsilon(x, y) + \varepsilon(-x, y)]$$

(нижние знаки соответствуют случаю $x > a$).

Наконец, рассмотрим случай, когда напряжения вдоль контура полуплоскости удовлетворяют условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} [N^2(t) + T^2(t)]\,dt \leqslant l^2 \tag{1.6}$$

Из равенств (0.1), учитывая обозначения (1.3), имеем

$$X_y = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [h_1(t) N(t) - h_2(t) T(t)] \frac{dt}{h^2(t)} \tag{1.7}$$

$$Y_y = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [-y^3 N(t) + h_1(t) T(t)] \frac{dt}{h^2(t)}$$

а неравенство (0.5) в этом случае принимает вид

$$\begin{vmatrix} l^2 A_{11} - X_y^2 & l^2 A_{12} - X_y Y_y \\ l^2 A_{21} - X_y Y_y & l^2 A_{22} - Y_y^2 \end{vmatrix} \geqslant 0 \tag{1.8}$$

$$A_{11} = \frac{4}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{yh_2(t)}{h^3(t)}\,dt = -\frac{1}{2\pi y}$$

$$A_{22} = \frac{4}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y^4}{h^3(t)}\,dt = -\frac{3}{2\pi y}$$

$$A_{12} = A_{21} = -\frac{4}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{yh_1(t)}{h^3(t)}\,dt = 0$$

Знак равенства в (1.8), как известно [3], реализуется только теми X_y и Y_y, которые соответствуют функциям

$$N_0(t) = \frac{2}{\pi}\frac{[\xi_1 h_1(t) - \xi_2 y^3]}{h^2(t)}, \quad T_0(t) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\xi_1 h_2(t) + \xi_2 h_1(t)}{h^2(t)}\right] \qquad (1.9)$$

с надлежащими ξ_1 и ξ_2.

Поэтому

$$-\frac{2\pi y}{l^2} X_y^{\,2} - \frac{2}{3}\frac{\pi y}{l^2} Y_y^{\,2} \leqslant 1$$

$$\max\nolimits_{N(t),T(t)} X_y = \frac{l}{\sqrt{-2\pi y}}, \quad \max\nolimits_{N(t),T(t)} Y_y = \frac{l\sqrt{3}}{\sqrt{-2\pi y}}$$

$$\max\nolimits_{N(t),T(t)} |X_y + iY_y| = \frac{l\sqrt{3}}{\sqrt{-2\pi y}}.$$

Функции $N_0(t)$ и $T_0(t)$, реализующие $\max_{N(t),T(t)} X_y$, имеют вид

$$N_0(t) = \frac{2}{\pi}\frac{l}{\sqrt{-2\pi y}}\frac{h_1(t)}{h^2(t)}, \qquad T_0(t) = -\frac{2}{\pi}\frac{l}{\sqrt{-2\pi y}}\frac{h_2(t)}{h^2(t)} \qquad (1.10)$$

Функции $N_0(t)$ и $T_0(t)$, реализующие $\max_{N(t),T(t)} Y_y$ и $\max_{N(t),T(t)} |X_y + iY_y|$, имеют вид

$$N_0(t) = -\frac{2}{\pi}\frac{l\sqrt{3}}{\sqrt{-2\pi y}}\frac{y^3}{h^2(t)}, \quad T_0(t) = \frac{2}{\pi}\frac{l\sqrt{3}}{\sqrt{-2\pi y}}\frac{h_1(t)}{h^2(t)} \qquad (1.11)$$

Для экстремальных функций (1.10) и (1.11) значения ξ_1 и ξ_2 найдены из уравнений

$$\frac{l}{\sqrt{-2\pi y}} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h_1(t)N_0(t) - h_2(t)T_0(t)}{h^2(t)}\,dt$$

$$0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{-y^3 N_0(t) + h_2(t)T_0(t)}{h^2(t)}\,dt$$

$$0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h_1(t)N_0(t) - h_2(t)T_0(t)}{h^2(t)}\,dt$$

$$\frac{l\sqrt{3}}{\sqrt{-2\pi y}} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{-y^3 N_0(t) + h_2(t)T_0(t)}{h^2(t)}\,dt.$$

Здесь $N_0(t)$ и $T_0(t)$ определены равенствами (1.9).

