

ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРАНДТЛЯ — РЕЙССА

[А. М. Скобеев]

(Москва)

Рассматриваются полные динамические уравнения Прандтля — Рейсса [1] в прямоугольной области. Приводится точное решение задачи, отвечающей некоторым специально подобранным граничным и начальным условиям.

Полученное решение используется для оценки справедливости некоторых допущений, применяемых для приближенного решения этих уравнений [2].

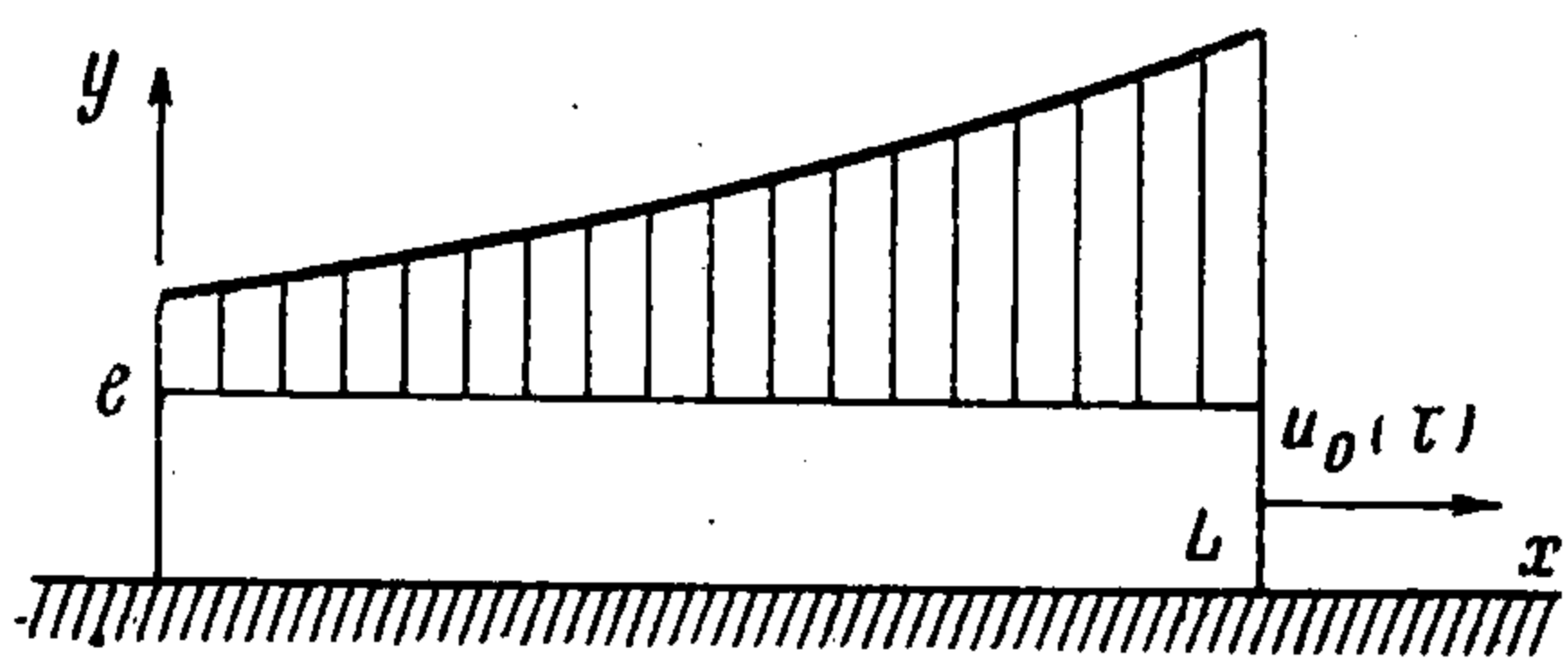
1. Уравнения Прандтля — Рейсса применяются для описания динамических процессов в таких различных средах, как металлы и грунты. Эти уравнения имеют вид

$$s_{ij}s_{ij} = T(p), \quad ds_{ij}/dt + \lambda s_{ij} = 2Ge_{ij} \quad (1.1)$$

