Расчет траекторий спуска пяти управляющих параметров автоматической системы в область устойчивости производился на ЭЦВМ БЭСМ-4. Результаты расчета показаны на фиг. 2.

Полученные значения управляющих параметров равны

$$C_1 = 0.085614, \quad C_2 = 0.005035, \quad C_3 = 0.697956, \quad C_4 = 0.0002, \quad C_5 = 0.000367 \tag{2.5}$$

Штрафная функция равна $M = 5.99939$. При этих значениях управляющих параметров характеристический полином будет полиномом Гурвица; при этом его корни равны

$$\lambda_6 = -0.0064, \qquad \lambda_5 = -0.001569 \tag{2.6}$$

$$\lambda_{4,3} = -0.037662 \pm i\, 0.790725, \qquad \lambda_{2,1} = -0.000085 \pm i\, 0.014039$$

Поступила 1 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. М а л к и н И. Г. Теория устойчивости движения (доп. 4 под ред. Н. Н. Красовского). М., «Наука», 1966.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА

Е. Д. Жительзейф

(Ленинград)

Устанавливается признак существования периодического решения уравнения Льенара

$$x'' + f(x)\, x' + g(x) = 0$$

На функции $f(x)$ и $g(x)$ здесь накладываются определенные ограничения не при всех значениях x, а лишь в некотором, достаточно широком интервале, содержащем начало координат.

Заменим данное уравнение эквивалентной системой

$$dx \,/\, dt = y, \qquad dy \,/\, dt = -yf(x) - g(x) \tag{1}$$

Введем обозначения

$$F(x) = \int_0^x f(x)\, dx, \qquad G(x) = \int_0^x g(x)\, dx, \qquad Q(x) = 2G(x) - \tfrac{1}{4}\lambda^2 x^2 + \lambda \int_0^x F(x)\, dx$$

$$p(x) = 2F(x) - \lambda x, \qquad r(x) = 2G(x) + F^2(x) - \lambda x F(x) + \lambda \int_0^x F(x)\, dx$$

где λ — произвольное вещественное положительное число, при котором выполняются условия теоремы.

Теорема. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что для системы (1) выполняются условия теоремы существования и единственности решения, и кроме того

1°. Значение функции $f(0) < 0$.

2°. Существуют числа $a < b < 0 < c < d$ и $\lambda > 0$ такие, что для функций $g(x)$ и $p(x)$ имеет место следующее чередование знаков:

$$\begin{aligned} &g(x) < 0 \quad \text{при } x \in (a,\ 0), \qquad && g(x) > 0 \quad \text{при } x \in (0,\ d) \\ &p(x) < 0 \quad \text{при } x \in (a,\ b), \qquad && p(x) > 0 \quad \text{при } x \in (b,\ 0) \\ &p(x) < 0 \quad \text{при } x \in (0,\ c) \qquad && p(x) > 0 \quad \text{при } x \in (c,\ d) \end{aligned}$$

3°. При $x \in [b, c]$

$$M = \min\{Q(a),\ Q(d)\} > Q(x) + [\sqrt{-\lambda^{-1} p(x) g(x)} + {}^1/_2 |p(x)|]^2$$

Тогда система (1) имеет хотя бы один устойчивый предельный цикл.

Доказательство. Рассмотрим семейство кривых

$$\Phi(x, y) = y^2 + p(x) y + r(x) = C \tag{2}$$

Решая это уравнение относительно y и учитывая введенные обозначения, получим

$$y = -{}^1/_2\, p(x) \pm \sqrt{C - [r(x) - {}^1/_4\, p^2(x)]} = -{}^1/_2\, p(x) \pm \sqrt{C - Q(x)} \tag{3}$$

Так как

$$Q'(x) = 2g(x) - {}^1/_2 \lambda^2 x + \lambda F(x) = 2g(x) + {}^1/_2 \lambda\, [2F(x) - \lambda x] = 2g(x) + {}^1/_2 \lambda p(x)$$

то в силу условия 2°,

$$Q'(x) < 0 \quad \text{при } x \in (a, b), \qquad Q'(x) > 0 \quad \text{при } x \in (c, d)$$

т. е. $Q(x)$ монотонно убывает в интервале (a, b) и монотонно возрастает в интервале (c, d).

Из неравенства в условии 3° при $x = b$ и $x = c$ следует

$$Q(a) > Q(b), \quad Q(d) > Q(b), \quad Q(a) > Q(c), \quad Q(d) > Q(c)$$

Это означает, что отрезки $[Q(b), Q(a)]$ и $[Q(c), Q(d)]$ оси y пересекаются и число M — наименьшее из чисел $Q(a)$ и $Q(d)$ и есть верхний конец отрезка, являющегося общей частью этих двух отрезков.

Пусть

$$m = \sup\{Q(x)\} \qquad (b \leqslant x \leqslant c)$$

Очевидно, $m < M$, иначе условие 3° не могло бы выполняться. Из определения чисел m и M следует, что отрезок $[m, M]$ содержится в пересечении отрезков $[Q(b), Q(a)]$ и $[Q(c), Q(d)]$.

Пусть C — фиксированное число, удовлетворяющее неравенству $m < C \leqslant M$. Тогда уравнение $Q(x) = C$ имеет два корня x_1 и x_2, причем $a \leqslant x_1 \leqslant b$ и $c \leqslant x_2 \leqslant d$.

