ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
2. Григорян С. С. О приближенном решении некоторых задач динамики грунтов. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
3. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров, М., «Наука», 1968.
4. Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В. Некоторые экспериментальные исследования по динамике мягких грунтов. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 6.
5. Григорян С. С., Черноусько Ф. Л. Одномерные квазистатические движения грунта. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Л. Я. Айнола

(Таллин)

Рассматривается задача определения малых изменений геометрических параметров упругих тел; при этом предполагается, что спектр частот их собственных колебаний должен иметь заданные малые изменения. Применяется метод малого параметра, задача сводится к решению l-проблемы моментов. В качестве примера рассматриваются задача определения переменной жесткости упругой балки, а также задача определения формы меридианы оболочки вращения по заданным частотам собственных колебаний.

Следует указать, что наиболее исчерпывающие результаты по подобного рода проблемам имеются для обратной задачи Штурма — Лиувилля [1,2], а также для обратной задачи квантовой теории рассеяния [3,4].

Обратным задачам колебаний упругих тел посвящено только несколько работ. Математически строго исследована лишь задача определения плотности неоднородной струны по спектрам ее частот [5-7]. В элементарной постановке задача определения жесткости балки по заданным частотам собственных колебаний рассмотрена в работе [8]. Более подробно эта же задача для балки и пластинки рассмотрена в работах [9,10], где дается способ построения переменной толщины по заданным нескольким первым частотам собственных колебаний и на примерах демонстрируется его численная реализация. Настоящая работа есть развитие этих работ.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую обратную задачу собственных колебаний, вытекающую из первой части работы [7], в предположении малости приращений собственных частот.

Пусть имеется самосопряженная задача на собственных значениях

$$Au - \lambda Bu = 0, \qquad G_i u = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 2n) \tag{1.1}$$

где

$$Au = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [a_i(\alpha, x) u^{(i)}]^{(i)} \tag{1.2}$$

$$Bu = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i [b_i(\alpha, x) u^{(i)}]^{(i)}, \quad m < n$$

и через $G_i u$ обозначены граничные условия

$$u^{(k)} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \quad \text{при } x = x_0, x_1 \tag{1.3}$$

Пусть при некоторой функции $\alpha(x) = \alpha_0(x)$ собственные значения задачи (1.1) будут

$$0 < \lambda_{01} < \lambda_{02} < \ldots, \tag{1.4}$$

Задача состоит в определении функции $\alpha(x)$ так, чтобы собственные значения (1.4) имели бы заданные малые изменения, т. е. надо найти функцию $\alpha(x)$ при помощи заданного спектра собственных значений задачи (1.1)

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \varepsilon\lambda_{1i} \tag{1.5}$$

где ε — малое число.

Принимаем ε за малый параметр и предположим, что функция $\alpha(x)$, операторы A, B и собственные функции u_i разложимы в ряд по этому параметру

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \ldots, & u_i &= u_{0i} + \varepsilon u_{1i} + \ldots \\ A &= A_0 + \varepsilon A_1 + \ldots, & B &= B_0 + \varepsilon B_1 + \ldots \end{aligned} \tag{1.6}$$

где

$$A_1 u = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left[\alpha_1 \frac{\partial a_i(\alpha_0, x)}{\partial\alpha} u^{(i)}\right]^{(i)}, \quad B_1 u = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \left[\alpha_1 \frac{\partial b_i(\alpha_0, x)}{\partial\alpha} u^{(i)}\right]^{(i)} \tag{1.7}$$

Подставляя величины (1.5), (1.6) в уравнение и граничные условия (1.1) найдем, что

$$A_0 u_{0i} - \lambda_{0i} B_0 u_{0i} = 0, \qquad G_j u_{0i} = 0 \tag{1.8}$$

$$A_0 u_{1i} - \lambda_{0i} B_0 u_{1i} = \lambda_{0i} B_1 u_{0i} + \lambda_{1i} B_0 u_{0i} - A_1 u_{0i}$$

$$G_j u_{1i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots; \ j = 1, \ldots, 2n) \tag{1.9}$$

Уравнения (1.9) связывают заданные собственные частоты λ_{1i} с искомой функцией $\alpha_1(x)$.