где

$$s_{ij} = -\sigma_{ij} + p\delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3\varepsilon_{ll}\delta_{ij}, \quad \lambda = (2Ge_{ij}s_{ij} - 1/2dT/dt)/T$$

Здесь σ_{ij} и ε_{ij} — тензоры напряжений и скоростей деформации, $p = 1/3\sigma_{ii}$ — давление, G — модуль сдвига, оператор d/dt означает абсолютную производную в смысле [3], стр. 458. (Предполагается, что по повторяющимся индексам $i, j, k = 1, 2, 3$ производится суммирование. За положительные — принимаются сжимающие напряжения.)



Фиг. 1

Здесь σ_{ij} и ε_{ij} — тензоры напряжений и скоростей деформации, $p = 1/3\sigma_{ii}$ — давление, G — модуль сдвига, оператор d/dt означает абсолютную производную в смысле [3], стр. 458. (Предполагается, что по повторяющимся индексам $i, j, k = 1, 2, 3$ производится суммирование. За положительные — принимаются сжимающие напряжения.)

Первое из уравнений (1.1) есть условие пластичности Мизеса. Входящая в него функция $T(p)$ принимается в виде $T = 2(kp + b)^2$; где k и b — константы. Конкретный вид $T(p)$ выбран нами из соображений математического удобства. Однако и экспериментальные данные для грунта [4] дают именно такую зависимость.

Остальные уравнения (1.1) выражают условие коаксиальности тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций; λ выбрана так, чтобы условие пластичности было следствием этих уравнений. При этом предполагается, что $\lambda > 0$; если получается, что $\lambda \leq 0$, то (1.1) следует заменить на обычные уравнения упругости.

Систему уравнений (1.1) следует замкнуть какой-нибудь связью между давлением и плотностью, которая может быть достаточно сложной, например иметь гистерезисные петли.

Пока неизвестно ни одного сколько-нибудь общего решения уравнений (1.1), поэтому при решении конкретных задач эти уравнения обычно упрощаются. Например, в задачах, связанных с распространением взрывных волн в грунте, часто можно выделить фронт ударной волны и область разгрузки. Тогда из (1.1) и связи между давлением и плотностью иногда можно извлечь простое уравнение ударного нагружения. В области разгрузки можно пытаться описывать среду как идеальную жидкость или считать, что все величины зависят только от одной переменной (метод столбиков) и т. д.

Такое упрощение «применительно к данному случаю» несовершенно с логической точки зрения, однако иногда позволяет сносно описать явление.

Далее рассматривается специально подобранная краевая задача, позволяющая получить точное решение уравнений (1.1) совместно с уравнениями движения. Та же задача решается приближенно методом столбиков и для идеальной жидкости. Полученные решения сравниваются.

2. Пусть в плоскости xy среда занимает прямоугольник $l \geq y \geq 0, L \geq x \geq 0$ (фиг. 1). На верхней стороне прямоугольника задано нормальное напряжение, на остальных — нормальная скорость. Касательные напряжения на границе равны нулю. Среда несжимаема и находится в условиях плоской деформации. Определяющие уравнения вначале принимаются вида (1.1). Плотность принимается равной единице.

Положительными считаются сжимающие напряжения.

В этих обозначениях уравнения движения и уравнения неразрывности принимают вид

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial \sigma_2}{\partial y} - \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u \partial}{\partial x} + \frac{v \partial}{\partial y}$$

Здесь $\sigma_1 = \sigma_{xx}$, $\sigma_2 = \sigma_{yy}$, $\tau = \sigma_{xy}$ — напряжения; u, v — скорости по x и y .

Из (1.1) для несжимаемой среды в условиях плоской деформации следует $p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$. Тогда (1.1) можно записать в виде

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_2)}{dt} + \lambda(\sigma_1 - \sigma_2) = 2G \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{d\tau}{dt} + \lambda\tau = -G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\tau^2 = 4(kp + b)^2 \quad (2.3)$$

где λ то же, что и в (1.1). Пусть на верхней стороне прямоугольника граничное условие задано в виде

$$\sigma_2 = q_0(t) + q_1(t)x^2 \equiv Q(t, x) \quad (2.4)$$

на остальных сторонах $u = 0$ при $x = 0$, $u = u_0(t)$ при $x = L$, $v = 0$ при $y = 0$.