2. Совершенно аналогично исследуется первая основная плоская задача для круга. Рассмотрим сначала задачу о максимальных R_θ и R_r в точке $z = re^{i\theta}$, $r \neq 0$, круга $|z| \leqslant R$, к точкам граничной окружности которого $z = Re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ приложено только нормальное напряжение

$$N(t), \qquad |N(t)| \leqslant l \tag{2.1}$$

В этом случае $T(t) \equiv 0$, поэтому из (0.2) получаем

$$R_\theta = \frac{R^2 - r^2}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \frac{g_2(t)}{g(t)} N(t)\, dt \tag{2.2}$$

$$R_r = \frac{(R^2 - r^2)^2}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{R\cos(t-\theta) - r}{g^2(t)} N(t)\, dt$$

Максимум R_θ по $N(t)$ на основании неравенств (0.5) реализуется только функцией $N_0(t)$ вида

$$N_0(t) = l \quad (\theta \leqslant t \leqslant \theta + \pi), \quad N_0(t) = -l \; (0 \leqslant t < \theta, \; \pi + \theta < t \leqslant 2\pi)$$

При этом

$$R_\theta = \frac{2Rl}{\pi r}, \qquad R_r = 0$$

Максимум R_r по $N(t)$ реализуется только функцией $N_0(t)$ вида

$$N_0(t) = -l \quad (\vartheta \leqslant t \leqslant 2\pi - \vartheta), \qquad N_0(t) = l \quad (0 \leqslant t < \vartheta, \, 2\pi - \vartheta < t \leqslant 2\pi)$$

$$\vartheta = \theta + \arccos\frac{r}{R}$$

При этом

$$R_r = \frac{2l}{\pi r}\sqrt{R^2 - r^2} + \frac{4l}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{R+r}{R-r}}, \qquad R_\theta = 0$$

Далее рассмотрим случай, когда вдоль границы окружности

$$z = Re^{it}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \qquad N(t) \equiv 0$$

а касательные напряжения удовлетворяют ограничению

$$|T(t)| \leqslant l \tag{2.3}$$

В этом случае

$$R_\theta = \frac{R(R^2 - r^2)}{2\pi r^2} \int_0^{2\pi} \frac{R(R^2 + 3r^2) - r(3R^2 + r^2)\cos(\theta - t)}{g^2(t)} T(t)\, dt \tag{2.4}$$

$$R_r = \frac{R^2 - r^2}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \frac{g_2(t)\,[R^2 + 3r^2 - 4Rr\cos(t-\theta)]}{g(t)} T(t)\, dt$$

Так как $R(3r^2 + R^2) > r(3R^2 + r^2)$ для $r < R$, то максимум R_θ по $T(t)$ реализуется только функцией $T_0(t) \equiv l$ и при этом

$$R_\theta = \frac{lR^2}{r^2}, \qquad R_r = 0 \qquad (r \neq 0)$$

При отыскании максимума R_r по $T(t)$ следует выделить два случая:

1) если $0 < r \leqslant 1/3R$, то максимум R_r по $T(t)$ реализуется только функцией $T_0(t)$ вида

$$T_0(t) = l \quad (\theta \leqslant t \leqslant \theta + \pi), \qquad T_0(t) = -l \quad (0 \leqslant t < \theta, \, \theta + \pi < t \leqslant 2\pi)$$

при этом

$$R_r = \frac{2l}{\pi} \frac{R^2 - r^2}{r^2} \ln \frac{R+r}{R-r} - \frac{2lR}{\pi r}, \qquad R_\theta = 0$$

2) если ${}^1/_3 R < r < R$, то максимум R_r по $T(t)$ реализуется только функцией $T_0(t)$ вида

$$T_0(t) = l \qquad (\theta \leqslant t \leqslant t_1, \pi + \theta \leqslant t \leqslant t_2)$$

$$T_0(t) = -l \qquad (0 \leqslant t < \theta, t_1 < t < \pi + \theta, t_2 < t \leqslant 2\pi)$$

$$t_1 = \theta + \arccos \frac{R^2 + 3r^2}{4\pi R}, \qquad t_2 = 2\pi + 2\theta - t_1$$

При этом

$$R_r = -l \frac{R^2 - 3r^2}{\pi r^2} + 2 \ln 2 \frac{l(R^2 - r^2)}{\pi r^2}, \qquad R_\theta = 0$$

