7. Крейн М. Г. О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции. Докл. АН СССР, 1953, т. 93, № 4.
8. Eisner E., Inverse design for flexural vibrators. J. Acoust. Soc. America, 1966, vol. 40, No. 4, pp. 773—775.
9. Niordson F. J. A method for solving inverse eigenvalue problems. Recent Progress in Applied Mechanics. The Folk Odquist Volume. Stockholm, 1967, pp. 373—382.
10. Ниордсон Ф. И. Обратная задача о собственных частотах упругих пластинок. III Всес. съезд по теорет. и прикл. механ., Аннот. докл., М., 1968, стр. 230, 231.
11. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, ГОНТИ Укр., 1938.
12. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965.

О ПЛОТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Н. Н. Бендич, В. М. Корнев

(Новосибирск)

Определяются асимптотические оценки для плотности собственных значений. Установлено существование точек сгущения собственных чисел. Проведено сравнение результатов для собственных частот оболочек и собственных значений в задачах устойчивости. Выписаны условия разрешимости линейного уравнения, описывающего устойчивость при наличии малых возмущений.

§ 1. Уравнение устойчивости при заданных усилиях в срединной поверхности оболочки, радиусы кривизны которой близки к постоянным, имеет вид

$$D\Delta\Delta\Delta\Delta\Phi_{nm} + Eh\Delta_k\Delta_k\Phi_{nm} + \lambda_{nm}\Delta\Delta(\alpha_1\Phi_{,xx} + \alpha_2\Phi_{,yy}) = 0 \tag{1.1}$$

$$\alpha_1\lambda_{nm} = N_1, \quad \alpha_2\lambda_{nm} = N_2 \quad (0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant 1), \qquad w = \Delta\Delta\Phi$$

$$\Delta\Phi = \Phi_{,xx} + \Phi_{,yy}, \quad \Delta_k\Phi = R_2^{-1}\Phi_{,xx} + R_1^{-1}\Phi_{,yy}, \quad \varphi = Eh\Delta_k\Phi$$

Здесь x, y — декартовы координаты, $w(x, y)$ — нормальный прогиб оболочки, $\varphi(x, y)$ — функция напряжений, Φ — разрешающая функция; D — цилиндрическая жесткость, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, $h = \text{const}$ — толщина оболочки, $R_1 \approx \text{const}$, $R_2 \approx \text{const}$ — радиусы кривизн; $-N_1$, $-N_2$ — два постоянных нормальных сжимающих усилия.

Рассматривается прямоугольная шарнирно опертая по сторонам оболочка неотрицательной гауссовой кривизны

$$0 \leqslant x \leqslant a, \qquad 0 \leqslant y \leqslant b$$

Форма потери устойчивости оболочки с точностью до нормировочной постоянной

$$\Phi_{nm} = \sin k_n x \sin k_m y \quad (k_n = n\pi/a,\ k_m = m\pi/b,\ n, m = 1, 2, \ldots)$$

Собственные числа легко находятся

$$\lambda_{nm} = \frac{D(k_n^2 + k_m^2)^4 + Eh(R_2^{-1}k_n^2 + R_1^{-1}k_m^2)^2}{(\alpha_1 k_n^2 + \alpha_2 k_m^2)(k_n^2 + k_m^2)^2} \tag{1.2}$$

Замечание. Выписанное выражение (1.2) — асимптотика собственных чисел $n \to \infty$, $m \to \infty$ при произвольных граничных условиях, когда существует простой краевой эффект при устойчивости [1-3],

$$k_n = [n + O(\varepsilon)]\,\pi / a, \quad k_n = [n + {}^1/_2 + O(\varepsilon)]\,\pi / a, \quad k_n = [n + 1 + O(\varepsilon)]\,\pi / a$$

Здесь ε — малый параметр, характеризующий быстроту затухания краевого эффекта при устойчивости.

Аналогичные соотношения справедливы и для k_m. Разумеется, рассматриваются только те краевые условия, в которые параметр λ_{nm} не входит.