При этом считается, что $q_1(t)$ и $u_0(t)$ связаны соотношением

$$(1 + k)(Ldu_0/dt + u_0^2(t)) + 2L^2(1 - k)q_1(t) = 0 \quad (2.5)$$

Начальные условия принимаются такими

$$\tau = 0, \quad \sigma_1 = \frac{1-k}{1+k}\sigma_2 - \frac{2}{1+k}b, \quad u = u_0(0)\frac{x}{L}, \quad v = -u_0(0)\frac{y}{L}$$

$$\sigma_2 = q_0(0) + q_1(0)x^2 + \frac{l^2 - y^2}{2} \left(\frac{u_0^2(0)}{L^2} - \frac{1}{L} \frac{du_0}{dt} \right) \quad \text{при } t = 0 \quad (2.6)$$

Эти условия содержат только две произвольные функции времени, зависимость от координат зафиксирована.

Такой специальный выбор начальных и граничных условий сделан потому, что задача в этом случае имеет простое решение, которое дается формулами (2.5), (2.6), если вместо $q_0(0)$, $q_1(0)$ и $u_0(0)$ в эти формулы подставить $q_0(t)$, $q_1(t)$ и $u_0(t)$.

Формулы (2.5), (2.6) просто угаданы; тот факт, что они дают решение задачи, проверяется простой подстановкой.

Действительно, так как u не зависит от y , v от x , а $\tau = 0$, то первое из уравнений (2.3) удовлетворяется. Из выражения для σ_1 видно, что выполняется и второе из уравнений (2.3). Уравнение (2.2) следствие из (2.3). Наконец, если подставить (2.5), (2.6) в (2.1), то после несложных выкладок можно убедиться, что эти уравнения также выполнены. Что касается условия $\lambda > 0$, то с учетом $\tau = 0$ оно принимает вид

$$4G(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dT}{dt} < 0 \quad (2.7)$$

Чтобы это условие выполнялось, достаточно потребовать $u_0 > 0$, $p > 0$ (материал сжат) и $p_t' < 0$ (разгрузка).

Легко показать, что если граничные условия удовлетворяют неравенствам $q_0(t) > b$, $q_1(t) > 0$, $q_1'(t) < 0$, $q_0'(t) < 0$, $u_0(t) > 0$, то условие (2.7) выполняется. В дальнейшем эти неравенства предполагаем выполненными.

Входящая в (2.5), (2.6) величина u_0^2 соответствует конвективным членам в уравнениях движения (2.1). Часто эти члены вообще отбрасывают. Полученное решение позволяет оценить возникающую при этом погрешность.

Так как u_0^2 входит в уравнение только в комбинации $u_0^2 \pm u_0' L$, то конвективными членами можно пренебрегать, если $u_0^2 \ll u_0' L$.

