

6. Struble R. A. On the oscillations of a pendulum under parametric excitation. Quart. Appl. Math., 1964, vol. 22, No. 2, pp. 157—159.
7. Struble R. A., Marlin G. A. Periodic motion of a simple pendulum with periodic disturbance. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1965, vol. 18, No. 4, pp. 405—417.
8. Г а д и о н е н к о А. Я. Резонансные колебания и вращения маятника с вибрирующей точкой подвеса. Укр. матем. ж., 1966, т. 18, № 2.
9. Struble R. A. Nonlinear differential equations, McGraw-Hill book Co., N. Y. 1962, ch. 8.
10. Struble R. A., Yionoulis S. M. General perturbational solution of the harmonically forced Duffing equation. Arch. Rat. Mech. and Anal., 1962, vol. 9, No. 5, pp. 422—438.
11. Б о г о л ю б о в Н. Н., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. Физматгиз, 1963.
12. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1967.

## О СИНТЕЗЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ МЕТОДОМ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. Н. Макеев

(Москва)

Описывается метод последовательного расчета параметров, определяющих управление для стабилизации линейных систем, основанный на идеях нелинейного программирования и сводящийся к минимизации оригинального функционала. Строгого математического обоснования привести не удалось.

1. Пусть возмущенное движение стационарной управляемой линейной системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$dX/dt = AX + BU \quad (1.1)$$

Здесь  $X$  — вектор-столбец основных переменных;  $A$  — квадратная матрица  $n \times n$ ;  $B$  — вектор-столбец коэффициентов эффективности управления;  $U$  — скаляр управляющего воздействия регулятора.

Предполагается, что система (1.1) удовлетворяет условиям управляемости. Матрицы  $A$ ,  $B$  не являются вырожденными, а матрица  $\Phi = \|B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\|$  имеет ранг  $n$  и состоит из  $n$  линейно независимых векторов.

Требуется отыскать закон управления

$$U = CX \quad (1.2)$$

гарантирующий асимптотическую устойчивость невозмущенного движения  $X = 0$ . Предполагается, что матрица  $C$  имеет вид вектора-строки и в произведении  $BC$  дает квадратную матрицу  $n \times n$ .

Подставив управление (1.2) в систему (1.1), получим

$$dX/dt = (A + BC)X \quad (1.3)$$

Для решения задачи стабилизации используем второй метод Ляпунова. Квадратичную форму  $V$  строим в виде

$$V = X^*KX \quad (1.4)$$

Здесь  $K$  — симметрическая квадратная матрица  $n \times n$ . Пусть  $W$  полная производная

$$W = X^*KX + X^*KX \quad (1.5)$$

После подстановки (1.3) в (1.5) и умножения на  $-1$  получим

$$-W = X^*(T^* + T)X, \quad (T = -K(A + BC)) \quad (1.6)$$

В задаче стабилизации матрицы  $A$ ,  $B$  известны. Матрицей  $K$  задаемся. Введем штрафную функцию вида

$$M = \sum_{k=1}^{2n} \exp(-M_{kk} \Phi) \quad (1.7)$$

Здесь  $M_{kk}$  — главные диагональные миноры дискриминантов квадратичных форм  $(-W)$  и  $V$ ; введен множитель  $\Phi$ , превышающий  $+1$ , для ускорения расчетов,  $n$  — порядок системы уравнений (1.1).

Штрафная функция  $M$  имеет экстремум внутри области асимптотической устойчивости. Зависимость штрафной функции от главных диагональных миноров очевидно будет иметь вид, представленный на фиг. 1, где  $L$  — область асимптотической устойчивости.

Для минимизации штрафной функции  $M$  от вектора строки  $C$  можно использовать дискретный или непрерывный алгоритмы.

Дискретный алгоритм описывается рекуррентным соотношением

$$C_{n+1} = C_n - \text{grad } M_c \cdot h \quad (h - \text{шаг}) \quad (1.8)$$

Здесь  $\text{grad } M_c$  — градиент штрафной функции  $M$  по вектору  $C$ .