Используем асимптотическую формулу (1.2) для получения оценок плотности собственных чисел. Согласно идее Р. Куранта [4], будем определять приближенно число собственных чисел $A(\lambda_0)$, меньших заданного значения λ_0, как отношение площади области Ω на плоскости $k_n k_m$, внутри которой собственное число $\lambda < \lambda_0$, к площади одной ячейки $\Delta k_n \Delta k_m$, т. е.

$$A(\lambda_0) = \frac{1}{\Delta k_n \Delta k_m} \int\limits_{\Omega} dk_n dk_m \tag{1.3}$$

Вводятся обозначения

$$k_n^2 + k_m^2 = r^2, \quad \frac{k_m}{k_n} = \operatorname{tg}\theta, \quad \frac{Eh^3}{R_1^2} = \lambda^*, \quad \chi = \frac{R_1}{R_2}$$

Формула (1.2) приобретает вид

$$\lambda = \frac{Dr^4}{r^2(\alpha_1\cos^2\theta + \alpha_2\sin^2\theta)} + \frac{\lambda^*(\chi\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2}{h^2 r^2(\alpha_1\cos^2\theta + \alpha_2\sin^2\theta)} \tag{1.4}$$

Соотношение (1.3) в новых переменных

$$A(\lambda_0) = \frac{ab}{\pi^2} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \int\limits_0^r r\,dr\,d\theta$$

Если взять внутренний интеграл и подставить значение r^2 из формулы (1.4), то для среднего числа собственных чисел, меньших заданного значения λ_0 (далее значок у параметра λ всюду опускается), имеем

$$A(\lambda) = \frac{ab}{4\pi^2 D} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda(\alpha_1\cos^2\theta + \alpha_2\sin^2\theta)\,d\theta + \frac{ab}{4\pi^2 D} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \Big[\lambda^2(\alpha_1\cos^2\theta + \alpha_2\sin^2\theta)^2 - \\ - \frac{4D\lambda^*}{h^2}(\chi\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2\Big]^{1/2} d\theta \tag{1.5}$$

Интегрирование проводится по той части квадранта $k_n > 0$, $k_m > 0$, внутри которой выражение, стоящее в квадратных скобках, положительно.

После почленного дифференцирования формулы (1.5) для плотности собственных чисел получается соотношение

$$\frac{s(\lambda)}{s_0} = \frac{1}{s_0}\,\frac{dA(\lambda)}{d\lambda} = I_1 + I_2 \tag{1.6}$$

Функция $A(\lambda)$ — неубывающая функция. Поскольку выражение, стоящее под вторым интегралом, может быть значительно больше выражения, стоящего под первым интегралом, знак минус, который появляется при нахождении r^2 из (1.4), опустили еще в (1.5). В (1.6) введены обозначения

$$s_0 = \frac{ab}{4\pi}, \quad I_1 = \frac{1}{\pi D} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} (\alpha_1\cos^2\theta + \alpha_2\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$I_2 = B \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{[v^2 + 2v(1-v)\xi + (1-v)^2\xi^2]}{[\xi(1-\xi)(c_1-\xi)(c_2+\xi)]^{1/2}}, \quad \sin^2\theta = \xi$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = v \;(\alpha_2 \neq 0), \qquad \frac{4D\lambda^*}{\lambda\alpha_2{}^2h^2} = \eta^2, \qquad \frac{v - \eta\chi}{\eta(1-\chi) - (1-v)} = c_1$$

$$\frac{v + \eta\chi}{\eta(1-\chi) + (1-v)} = c_2, \qquad B = \frac{\alpha_2}{2\pi D\,[\eta^2(1-\chi)^2 - (1-v)^2]^{1/2}}$$

Если $\chi > v$, то оси x и y необходимо поменять местами и тогда получается разобранный случай $0 \leqslant \chi \leqslant v$, ибо рассматриваются оболочки только неотрицательной гауссовой кривизны.