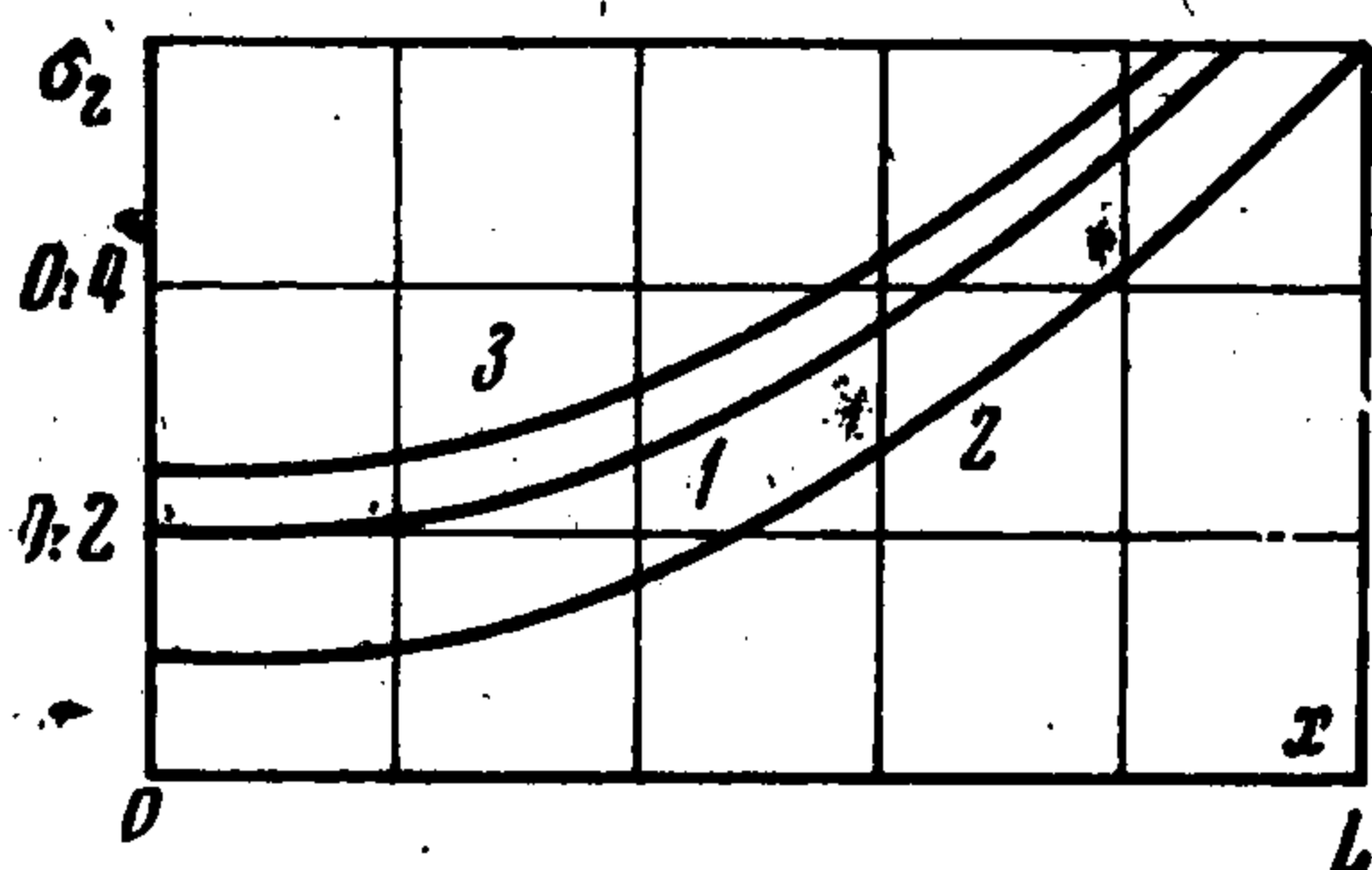
Если положить $u(t) = wt$, $w = \text{const}$, то это условие сведется к $t \ll L/u$, т. е. конвективными членами можно пренебрегать, пока смещение правой границы мало по сравнению с длиной прямоугольника, а это предполагается, когда в граничных условиях не учитывают смещение границы под действием нагрузки.

Пренебрегая конвективными членами и проделав несложные преобразования, выпишем выражения для σ_2

$$\sigma_2 = Q(t, x) + \frac{1-k}{1+k} q_1(t) (l^2 - y^2) \quad (2.8)$$

Структура решения теперь совершенно прозрачна.

3. Решим исходную задачу приближенно методом столбиков и сравним полученное решение с точным. Этот метод применяется, если l/L мало и состоит в том, что в уравнениях пренебрегают производными по x . В результате получается одномерная задача, в которую x входит в качестве параметра.



Фиг. 2

Величины, относящиеся к приближенному решению, будем обозначать индексом 1.