Пусть $x_1 < x_0 < x_2$. Тогда, если $x_0 \in (a, b)$ или $x_0 \in (c, d)$, то $Q(x_0) < C$ вследствие монотонности $Q(x)$ в этих интервалах, а если $x_0 \in [b, c]$, то $Q(x_0) < C$ вследствие того, что $C > m = \sup\{Q(x)\}$ для $b \leqslant x \leqslant C$.

В любом случае, согласно (3), каждому значению $x = x_0$ при $x_1 < x_0 < x_2$ соответствуют два вещественных значения y на кривой (3), а значениям $x = x_1$ и $x = x_2$ — по одному значению y. Это значит, что между прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$ лежит простая замкнутая кривая семейства (2), соответствующая выбранному значению $C \in (m, M]$. Так как $p(0) = 0$, $Q(0) = 0$, то $y(0) = \pm\sqrt{C}$, согласно (3), откуда следует, что кривые семейства (2) содержат внутри начало координат.

Из уравнения (3) также непосредственно следует, что с увеличением C увеличивается расстояние между точками пересечения кривых со всякой прямой, параллельной оси y, т. е. если $C_2 > C_1$, то кривая $\Phi(x, y) = C_2$ содержит внутри себя кривую $\Phi(x, y) = C_1$.

Дифференцируя (2) в силу системы (1) и учитывая введенные выше обозначения, после упрощений получим

$$d\Phi / dt = -\lambda y^2 - p(x)\, g(x)$$

Покажем, что $d\Phi / dt < 0$ на кривой $\Phi(x, y) = M$.

В промежутках (a, b) и (c, d), согласно условию 2° произведение $p(x) g(x) > 0$. Следовательно, $d\Phi / dt < 0$ на тех частях кривой, которые лежат в полосе между прямыми $x = a$ и $x = b$ и в полосе между прямыми $x = c$ и $x = d$.

В интервале (b, c) определим знак $d\Phi / dt$ на верхней y_1 и нижней y_2 дугах кривой

$$y_1 = -{}^1/_2\, p(x) + \sqrt{M - Q(x)}, \qquad y_2 = -{}^1/_2\, p(x) - \sqrt{M - Q(x)}$$

Из условия 3° имеем

$$M - Q(x) > [\sqrt{-\lambda^{-1} p(x) g(x)} + {}^1/_2\, |p(x)|]^2 \quad \text{при} \quad x \in [b, c]$$

Отсюда

$$-{}^1/_2\, |p(x)| + \sqrt{M - Q(x)} > \sqrt{-\lambda^{-1} p(x) g(x)}$$

Пусть $b < x < 0$. Тогда $p(x) > 0$

$$y_1 = -{}^1/_2\, |p(x)| + \sqrt{M - Q(x)} > \sqrt{-\lambda^{-1} p(x) g(x)}, \qquad y_1^2 > -\lambda^{-1} p(x) g(x)$$

Отсюда

$$d\Phi / dt = -\lambda y_1^2 - p(x) g(x) < 0$$

Так как $p(x) > 0$, то

$$^1/_2\, p(x) + \sqrt{M - Q(x)} > -{}^1/_2\, p(x) + \sqrt{M - Q(x)}, \quad \text{или} \quad -y_2 > y_1$$

Следовательно

$$-y_2 > \sqrt{-\lambda^{-1} p(x) g(x)}, \qquad y_2^2 > -\lambda^{-1} p(x) g(x)$$

Отсюда

$$d\Phi / dt = -\lambda y_2^2 - p(x) g(x) < 0$$

Аналогично можно убедиться в том, что $d\Phi / dt < 0$ на верхней и нижней дугах кривой $\Phi(x, y) = M$ в интервале $(0, C)$

Таким образом, $d\Phi / dt < 0$ на кривой $\Phi(x, y) = M$ семейства (2).

Рассмотрим другое семейство кривых

$$\varphi(x, y) = {}^1/_2\, y^2 + G(x) = C \tag{4}$$

Легко видеть, что это тоже семейство вложенных одна в другую замкнутых кривых, содержащих внутри начало координат, причем таких, что при переходе от внутренних кривых к внешним C увеличивается.

Дифференцируя (4) в силу системы (1), получим

$$d\varphi / dt = -y^2 f(x)$$

Так как $f(0) < 0$ по условию 1°, то $d\varphi / dt \geqslant 0$ на всех кривых семейства (4), соответствующих достаточно малым значениям C. Взяв одну из таких кривых и кривую $\Phi(x, y) = M$, получим кольцевую область, в которую направлены все траектории системы (1), и, поскольку в ней нет особых точек, то в ней содержится хотя бы один устойчивый предельный цикл.

Поступила 25 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Н е м ы ц к и й В. В., С т е п а н о в В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений, изд. 2. М.—Л., Гостехтеориздат, 1949, стр. 152—153.
2. Д р а г и л е в А. В. Периодические решения дифференциального уравнения нелинейных колебаний. ПММ, 1952, т. 16, вып. 1.
3. Х у д а й - В е р е н о в М. Г. Некоторые теоремы о предельных циклах для уравнения Лиенара. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 3 (75).