Непрерывный алгоритм описывается системой уравнений дифференциального спуска в область асимптотической устойчивости

$$dC/d\tau = -\partial M/\partial C \quad (\tau - \text{вспомогательное время}) \quad (1.9)$$

Начальные условия можно задавать в виде случайных чисел.

Граница области  $L$  асимптотической устойчивости эквивалентна тому, что каждое слагаемое выражения (1.7) для штрафной функции  $M$  равно  $+1$ , так как  $\exp 0 = +1$ . Выполнение неравенств Сильвестра можно зафиксировать по величине каждого слагаемого  $M$ .

Для входа внутрь области  $L$  достаточно по алгоритмам (1.8) или (1.9) отыскать такие значения вектора  $C$ , при которых каждое слагаемое  $M$  меньше  $+1$ .

Наряду с неравенствами Сильвестра можно использовать все другие неравенства устойчивости.

При использовании неравенств Гурвица штрафная функция имеет вид

$$M = \sum_{k=1}^n \exp(-H_{kk} \Phi) \quad (1.10)$$

Здесь  $H_{kk}$  — главные диагональные миноры матрицы Гурвица.

Достижение области  $L$  по непрерывному и дискретному алгоритмам гарантируется только при условии ее существования.

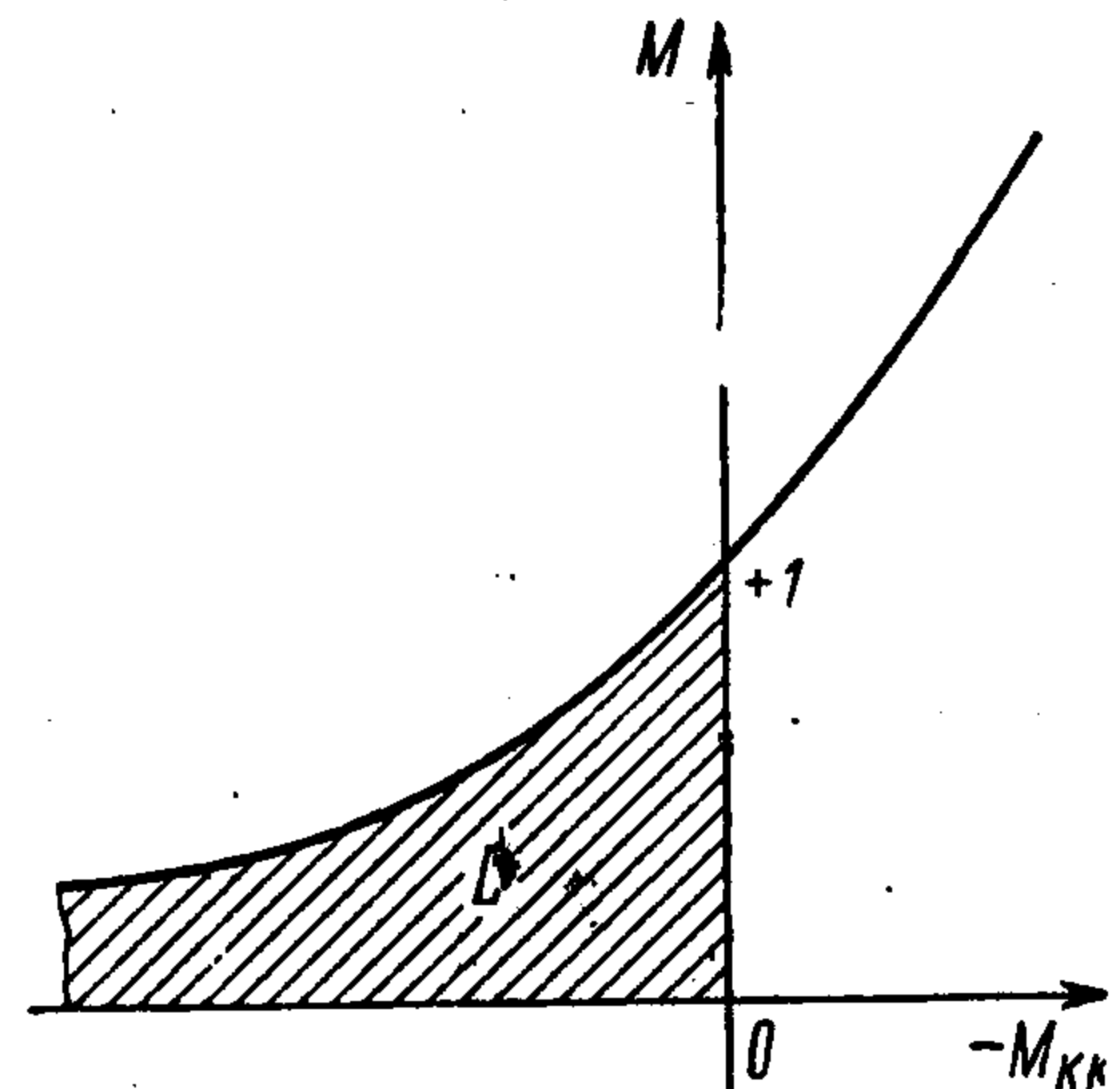
Алгоритмы спуска в область  $L$  (1.8) и (1.9) можно использовать для решения задач оптимальной стабилизации.