В данном случае из уравнения неразрывности и граничных условий при $y=0$ и $x=0$ следует $u^1 = v^1 = 0$. Из второго уравнения (2.1) и граничного условия при $y=l$ получается, что $\sigma_2^1 = Q(t, x)$. Из (2.8) видно, что ошибка максимальна при $y=0$.

Выражение для относительной ошибки $\Delta\sigma_2$ после несложных преобразований принимает вид (для $y=0$)

$$\Delta\sigma \equiv \frac{\sigma_2 - \sigma_2^1}{\sigma_2^1} = \frac{1-k}{1+k} \left(\frac{l}{L}\right)^2 \frac{Q(t, L) - Q(t, 0)}{Q(t, x)} \quad (3.1)$$

Отсюда вполне ясен характер погрешности, следует только заметить, что случай $k=1$ невозможен, так как из [5] следует $k < 1$.

На фиг. 2 приведены зависимости σ_2 от x при $y=0$ для точного (кривая 1) и приближенного решений (кривая 2).

4. Рассмотрим ту же задачу, считая среду идеальной жидкостью. Пренебрегая конвективными членами, получим вместо (2.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

Граничные условия и начальные условия для скоростей остаются прежними; что касается начальных условий для напряжений, то в силу свойств идеальной жидкости они вообще не нужны. Так как в начальных условиях $u_y - v_x = 0$, то движение будет безвихревым и можно ввести потенциал ϕ , удовлетворяющий уравнению Лапласа и решение будет выражаться через ϕ по формулам

$$p = -\rho\phi, \quad u = \phi_x, \quad v = \phi_y, \quad \Delta\phi = 0 \quad (4.2)$$

Заметим, что уравнения идеальной жидкости получаются из уравнений Прандтля — Рейсса, если входящие в условие пластичности константы k и b положить равными нулю. Однако рассматриваемая в этом пункте задача не есть частный случай предыдущей, так как в задаче из п. 2 параметр k входит не только в уравнения, но и в граничные условия из-за выбранного соотношения (2.5) связи между $q_1(t)$ и $u_0(t)$.

Краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольной области легко решается методом Фурье. В данном случае целесообразно выделить частное решение ϕ_1 , которое удовлетворяет граничным условиям всюду, кроме правой стороны, а также начальным условиям. Для оставшейся части решения $\phi_2 = \phi - \phi_1$ получится краевая задача с граничными условиями, однородными на трех сторонах, что упрощает дело.

Выберем φ_1 в виде

$$\varphi_1 = - \int_0^t q_0(s) ds + (x^2 + l^2 - y^2) \left(\frac{u_0(0)}{2L} - \int_0^t q_1(s) ds \right) \quad (4.3)$$

Нетрудно видеть, что φ_1 удовлетворяет уравнениям Лапласа и граничным условиям всюду, кроме $x = L$. Для φ_2 получится краевая задача

$$\begin{aligned} \varphi_{2x} = 0 \text{ при } x = 0, \quad \varphi_{2y} = 0 \text{ при } y = 0, \quad \varphi_{2t} = 0 \text{ при } y = l \\ \varphi_{2x} = \frac{4kL}{1+k} \int_0^t q_1(s) ds \text{ при } x = L \end{aligned} \quad (4.4)$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\varphi_2 = \frac{4kL}{1+k} f \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{l}, \frac{L}{l} \right) \int_0^t q_1(s) ds$$

где

$$f(\xi, \eta, r) = \frac{l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m^2} \frac{ch \pi m r \xi}{sh \pi m r} \cos \pi m \eta, \quad m = n + 1/2 \quad (4.5)$$

Входящая в (4.5) функция $f(\xi, \eta, r)$ определена при $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$.

