

## О СУБГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ МАЯТНИКА

Б. И. Чешанков

(София)

Исследуются субгармонические колебания маятника, возбуждаемые горизонтальными колебаниями его подвеса в случае простого гармонического возбуждения.

Движение математического маятника, возбуждаемого колебаниями его точки подвеса, изучалось многими авторами [1-6]. Обычно рассматривается влияние вертикальных колебаний точки подвеса, но имеются и работы, посвященные влиянию горизонтальных колебаний [7] и колебаний более общего вида [8].

В работе используется некоторое дополнение [Страбля [9,10] к существующим асимптотическим методам в теории нелинейных колебаний [11].

1. Движение математического маятника, возбуждаемого горизонтальными колебаниями его подвеса, определяется уравнением

$$\varphi'' + \frac{g}{l} \sin \varphi = -\frac{1}{l} x'' \cos \varphi \quad (1.1)$$

где точки означают дифференцирование по времени,  $l$  — длина маятника,  $\varphi$  — угол отклонения от вертикали и  $x$  — перемещение подвеса маятника.

Рассмотрим относительно малые отклонения маятника. Положим

$$\varphi = \varepsilon^{1/2} z, \quad \frac{x''}{l} = -\varepsilon^{1/2} a_1 p^2 \cos pt, \quad p(l/g)^{1/2} = \beta$$

$$a = a_1 \beta^2 \quad (1.2)$$

( $\varepsilon$  — малый параметр).

Если в (1.1) ввести безразмерное время  $\tau = (g/l)^{1/2} t$ , то получим уравнение

$$z'' + z = a \cos \beta \tau + \varepsilon (1/6 z^3 - 1/2 a z^2 \cos \beta \tau) \quad (1.3)$$

Здесь штрихами отмечено дифференцирование по  $\tau$  и члены, содержащие  $\varepsilon$  в степени, выше первой, отброшены.

Решение (1.3) ищем в виде

$$z = A \cos(\tau - \psi) + \frac{a}{1 - \beta^2} \cos \beta \tau + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \dots \quad (1.4)$$

Здесь  $A$ ,  $\psi$  — медленно меняющиеся функции  $\tau$ , а  $z_1, z_2, \dots$  — аддитивные поправки, которые выражаются однозначно через  $A$ ,  $\psi$  и  $\tau$ . Ради краткости рассматривается случай, когда частота возбуждения  $p$  примерно в три раза больше собственной частоты  $(g/l)^{1/2}$ , т. е.  $\beta \approx 3$ . Подставляя (1.4) в (1.1), находим

$$(A'' + 2A\psi' - A\psi'^2) \cos(\tau - \psi) + (A\psi'' - 2A' + 2A'\psi') \sin(\tau - \psi) + \varepsilon (z_1'' + z_1) + \varepsilon^2 (z_2'' + z_2) + \dots =$$

$$= \varepsilon \left\{ \frac{1}{8} A^3 + \frac{1}{4} a^2 (2\beta^2 - 1) (1 - \beta^2)^{-2} A \right\} \cos(\tau - \psi) + \frac{1}{8} a \beta^2 (1 - \beta^2)^{-1} A^2 \cos \times$$

$$\times [(2 - \beta)\tau - 2\psi] + \frac{1}{24} A^3 \cos(3\tau - 3\psi) + \left[ \frac{1}{4} a \beta^2 (1 - \beta^2)^{-1} A^2 + \frac{1}{8} a^3 (3\beta^2 - 2) \times \right.$$

$$\times (1 - \beta^2)^{-3} \left. \right] \cos \beta \tau + \frac{1}{24} a^3 (3\beta^2 - 2) (1 - \beta^2)^{-3} \cos 3\beta \tau + \frac{1}{8} a \beta^2 (1 - \beta^2)^{-1} A^2 \cos \times$$

$$\times [(2 + \beta)\tau - 2\psi] + \frac{1}{8} a^2 (2\beta^2 - 1) (1 + \beta^2)^{-2} \cos [(2\beta - 1)\tau + \psi] + \frac{1}{8} a^2 (2\beta^2 - 1) \times$$

$$\times (1 + \beta^2)^{-2} \cos [(2\beta + 1)\tau - \psi]$$

Здесь члены, содержащие  $\varepsilon$  в степени, выше первой, отброшены. Используя тождество

$$\cos[(2 - \beta)\tau - 2\psi] = \cos \lambda \cos(\tau - \psi) + \sin \lambda \sin(\tau - \psi), \quad \lambda = (3 - \beta)\tau - 3\psi \quad (1.6)$$