При таких χ возможны четыре случая:

$$c_2 > 0, \; c_1 > 1; \quad c_2 > 0, \; c_1 < 1; \quad c_2 < 0, \; c_1 > 1; \quad c_2 < 0, \; c_1 < 1$$

Итак, первый случай $c_2 > 0$, $c_1 > 1$. Подкоренное выражение в I_2 будет положительным при $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, а весь интеграл сводится к выражению (см. [5])

$$I_2 = 2B^*\,[c_1(c_2+1)]^{-1/2}\,\{[v^2 - 2v(1-v)c_2 + {}^1/_2(1-v)^2c_1c_2(c_2+1)(c_2-1)]\times$$
$$\times K(q) - {}^1/_2(1-v^2)c_1(c_2+1)\,\mathrm{E}(q) + [2v(1-v)c_2 + {}^1/_2(1-v)^2c_1c_2(1-c_2+c_1)(c_2+1)^2]\,\Pi(\varkappa, q)\}$$

Здесь $K(q)$, $\mathrm{E}(q)$, $\Pi(\varkappa, q)$ — полные эллиптические интегралы в форме Лежандра первого, второго и третьего рода соответственно, причем

$$q = \left(\frac{2\eta(v-\chi)}{(v-\eta\chi)(\eta+1)}\right)^{1/2}, \quad \varkappa = \frac{\eta(1-\chi)+1-v}{\eta+1}, \quad 2B^* = \frac{\alpha_2[c_1(c_2+1)]^{1/2}}{\pi D[(v-\eta\chi)(1+\eta)]^{1/2}}$$

В этом случае

$$I_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)\,/\,4D$$

Остальные три случая и специальный случай, когда $\alpha_2 = 0$, рассматриваются аналогично.

§ 2. Все случаи можно объединить следующим образом:

при $v - \eta\chi < 0$

$$s(\lambda) = 0 \tag{2.1}$$

при $v - \eta\chi > 0$ $\qquad (\eta < 1)$

$$\frac{s(\lambda)}{s_0} = A_0 + \frac{\alpha_2\,[A_1K(q) + A_2\mathrm{E}(q) + A_3\Pi(\varkappa, q)]}{\pi D\,[(v-\eta\chi)(1+\eta)]^{1/2}}$$

$$\varkappa = \frac{\eta(1-\chi)+1-v}{\eta+1} \quad \text{или} \quad \varkappa = \frac{2\eta(v-\chi)}{[\eta(1-\chi)+1-v](v-\eta\chi)}$$

при $v - \eta\chi > 0$ $(\eta > 1)$

$$\frac{s(\lambda)}{s_0} = B_0 + \frac{\alpha_2\,[B_1K(q^{-1}) + B_2\mathrm{E}(q^{-1}) + B_3\Pi(-\varkappa, q)]}{\pi D\,[2\eta(v-\chi)]^{1/2}}$$

$$\varkappa = \frac{[\eta(1-\chi)+1-v](v-\eta\chi)}{2\eta(v-\chi)} \quad \text{или} \quad \varkappa = \frac{\eta+1}{\eta(1-\chi)+1-v}$$

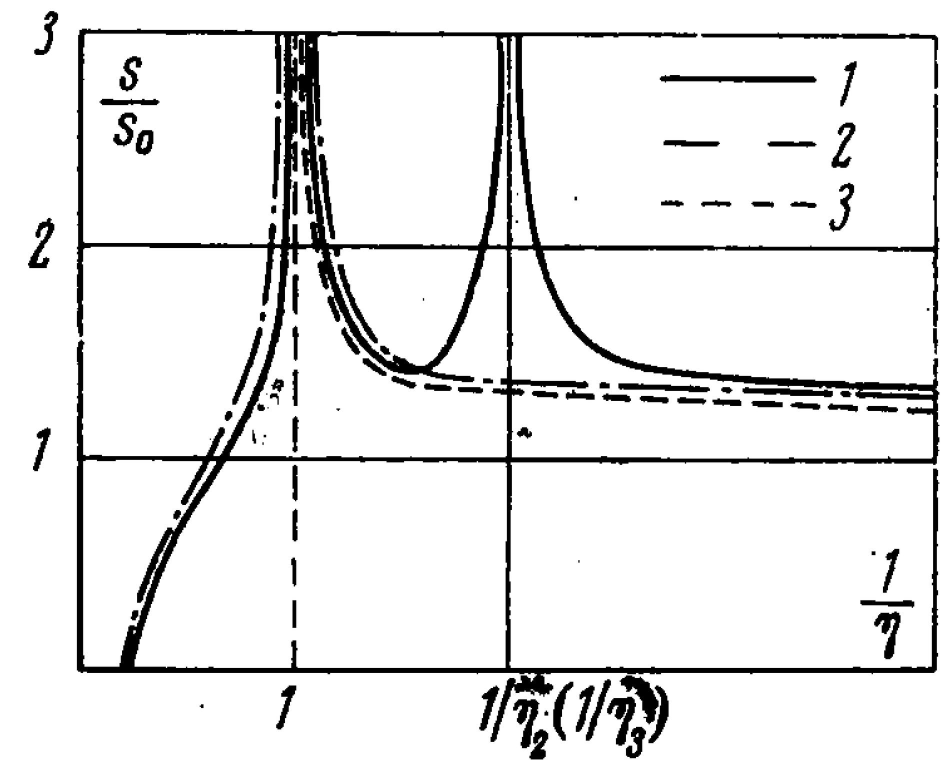
$$q = [2\eta(v-\chi)\,/\,(v-\eta\chi)(\eta+1)]^{1/2}$$