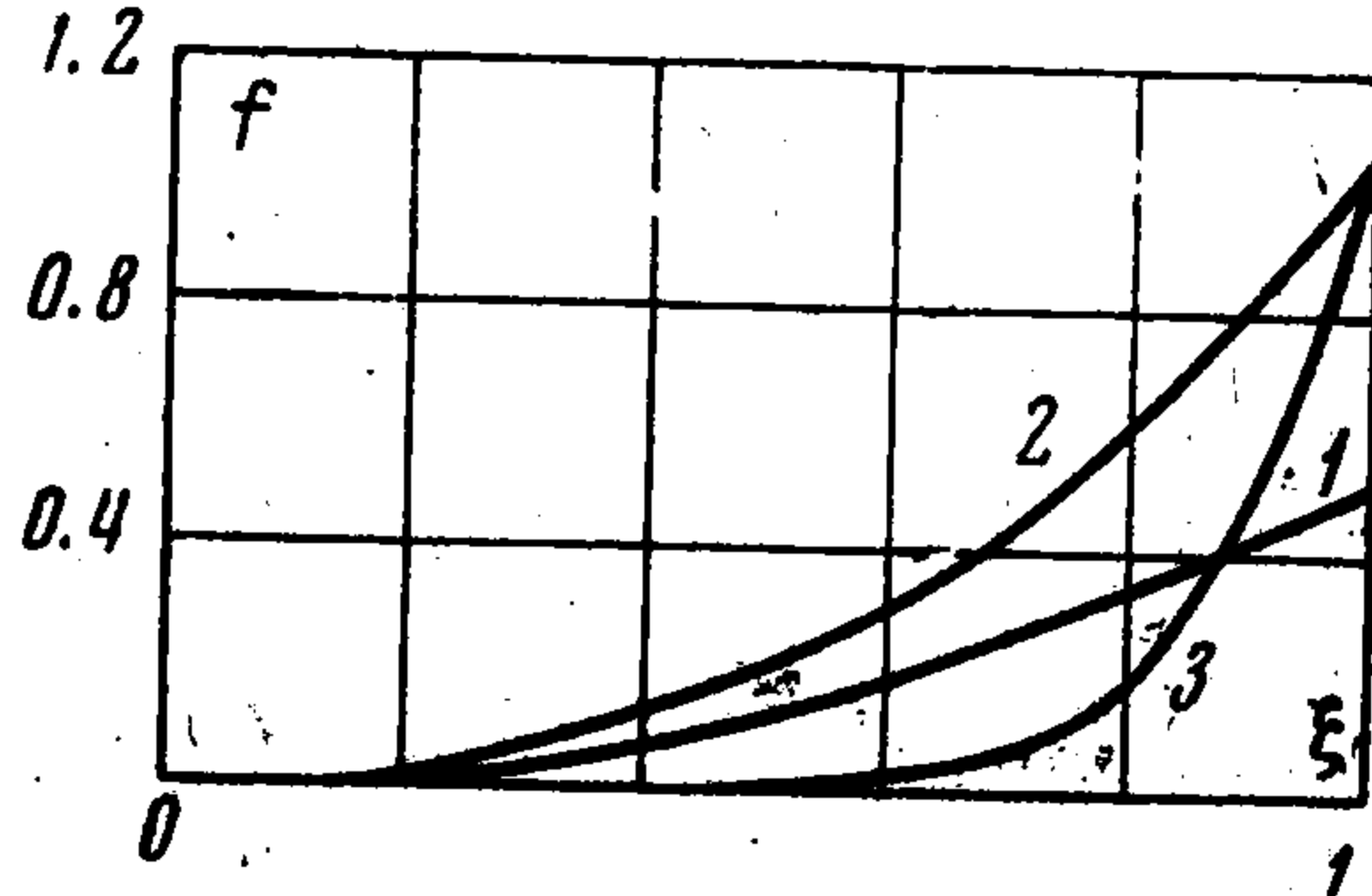
При больших r члены ряда, определяющего функцию f , имеют порядок $\exp((\xi - 1)\tau)$; следовательно, функция f заметно отличается от нуля лишь при $r \sim 1$.

Таким образом, при $L \gg l$ φ_2 сконцентрирована около правой границы.

На фиг. 3 изображена $f(\xi, 0, r)$ при $r = 1, 3, 10$ (кривые 1-3).