Они позволяют последовательно отыскивать такие значения параметров закона управления в системе квадратных уравнений ([1], стр. 495), при которых гарантируется устойчивость и оптимальность управления.

Для этого необходимо штрафную функцию  $M$  дополнить суммой квадратов невязок системы квадратных уравнений

$$S = M + \rho = M + \varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_n^2 \quad (1.11)$$

а затем минимизировать  $S$  по алгоритмам (1.8) или (1.9).



Фиг. 1

Процесс минимизации продолжается и после входа в область  $L$  до получения достаточной точности оптимизации.

2. Для иллюстрации синтеза устойчивых систем методом нелинейного программирования рассмотрим линейную систему шестого порядка с пятью управляющими параметрами.

Характеристический полином автоматической системы имеет вид

$$A_0x^6 + A_1x^5 + A_2x^4 + A_3x^3 + A_4x^2 + A_5x + A_6 = 0 \quad (2.1)$$

Коэффициенты характеристического полинома зависят от параметров автоматической системы

$$A_0 = k_6 C_3 k_2 k_3 \quad (2.2)$$

$$A_1 = (k_1 k_3 + k_5 k_2) C_1 C_4 C_5 k_6 + (k_3 + k_2 k_4) k_6 C_3 + (C_3 + k_6 C_2) k_2 k_3$$