Здесь A_0, B_0 — некоторые постоянные: A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 зависят от v, c_1, c_2.

Формулы (2.1) позволяют обнаружить некоторые свойства плотности собственных чисел в задачах устойчивости тонких упругих оболочек. Как следует из формул, при $v - \eta\chi < 0$ плотность собственных чисел равна нулю (см. фигуру). На фигуре кривая *1* соответствует существованию двух полюсов при $\chi < 1$, кривая *2* — существованию только полюса η_1 при $\chi \geqslant 1$, кривая 3 — $\chi = v$.

При $v - \eta\chi > 0$ плотность собственных чисел отлична от нуля, причем при $\eta \to 0$ функция $s(\lambda)$ стремится к некоторой постоянной, связанной с плотностью собственных чисел в задачах устойчивости пластин, а при $\eta = 1$ функция $s(\lambda)$ имеет полюс (в самом деле, при $\eta = 1$ аргумент у каждого из полных эллиптических интегралов становится равным единице и интеграл расходится). Обозначим этот полюс η_1.

Так как каждый из коэффициентов, стоящих при интегралах ($\alpha_1 \neq \alpha_2$), может иметь особенность, у функции появляется еще один полюс, если $v < 1$, то этот полюс в точке $\eta = (1 - v) / (1 - \chi)$ (знаменатель c_1 обращается в нуль). Обозначим его η_2. Если же $v > 1$ и $\chi < 1$, то полюс в точке $\eta = (v - 1) / (1 - \chi)$ (знаменатель c_2 обращается в нуль). Этот полюс обозначим η_3. В том случае, когда $v > 1$ и $\chi \geqslant 1$, $1 / \eta < \chi / v$ и, значит, второй полюс отсутствует. Так как $v > \chi$, то $\eta_2 < \eta_1$. Величина η_3 в зависимости от величин v и χ может быть и больше и меньше η_1.



Наконец, в том случае, когда v совпадает с χ

$$\frac{s(\lambda)}{s_0} = \frac{c_0}{(1 - \eta^2)^{1/2}} \qquad (c_0 = \mathrm{const})$$

существует только один полюс в точке $\eta = 1$. Именно этот случай, вероятно, имеет существенное значение для прикладных задач, поскольку распределение собственных чисел начинается с точки сгущения. К этому классу задач относятся задачи об устойчивости продольно сжатой цилиндрической оболочки и сферы при гидростатическом давлении. Как известно, эти задачи решены в классической постановке без определения форм потери устойчивости [6].

В специальном случае ($\alpha_2 = 0$) первый полюс η_1 отсутствует, а может существовать полюс в точке $\eta = 1 / (1 - \chi)$ при $\chi < 1$, либо в точке $\eta = 1 / (\chi - 1)$ при $\chi > 1$. Однако при $\chi = 1$ и этот полюс не существует.

При равенстве сжимающих напряжений ($\alpha_1 = \alpha_2$) функция $s(\lambda)$ имеет только один полюс в точке $\eta = 1$, ибо в формулах эллиптические интегралы второго и третьего рода исчезают за счет обращения в нуль коэффициентов при них. Последний случай очень напоминает результаты, полученные для собственных частот оболочек в [7,8].