Если $k = 0$ (предел текучести не зависит от давления), то $\varphi_2 = 0$ и $\varphi = \varphi_1$. В этом случае решение принимает особенно простой вид

$$\begin{aligned} p = Q(t, x) + q_1(t)(l^2 - y^2), \\ u = u_0 x / L, \quad v = -u_0 y / L \end{aligned} \quad (4.6)$$



Фиг. 3

Сравнение (4.6) с (2.8) и (2.6) показывает, что боковые напряжения отличаются на величину b ; в остальном поля напряжений и скоростей совпадают.

Если $k \neq 0$, но $L \gg l$, то можно положить $\varphi = \varphi_1$ всюду, кроме $x \sim L$.

Аналогично п. 3 выведем выражения для относительных ошибок аппроксимации точных уравнений уравнениями идеальной жидкости при $L - x \gg l$

$$\begin{aligned} \Delta u = \Delta v = - \frac{2k}{1+k} \text{ для } 0 \leq y \leq l \\ \Delta \sigma_2 = - \frac{2k}{1+k} \frac{l^2}{L^2} \frac{Q(t, L) - Q(t, 0)}{Q(t, x) + (Q(t, L) - Q(t, 0)) l^2 / L^2} \text{ для } y = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из (4.7) следует, что сделанные допущения приводят к завышению скоростей (что заранее очевидно) и напряжений (кривая 3 на фиг. 2). Для малых k ошибка имеет порядок $O(k)$.

Сравнение (4.7) с (3.1) показывает, что в данной задаче схема идеальной жидкости дает меньшую по модулю ошибку, чем метод столбиков.

В общем случае можно предположить, что если k мало и характерные напряжения много больше предела текучести, то можно пользоваться уравнениями идеальной жидкости.

Поступила 8 X 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Х и л л Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
2. Г р и г о р я н С. С. О приближенном решении некоторых задач динамики грунтов. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
3. К о р н Г. А., К о р н Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров, М., «Наука», 1968.
4. А л е к с е е н к о В. Д., Г р и г о р я н С. С., Н о в г о р о д о в А. Ф., Р ы к о в Г. В. Некоторые экспериментальные исследования по динамике мягких грунтов. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 6.
5. Г р и г о р я н С. С., Ч е р н о у с ь к о Ф. Л. Одномерные квазистатические движения грунта. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Л. Я. Айнола

(Таллин)

Рассматривается задача определения малых изменений геометрических параметров упругих тел; при этом предполагается, что спектр частот их собственных колебаний должен иметь заданные малые изменения. Применяется метод малого параметра, задача сводится к решению l -проблемы моментов. В качестве примера рассматриваются задача определения переменной жесткости упругой балки, а также задача определения формы меридианы оболочки вращения по заданным частотам собственных колебаний.

Следует указать, что наиболее исчерпывающие результаты по подобного рода проблемам имеются для обратной задачи Штурма — Лиувилля [1,2], а также для обратной задачи квантовой теории рассеяния [3,4].

Обратным задачам колебаний упругих тел посвящено только несколько работ. Математически строго исследована лишь задача определения плотности неоднородной струны по спектрам ее частот [5-7]. В элементарной постановке задача определения жесткости балки по заданным частотам собственных колебаний рассмотрена в работе [8]. Более подробно эта же задача для балки и пластинки рассмотрена в работах [9,10], где дается способ построения переменной толщины по заданным нескольким первым частотам собственных колебаний и на примерах демонстрируется его численная реализация. Настоящая работа есть развитие этих работ.

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим следующую обратную задачу собственных колебаний, вытекающую из первой части работы [7], в предположении малости приращений собственных частот.

Пусть имеется самосопряженная задача на собственных значениях

$$Au - \lambda Bu = 0, \quad G_i u = 0 \quad (i = 1, \dots, 2n) \quad (1.1)$$

где

$$Au = \sum_{i=0}^n (-1)^i [a_i(\alpha, x) u^{(i)}]^{(i)} \quad (1.2)$$

$$Bu = \sum_{i=0}^m (-1)^i [b_i(\alpha, x) u^{(i)}]^{(i)}, \quad m < n$$

и через $G_i u$ обозначены граничные условия

$$u^{(k)} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad \text{при } x = x_0, x_1 \quad (1.3)$$