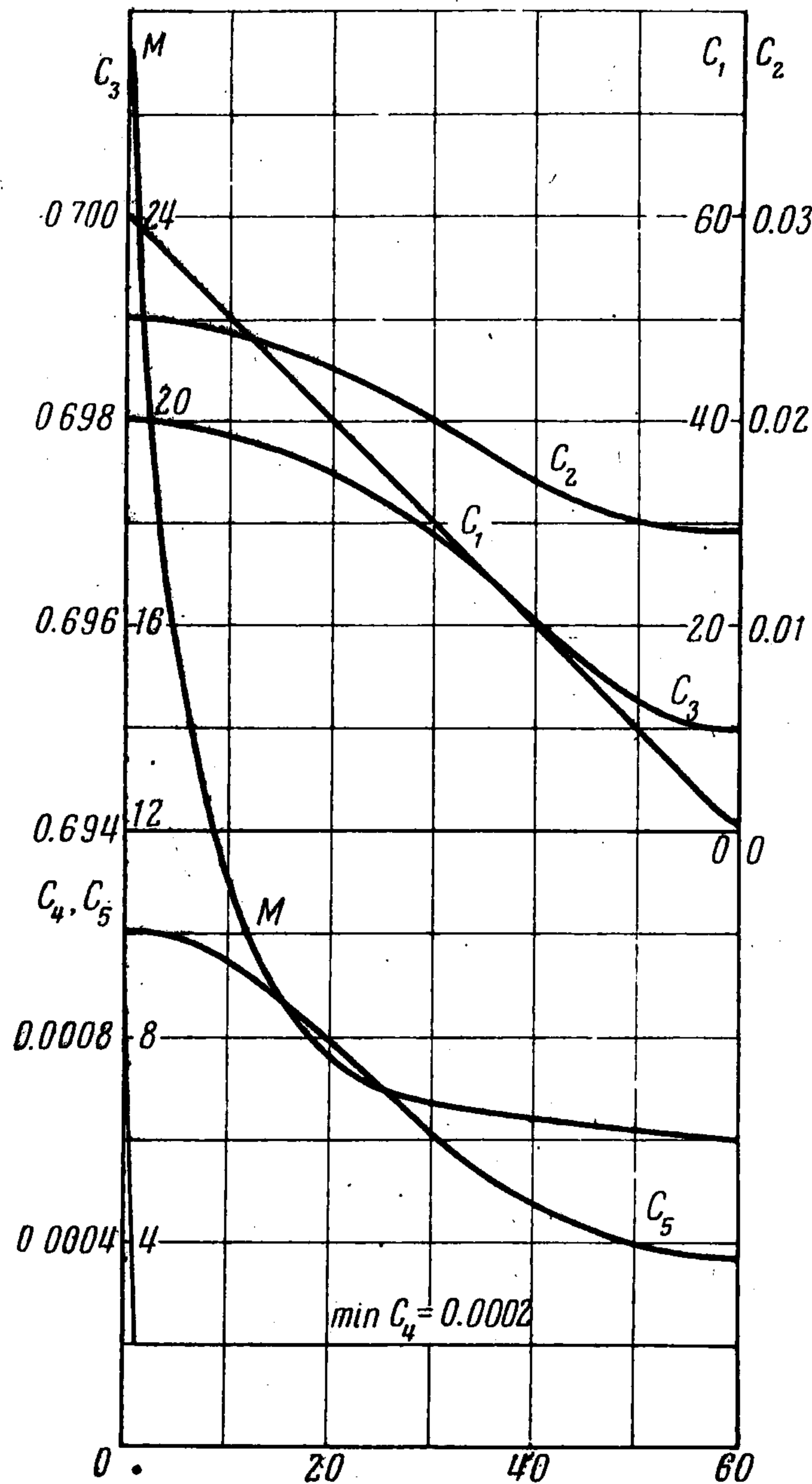
$$A_2 = (k_1 k_4 + k_5) C_1 C_4 C_5 k_6 + k_6 C_3 (k_2 + k_4) + (k_3 + k_2 k_4) (C_3 + k_6 C_2) + (C_2 + k_6) k_2 k_3$$

$$A_3 = C_1 ((C_4 + C_5) (k_1 k_3 + k_5 k_2) + k_1 C_4 C_5 k_6 + C_5 (k_6 + C_4) (k_1 k_4 + k_5)) + (k_2 + k_4) (C_3 + k_6 C_2) + k_6 C_3 + (k_3 + k_2 k_4) (C_2 + k_6) + k_2 k_3$$

$$A_4 = k_3 + k_2 k_4 + (k_4 + k_2) (C_2 + k_6) + C_3 + k_6 C_2 + C_1 (k_1 C_5 (C_4 + k_6) + (C_5 + C_4) (k_1 k_4 + k_5) + k_1 k_3 + k_5 k_2)$$

$$A_5 = C_1 (k_1 k_4 + k_5 + k_1 (C_4 + C_5)) + C_2 + k_6 + k_4 + k_2, \quad A_6 = C_1 k_1 + 1$$