Наконец, в случае, когда напряжения вдоль границы круга $|z| \leqslant R$ удовлетворяют условию

$$\int_0^{2\pi} [N^2(t) + T^2(t)]\, dt \leqslant l^2 \tag{2.5}$$

имеем

$$R_\theta = \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} \{g_1(t) [2R^2(3r^2 + R^2) - 2Rr(r^2 + 3R^2)\cos(\theta - t)] T(t) -$$

$$- g_2(t)(R^2 - r^2)^2 N(t)\} \frac{dt}{g(t)}$$

$$R_r = \frac{R^2 - r^2}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \{g_2(t)[3r^2 + R^2 - 4Rr\cos(\theta - t)] T(t) +$$

$$+ g_1(t) 2r [R\cos(\theta - t) - r] N(t)\} \frac{dt}{g(t)}$$

Неравенство (0.5) в этом случае принимает вид

$$\begin{vmatrix} l^2 B_{11} - R_\theta^2 & -R_\theta R_r \\ -R_\theta R_r & l^2 B_{22} - R_r^2 \end{vmatrix} \geqslant 0 \tag{2.6}$$

$$B_{11} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} g_1^2(t) [2R^2(3r^2 + R^2) - 2Rr(r^2 + 3R^2)\cos(\theta - t)]^2 \frac{dt}{g^2(t)} +$$

$$+ \frac{(R^2 - r^2)^4}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \frac{g_2^2(t)}{g^2(t)}\, dt$$

$$B_{22} = \frac{(R^2 - r^2)^2}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \{g_2^2(t)[3r^2 + R^2 - 4Rr\cos(\theta - t)]^2 +$$

$$+ 4r^2 g_1^2(t)[R\cos(\theta - t) - r]^2\} \frac{dt}{g^2(t)}$$

Поэтому эллипс значений R_θ и R_r определяется неравенством

$$\frac{R_\theta^2}{l^2 B_{11}} + \frac{R_r^2}{l^2 B_{22}} \leqslant 1$$

Граничные точки этого эллипса соответствуют только функциям вида

$$T_0(t) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{g_1(t)}{g(t)}\frac{l\cos\alpha}{\sqrt{B_{11}}}[2R^2(3r^2+R^2) - $$

$$-2Rr(r^2+3R^2)\cos(\theta-t)] + \frac{1}{4\pi r^2}\frac{g_2(t)}{g(t)}\frac{(R^2-r^2)l\sin\alpha}{\sqrt{B_{22}}}[3r^2 +$$

$$+R^2 - 4Rr\cos(\theta-t)]$$

$$N_0(t) = -\frac{1}{4\pi r^2}\frac{g_2(t)}{g(t)}\frac{l\cos\alpha}{\sqrt{B_{11}}}(R^2-r^2)^2 +$$

$$+\frac{1}{4\pi r^2}\frac{g_1(t)}{g(t)}\frac{l\sin\alpha}{\sqrt{B_{22}}}2r(R^2-r^2)[R\cos(\theta-t)-r].$$

Эти функции реализуют максимум R_θ при $\alpha = 0$ и максимум R_r при $\alpha = {}^1/_2\,\pi$.

Поступила 21 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. Колосов Г. В. Применение функций комплексных переменных диаграмм к теории упругости. Л.—М., гл. ред. общ. техн. дисциплин, 1935.
3. Функциональный анализ (под ред. С. Г. Крейна, Справочн. матем. библиотека). М., «Наука», 1964.

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ, В ЧАСТНОСТИ, ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

В. А. Штейнберг

(Москва)

Получены критерии стационарной и колебательной неустойчивости плоского горизонтального слоя бинарной смеси, ограниченного твердыми поверхностями. Результаты счета методом Бубнова — Галеркина приведены в виде диаграмм устойчивости. Показано, что учет градиента давления в равновесии для бинарной смеси изменяет критерии возникновения конвекции, особенно при нулевом диффузионном потоке.

Учет эффектов, связанных с градиентом давления в равновесии, вблизи линии критических точек смешения бинарной смеси дает новый критерий устойчивости, аналогичный критерию Шварцшильда в чистой жидкости.

1. Условия возникновения конвекции в смеси с неоднородным распределением температуры и концентрации существенно отличаются от случая чистой жидкости. Как было показано в [1] на примере устойчивости плоского вертикального слоя, в смеси возможны два вида неустойчивости — относительно монотонного и колебательного возмущений. Этот вывод подтверждается в [2,3]. Во всех этих работах простая форма области или соответствующие граничные условия позволяют точно решить нестационарные уравнения малых возмущений.

Рассмотрим устойчивость механического равновесия плоского горизонтального слоя смеси, ограниченного твердыми поверхностями. При этом принимаем градиенты температуры и концентрации постоянными и вертикальными

$$\nabla T_0 = -A_0\gamma, \qquad \nabla C_0 = -B_0\gamma \tag{1.1}$$