§ 3. Распределение собственных значений может оказаться полезным при решении задач устойчивости, когда имеются малые возмущения, например малый начальный прогиб. Формально линейное уравнение, описывающее устойчивость, при наличии малых возмущений имеет вид

$$A\Phi - \lambda B\Phi = f(x, y) \tag{3.1}$$

Здесь A и B — некоторые положительно определенные операторы, λ — параметр нагрузки, $f(x, y)$ — функция, характеризующая малые возмущения. Краевые условия для (3.1) — однородные условия.

Пусть известны при некоторых граничных условиях собственные функции Φ_{nm} и соответствующие собственные числа λ_{nm} задачи

$$A\Phi_{nm} - \lambda_{nm} B\Phi_{nm} = 0$$

причем для первых выполняются условия ортогональности и нормировки

$$(\Phi_{ij}, B\Phi_{nm}) = \delta_{in}\delta_{jm}$$

Здесь δ_{in}, δ_{jm} — символы Кронекера. Решение (3.1) представим в виде

$$\Phi = \sum_{n,m} \alpha_{nm}\Phi_{nm}, \quad \alpha_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm} - \lambda}, \quad f_{nm} = (\Phi_{nm}, f) \tag{3.2}$$

Если параметр λ равен наименьшему собственному числу Λ_{NM} ($\lambda = \Lambda_{NM}$), то для разрешимости (3.1)

$$(\Phi_{NM}, f) \equiv 0 \tag{3.3}$$

Здесь индексами N и M обозначены собственные функции, соответствующие Λ_{NM}. Условие (3.3) — аналог условия существования решения неоднородного уравнения Гельмгольца, когда характеристический параметр совпадает с собственным числом.

Выше было установлено, что иногда распределение собственных чисел начинается с точки сгущения, т. е. бесконечно большое число разных собственных функций имеет совпадающие собственные значения.

При $\lambda \to \Lambda_{NM}$ все $\alpha_{NM} \to \infty$, причем $\alpha_{NM}/\alpha_{N_0M_0} = O(1)$, если f_{NM} имеют один порядок малости в (3.2). Следовательно, представление оболочки с малой начальной неправильностью в виде системы с одной степенью свободы может привести к большим погрешностям [9–11] в этом случае.

В случае, когда наименьшему собственному числу отвечает всего одна собственная функция Φ_{NM}, условие разрешимости (3.3) выполняется проще, и подмена системы с бесконечным числом степеней свободы системой с одной степенью свободы не приведет к большим ошибкам.

Условию разрешимости (3.3) можно дать другую интерпретацию. Достаточно вспомнить [11], что эксперименты по устойчивости продольно сжатой цилиндрической оболочки и сферической оболочки при гидростатическом давлении имеют колоссальный разброс, и, кроме этого, как правило, величина экспериментальной критической нагрузки оказывается значительно меньше классической нагрузки. Ни в одном эксперименте не было получено нагрузок, совпадающих с классической критической нагрузкой. Это связано с тем, что

$$\alpha_{NM} \to \infty \quad \text{при } \lambda \to \Lambda_{NM} \quad (f_{NM} \neq 0)$$

Именно в этих задачах распределение собственных чисел начинается с точки сгущения.

В экспериментах по устойчивости цилиндрических оболочек при внешнем поперечном или при всестороннем гидростатическом давлении [11] разброс значительно меньше, даже имеются отдельные эксперименты, в которых критическая нагрузка превышает классическую. Для этих задач наименьшему собственному числу соответствуют всего две собственные функции, а изменение граничных условий (типа шарнирного опирания) не сказывается существенно на величине критического давления, так как существует простой краевой эффект при устойчивости [2].

Поступила 15 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. Корнев В. М. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, нагруженной внешним поперечным давлением, с учётом краевого эффекта. Инж. ж. МТТ, 1967, № 3.
3. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I. Усп. матем. н., 1960, т. 15, вып. 3.
4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
6. Власов В. З. Избранные труды, т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1962.
7. Болотин В. В. О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
8. Болотин В. В. Плотность собственных значений в задачах о колебаниях упругих пластин и оболочек. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок (Баку, 1966), М., «Наука», 1966.
9. Donnell L. H., A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compressiton and bending. Trans. ASME, 1934, vol. 56, No. 10.
10. Karman Th., Tsien H. S. The buckling of thin cylindrical shells under axial compressiton. J. Aeronaut. Sci., 1941, vol. 8, No. 8.
11. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М., Физматгиз, 1963.