Уравнения (1.9) имеют нетривиальные решения в случае, если их правые части будут ортогональными с решениями задачи (1.8). Учитывая условия нормирования

$$\int_{x_0}^{x_1} u_{0i} B_0 u_{0i} dx = 1 \tag{1.10}$$

условия ортогональности принимают вид

$$\lambda_{1i} = \int_{x_0}^{x_1} (u_{0i} A_1 u_{0i} - \lambda_{0i} u_{0i} B_1 u_{0i})\, dx \tag{1.11}$$

Подставляя A_1, B_1 по соотношениям (1.7) в условия (1.11) и учитывая однородность граничных условий (1.9), можно условия (1.11) преобразовать к виду

$$\lambda_{1i} = \int_{x_0}^{x_1} \alpha_1(x)\, g_i(x)\, dx \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{1.12}$$

где

$$g_i(x) = \sum_{s=0}^{n} \frac{\partial a_s(\alpha_0, x)}{\partial\alpha} (u_{0i}^{(s)})^2 - \lambda_{0i} \sum_{s=0}^{m} \frac{\partial b_s(\alpha_0, x)}{\partial\alpha} (u_{0i}^{(s)})^2 \tag{1.13}$$

Соотношениями (1.12) даны моменты искомых функций $\alpha_1(x)$ относительно функций $g_i(x)$. Предположим, что $g_i(x)$ — линейно независимые функции, принадлежат пространству измеримых и интегрируемых по модулю с p-й степенью функции L^p; функцию $\alpha_1(x)$ будем считать принадлежащей к пространству $L^{p'}$, где $1/p + 1/p' = 1$ и, кроме того, ограниченной по норме

$$\|\alpha_1(x)\| \leqslant l \tag{1.14}$$

Тогда рассматриваемую задачу можно свести к решению l-проблемы моментов [11,12]. В данном случае l-проблема моментов состоит в том, чтобы указать условия, необходимые и достаточные для существования функции $\alpha_1(x) \in L^{p'}$, удовлетворяющей условию (1.14) и имеющей в качестве своих моментов относительно функций $g_i(x)$ числа λ_{1i}.

Итак, обратную задачу собственных колебаний при определенных предположениях можно свести к хорошо разработанной l-проблеме моментов. В следующих пунктах приводятся некоторые примеры решения конкретных задач колебания упругих тел таким методом.

2. Обратная задача свободных колебаний балки. Рассмотрим задачу определения размеров подобных поперечных сечений шарнирно опертой балки по заданным частотам ее собственных колебаний.

Дифференциальное уравнение для этой задачи можно представить в виде

$$(\alpha^2 y'')'' - \lambda\alpha y = 0 \tag{2.1}$$

где $\alpha(x)$ — искомая функция, характеризующая поперечное сечение. Граничные условия следующие:

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0 \tag{2.2}$$

Исходим из случая постоянного поперечного сечения $\alpha_0 = 1$. Тогда собственные значения и нормированные собственные функции задачи (2.1), (2.2) имеют вид

$$\lambda_{0i} = i^4\pi^4, \qquad y_{0i} = \sqrt{2}\sin i\pi x \tag{2.3}$$

Определим теперь функцию $\alpha(x)$ для случая, когда первые k из собственных значений мало отличаются от значений (2.3), а остальные собственные значения совпадают с значениями (2.3), т. е. для случая

$$\lambda_i = i^4\pi^4 + \varepsilon_i \tag{2.4}$$

где ε_i — малые числа, если $i \leqslant k$, и $\varepsilon_i = 0$, если $i > k$.

По соотношениям (1.13), (2.3) имеем

$$g_i(x) = 2i^4\pi^4 \sin^2 i\pi x = i^4\pi^4(1 - \cos 2i\pi x) \tag{2.5}$$

Поэтому в рассматриваемом случае

$$\varepsilon_i = i^4\pi^4 \int_0^1 \alpha_1(1 - \cos 2i\pi x)\,dx \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

Рассмотрим задачу в пространстве L^2, прибавляя к соотношениям (2.6) условие

$$\|\alpha_1\| = \left(\int_0^1 \alpha_1^2(x)\,dx\right)^{1/2} \leqslant l \tag{2.7}$$

Из теории l-проблемы моментов известно [12], что необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы (2.6), (2.7) является разрешимость всех конечно-мерных l-проблем, которые получаются из (2.6), (2.7), если $i = 1, \ldots, n$, где n — конечное фиксированное число. Для разрешимости последней проблемы моментов необходимо и достаточно, чтобы существовало n чисел $\xi_1^\circ, \ldots, \xi_n^\circ$, дающих решение следующей задачи: найти

$$\min_{\xi_1,\ldots,\xi_n} \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n \xi_i g_i(x)\right|^2 dx = \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n \xi_i^\circ g_i(x)\right|^2 dx = \frac{1}{\Lambda^2} \geqslant \frac{1}{l^2} \tag{2.8}$$