Коэффициенты  $k_i$  из условия задачи имели следующие значения:



Фиг. 2

$$K_1 = 1.32, K_2 = 0.00157, K_3 = 0.000197, K_4 = 0.00019, K_5 = 0.93, K_6 = 0.0064 \quad (2.3)$$

Управляющие параметры автоматической системы  $C_i$  подлежат определению. В нулевом приближении было принято

$$C_{10} = 60,0, \quad C_{20} = 0.02, \quad C_{30} = 0.7, \quad C_{40} = C_{50} = 0.001 \quad (2.4)$$

При этих значениях управляющих параметров характеристический полином автоматической системы (2.1) не будет полиномом Гурвица; при этом штрафная функция  $M_0 = 27.948$ .

Для спуска в область устойчивости была на языке АЛГОЛ использована стандартная программа поиска экстремума функции от пяти аргументов методом градиента.

В программе минимизировалась по дискретному алгоритму штрафная функция (1.10), зависящая от неравенств Гурвица.

На управляющие параметры наложено ограничение снизу  $C_{i \min} = 0.0002$ , так как они не должны быть отрицательными.

Множитель  $\Phi$  для ускорения расчетов принят равным  $\Phi = 10^{+15}$  для значений  $N_{kk} < +1$ .

Расчет траекторий спуска пяти управляющих параметров автоматической системы в область устойчивости производился на ЭЦВМ БЭСМ-4. Результаты расчета показаны на фиг. 2.

Полученные значения управляющих параметров равны

$$C_1 = 0.085614, \quad C_2 = 0.005035, \quad C_3 = 0.697956, \quad C_4 = 0.0002, \quad C_5 = 0.000367 \quad (2.5)$$

Штрафная функция равна  $M = 5.99939$ . При этих значениях управляющих параметров характеристический полином будет полиномом Гурвица; при этом его корни равны

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= -0.0064, & \lambda_5 &= -0.001569 & (2.6) \\ \lambda_{4,3} &= -0.037662 \pm i 0.790725, & \lambda_{2,1} &= -0.000085 \pm i 0.014039 \end{aligned}$$

Поступила 1 IV 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения (доп. 4 под ред. Н. Н. Красовского). М., «Наука», 1966.

### ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА

Е. Д. Жительзейф

(Ленинград)

Устанавливается признак существования периодического решения уравнения Лье́нара

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0$$

На функции  $f(x)$  и  $g(x)$  здесь накладываются определенные ограничения не при всех значениях  $x$ , а лишь в некотором, достаточно широком интервале, содержащем начало координат.

Заменим данное уравнение эквивалентной системой

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -yf(x) - g(x) \quad (1)$$

Введем обозначения

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx, \quad G(x) = \int_0^x g(x) dx, \quad Q(x) = 2G(x) - \frac{1}{4}\lambda^2 x^2 + \lambda \int_0^x F(x) dx$$

$$p(x) = 2F(x) - \lambda x, \quad r(x) = 2G(x) + F^2(x) - \lambda x F(x) + \lambda \int_0^x F(x) dx$$

где  $\lambda$  — произвольное вещественное положительное число, при котором выполняются условия теоремы.

*Теорема.* Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  таковы, что для системы (1) выполняются условия теоремы существования и единственности решения, и кроме того

1°. Значение функции  $f(0) < 0$ .

2°. Существуют числа  $a < b < 0 < c < d$  и  $\lambda > 0$  такие, что для функций  $g(x)$  и  $p(x)$  имеет место следующее чередование знаков:

$$\begin{aligned} g(x) < 0 & \text{ при } x \in (a, 0), & g(x) > 0 & \text{ при } x \in (0, d) \\ p(x) < 0 & \text{ при } x \in (a, b), & p(x) > 0 & \text{ при } x \in (b, 0) \\ p(x) < 0 & \text{ при } x \in (0, c) & p(x) > 0 & \text{ при } x \in (c, d) \end{aligned}$$