при условии

$$\xi_1\varepsilon_1 + \ldots + \xi_n\varepsilon_n = 1 \tag{2.9}$$

При этом решение $\alpha_1(x)$ конечно-мерной l-проблемы моментов выражается в виде

$$\alpha_1(x) = \Lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^\circ g_i(x) \tag{2.10}$$

Учитывая соотношения (2.5), (2.6) и используя правило множителей Лагранжа, решение задачи (2.8), (2.9) можно найти как решение системы

$$\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \xi_i \varepsilon_i = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.11}$$

где

$$f(\xi) = \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i i^4 \pi^4 (1 - \cos 2i\pi x)\right]^2 dx - \mu\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varepsilon_i - 1\right) \tag{2.12}$$

и μ — множитель Лагранжа. Легко найти, что

$$\xi_i^\circ = \frac{\mu}{i^4\pi^4} \sum_{s=1}^{k} \left(\delta_{is} - \frac{2}{2n+1}\right) \frac{\varepsilon_s}{s^4\pi^4} \tag{2.13}$$

где

$$\mu = \left[\sum_{s=1}^{k} \left(\frac{\varepsilon_s}{s^4\pi^4}\right)^2 - \frac{2}{2n+1}\left(\sum_{s=1}^{k} \frac{\varepsilon_s}{s^4\pi^4}\right)^2\right]^{-1} \tag{2.14}$$

Если вычислить минимальное значение интеграла (2.8), используя соотношения (2.13), (2.14), то получится

$$\frac{1}{\Lambda^2} = \frac{1}{2}\mu \geqslant \frac{1}{l^2} \tag{2.15}$$

Подставляя найденные величины (2.13), (2.15) в условие (2.10), найдем искомую функцию

$$\alpha_1(x) = 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} \left(\delta_{is} - \frac{2}{2n+1}\right) \frac{\varepsilon_s}{s^4\pi^4} (1 - \cos 2i\pi x) \tag{2.16}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ из соотношений (2.14) — (2.16) вытекает, что если

$$l^2 \geqslant 2 \sum_{s=1}^{k} \left(\frac{\varepsilon_s}{s^4\pi^4}\right)^2 \tag{2.17}$$

то рассматриваемая обратная задача колебания имеет решение

$$\alpha_1(x) = -2 \sum_{s=1}^{k} \frac{\varepsilon_s}{s^4\pi^4} \cos 2s\pi x \tag{2.18}$$

Для случая равенства в соотношении (2.17) это решение единственное. В случае неравенства задача имеет континуум решений.

3. Обратная задача свободных колебаний безмоментной оболочки. В качестве примера применения предложенного метода для решения обратных задач свободных колебаний оболочек рассмотрим осесимметричные колебания оболочки вращения, мало отличающиеся по форме от цилиндрической.

Если в качестве координаты на срединной поверхности взять длину дуги, то задача описывается следующими уравнениями в безразмерных величинах:

$$T_1 = u' - k_1 w + \nu \frac{B'}{B} u - \nu k_2 w, \qquad (BT_1)' - B'T_2 + \lambda u = 0 \tag{3.1}$$

$$T_2 = \frac{B'}{B} u - k_2 w + \nu u' - \nu k_1 w, \qquad k_1 T_1 + k_2 T_2 + \lambda w = 0$$

Здесь T_1, T_2 — напряжения, u, w — перемещения, k_1, k_2 — кривизны, B — расстояние до оси вращения, λ — параметр частоты.

В дальнейшем используем условия Гаусса и Кодацци для оболочек вращения

$$Bk_1k_2 = -B'' \qquad (Bk_2)' = k_1 B' \tag{3.2}$$

Исходим из решения задачи для цилиндрической оболочки, которые получаются из (3.1) при $B_0 = 1$, $k_{01} = 0$, $k_{02} = 1$

$$u_0'' - \nu w_0' + \lambda_0 u_0 = 0, \qquad -w_0 + \nu u_0' + \lambda_0 w_0 = 0 \tag{3.3}$$

Пусть граничные условия задачи имеют вид

$$u_0(0) = 0, \qquad u_0(L) = 0 \tag{3.4}$$

Вытекающие из уравнений (3.3) и граничных условий (3.4) собственные формы и собственные значения имеют вид

$$u_{0n} = C_n \sin s_n \beta, \qquad w_{0n} = \frac{\nu s_n}{1 - \lambda_{0n}} C_n \cos s_n \beta \tag{3.5}$$

$$C_n^2 = 2L \left[L^2 + \left(\frac{\nu n \pi}{1 - \lambda_{0n}} \right)^2 \right]^{-1} \qquad s_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\lambda_{0n}^{\pm} = {}^1/_2 (1 + s_n^2) \pm {}^1/_2 \sqrt{(1 + s_n^2)^2 - 4(1 - \nu^2) s_n^2} \tag{3.6}$$

Найдем теперь форму оболочки вращения такую, чтобы ее первые собственные значения λ_{0n}^{+} отличались от значений (3.6) заданными малыми числами ε_i. Искомыми функциями в рассматриваемой задаче будут $k_1(\beta)$, $K_2(\beta)$ и $B(\beta)$. Но две из этих функций можно выразить через третью, если использовать условия Гаусса и Кодацци (3.2). Методом малого параметра из этих условий получается, что первые члены в разложении по малому параметру связаны соотношениями

$$k_{11} = -B_1'', \qquad k_{12} = -B_1 \tag{3.7}$$

Учитывая соотношения (3.7), метод, описанный в п.1, позволяет в данном случае для функции B_1 вывести следующие моменты:

$$\varepsilon_i^* = \int_0^L B_1(\beta)\, g_i(\beta)\, d\beta \tag{3.8}$$

Здесь

$$\varepsilon_i^* = \varepsilon_i - 2C_i^2 \frac{\lambda_{0i}}{1 - \lambda_{0i}} [B_1'(L) - B_1'(0)] \tag{3.9}$$

($\varepsilon_i = 0$ для $i = k+1,\ k+2, \ldots$).

$$g_i(\beta) = 2\,[(u_{0i}' - \nu w_{0i})\, w_{0i}]'' + \lambda_{0i} (u_{0i} w_{0i})' - 2\lambda_{0i} (u_{0i}^2 + w_{0i}^2) \tag{3.10}$$

В отличие от предыдущего примера в этой задаче содержится дополнительный член, обусловленный тем обстоятельством, что по соотношению (3.7) в формулировке задачи вводят и вторые производные от искомой функции $B_1''(\beta)$. Неизвестный множитель

$B_1'(L) - B_1'(0)$ в дополнительном члене при решении l-проблемы моментов можно рассматривать как параметр, значение которого определяется после решения задачи при помощи найденного решения $B_1(\beta)$.

По соотношениям (3.5), (3.10) имеем

$$g_i(\beta) = A_i - D_i \cos 2s_i\beta \tag{3.11}$$

$$A_i = \frac{(1 - s_i^2)\lambda_{0i}}{2(1 - \lambda_{0i})}, \qquad D_i = \frac{[(1 + 2\nu)s_i^2 - 1]\lambda_{0i}}{2(1 - \lambda_{0i})} \tag{3.12}$$

Решая аналогично предыдущему примеру n-мерную l-проблему моментов (3.8) при условии

$$\int\limits_0^L B_1^2(\beta)\, d\beta \leqslant l^2 \tag{3.13}$$

имеем

$$\xi_i^0 = \frac{\mu}{LA_i} \sum_{s=1}^{n} \left\{\delta_{is} - 2\left[\gamma_{ii}\left(2\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{\gamma_{rr}} + 1\right)\right]^{-1}\right\} \frac{\varepsilon_s^*}{A_s\gamma_{ss}} \tag{3.14}$$

$$\mu = L\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i^2}{D_i^2} - 2\left(2\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{\gamma_{rr}} + 1\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{A_i\gamma_{ii}}\right)^2\right]^{-1} \tag{3.15}$$

Можно показать, что в рассматриваемом случае соотношение (2.15) остается в силе. Соответственно

$$B_1(\beta) = \frac{2}{L}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left[\delta_{is} - \frac{2}{\gamma_{ii}}\left(2\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{\gamma_{ii}} + 1\right)^{-1}\right]\frac{\varepsilon_s^*}{A_s\gamma_{ss}}\left(1 - \frac{D_i}{A_i}\cos 2s_i\beta\right) \tag{3.16}$$

Из выражений (3.9), (3.16) видно, что

$$B_1'(L) = B_1''(0) = 0, \qquad \varepsilon_i^* = \varepsilon_i \tag{3.17}$$

Переходя в соотношениях (3.15), (3.16) к пределу при $n \to \infty$, получаем окончательно, что рассматриваемая обратная задача колебания оболочек имеет решение, если

$$\frac{2}{L}\sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon_i^2}{D_i^2} \leqslant l^2 \tag{3.18}$$

Решение имеет вид

$$B_1(\beta) = -2\sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon_i}{D_i} \cos 2s_i\beta \tag{3.19}$$

и является для случая равенства в соотношении (3.18) единственным.

Поступила 13 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельдфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1951, т. 15, вып. 4.
2. Левитан Б. М., Гасымов М. Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам. Усп. матем. н., 1964, т. 14, вып. 2 (116), стр. 3—63.
3. Фаддеев Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. Усп. матем. н., 1959, т. 14, вып. 4 (88), стр. 57—119.
4. Агранович З. С., Марченко В. А. Обратная задача теории рассеяния Харьков, Изд-во Харьковск. ун-та, 1960.
5. Крейн М. Г. Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот. Докл. АН СССР, 1951, т. 76, № 3.
6. Крейн М. Г. Об обратных задачах для неоднородной струны. Докл. АН СССР, 1952, т. 82, № 5.

7. Крейн М. Г. О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции. Докл. АН СССР, 1953, т. 93, № 4.
8. Eisner E., Inverse design for flexural vibrators. J. Acoust. Soc. America, 1966, vol. 40, No. 4, pp. 773—775.
9. Niordson F. J. A method for solving inverse eigenvalue problems. Recent Progress in Applied Mechanics. The Folk Odqvist Volume. Stockholm, 1967, pp. 373—382.
10. Ниордсон Ф. И. Обратная задача о собственных частотах упругих пластинок. III Всес. съезд по теорет. и прикл. механ., Аннот. докл., М., 1968, стр. 230, 231.
11. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, ГОНТИ Укр., 1938.
12. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965.

О ПЛОТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Н. Н. Бендич, В. М. Корнев

(Новосибирск)

Определяются асимптотические оценки для плотности собственных значений. Установлено существование точек сгущения собственных чисел. Проведено сравнение результатов для собственных частот оболочек и собственных значений в задачах устойчивости. Выписаны условия разрешимости линейного уравнения, описывающего устойчивость при наличии малых возмущений.

§ 1. Уравнение устойчивости при заданных усилиях в срединной поверхности оболочки, радиусы кривизны которой близки к постоянным, имеет вид

$$D\Delta\Delta\Delta\Delta\Phi_{nm} + Eh\Delta_k\Delta_k\Phi_{nm} + \lambda_{nm}\Delta\Delta(\alpha_1\Phi_{,xx} + \alpha_2\Phi_{,yy}) = 0 \tag{1.1}$$

$$\alpha_1\lambda_{nm} = N_1, \quad \alpha_2\lambda_{nm} = N_2 \quad (0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant 1), \qquad w = \Delta\Delta\Phi$$

$$\Delta\Phi = \Phi_{,xx} + \Phi_{,yy}, \quad \Delta_k\Phi = R_2^{-1}\Phi_{,xx} + R_1^{-1}\Phi_{,yy}, \quad \varphi = Eh\Delta_k\Phi$$

Здесь x, y — декартовы координаты, $w(x, y)$ — нормальный прогиб оболочки, $\varphi(x, y)$ — функция напряжений, Φ — разрешающая функция; D — цилиндрическая жесткость, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, h = const — толщина оболочки, $R_1 \approx$ const, $R_2 \approx$ const — радиусы кривизн; $-N_1$, $-N_2$ — два постоянных нормальных сжимающих усилия.

Рассматривается прямоугольная шарнирно опертая по сторонам оболочка неотрицательной гауссовой кривизны

$$0 \leqslant x \leqslant a, \qquad 0 \leqslant y \leqslant b$$

Форма потери устойчивости оболочки с точностью до нормировочной постоянной

$$\Phi_{nm} = \sin k_n x \sin k_m y \qquad (k_n = n\pi/a,\ k_m = m\pi/b,\ n, m = 1, 2, \ldots)$$

Собственные числа легко находятся

$$\lambda_{nm} = \frac{D(k_n^2 + k_m^2)^4 + Eh(R_2^{-1}k_n^2 + R_1^{-1}k_m^2)^2}{(\alpha_1 k_n^2 + \alpha_2 k_m^2)(k_n^2 + k_m^2)^2} \tag{1.2}$$

Замечание. Выписанное выражение (1.2) —асимптотика собственных чисел $n \to \infty$, $m \to \infty$ при произвольных граничных условиях, когда существует простой краевой