и сравнивая соответствующие члены в (1.5), получим

$$\begin{aligned} A'' + 2A\psi' - A\psi'^2 &= \varepsilon [1/8 A^3 + 1/4 a^2 (2\beta^2 - 1) (1 - \beta^2)^{-2} A] + 1/8 \varepsilon a \beta^2 (1 - \beta^2)^{-1} A^2 \cos \lambda \\ 2A' + A\psi'' + 2A'\psi' &= 1/8 \varepsilon a \beta^2 (1 - \beta^2)^{-1} A^2 \sin \lambda \end{aligned} \quad (1.7)$$

и

$$\begin{aligned} z_1'' + z_1 &= [1/4 a \beta^2 (1 - \beta^2)^{-1} A^2 + 1/8 a^3 (3\beta^2 - 2) (1 - \beta^2)^{-3}] \cos \beta \tau + 1/24 A^3 \cos (3\tau - \\ &- 3\psi) + 1/24 a^3 (3\beta^2 - 2) (1 - \beta^2)^{-3} \cos 3\beta \tau + 1/8 \alpha \beta^2 (1 - \beta^2)^{-1} A^2 \cos [(2 + \beta) \tau - \\ &- 2\psi] + 1/8 a^2 (2\beta^2 - 1) (1 - \beta^2)^{-2} \cos [(2\beta - 1) \tau + \psi] + 1/8 a^2 (2\beta^2 - 1) (1 + \beta^2)^{-2} \times \\ &\times \cos [(2\beta + 1) \tau - \psi] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Уравнения (1.7) — вариационные, а уравнение (1.8) — уравнение для возмущений.

Если «расстройка»  $|3 - \beta|$  есть малая величина первого порядка относительно  $\varepsilon$ , то любое решение системы

$$dA / d\tau = -1/8 \varepsilon a \beta^2 (1 - \beta^2)^{-1} (\beta - 1)^{-1} A^2 \sin \lambda \quad (1.9)$$

$$d\psi / d\tau = 1/16 \varepsilon A^2 + 1/8 \varepsilon a^2 (2\beta^2 - 1) (1 - \beta^2)^{-2} + 1/8 \varepsilon a \beta^2 (1 - \beta^2)^{-1} (\beta - 1)^{-1} A \cos \lambda$$

будет удовлетворять системе (1.7) с точностью до членов первого порядка малости относительно  $\varepsilon$ . Тем самым определяется область субгармонического резонанса, и систему (1.9) удобно тогда записать в форме уравнений автономной системы

$$dA / du = A^2 \sin \lambda, \quad d\lambda / du = 2n - 4\alpha A^2 + 3A \cos \lambda \quad (1.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u &= 8 (\beta^2 - 1) (\beta - 1) a^{-1} \beta^{-2} \varepsilon \tau, \quad \alpha = 3/8 (\beta^2 - 1) (\beta - 1) a^{-1} \beta^{-2} \\ n &= 1/2 [(3 - \beta) \varepsilon^{-1} - 3/8 a^2 (2\beta^2 - 1) (1 - \beta^2)^{-2}] 8 (\beta^2 - 1) (\beta - 1) a^{-1} \beta^{-2} \end{aligned}$$

Очевидно, что изменения  $A$  и  $\lambda$  будут медленными, так как  $u$  пропорционально медленному времени  $\varepsilon \tau$ .

Исключая  $u$  из (1.10), получим

$$(2n - 4\alpha A^2 + 3A) \cos \lambda dA - A^2 \sin \lambda d\lambda = 0 \quad (1.11)$$

Это уравнение имеет общий интеграл

$$nA^2 - \alpha A^4 + A^3 \cos \lambda = c \quad (1.12)$$

где  $c$  — постоянная интегрирования.

2. Исследуем фазовые траектории для автономной системы (1.10) в плоскости  $xu$ , для которой  $x = A \cos \lambda$ ,  $y = A \sin \lambda$ , т. е.  $A$  и  $\lambda$  будут естественными полярными координатами. Фазовые траектории определяются выражением (1.12), и все они симметричны относительно оси  $x$ . Определим в первую очередь особые точки системы (1.10). Из условий

$$dA / du = 0 \quad d\lambda / du = 0 \quad (2.1)$$

находим

$$\sin \lambda = 0, \quad 2n - 4\alpha A^2 \pm 3A = 0 \quad (2.2)$$

Теперь видно, что особые точки находятся на оси  $x$  и определяются как корни квадратного уравнения (2.2). Кроме того, начало координат  $A = 0$  тоже есть особая точка. Наглядную картину о расположении особых точек получим, представляя уравнение (2.2) в виде

$$2n = f(x) = 4\alpha x^2 - 3x \quad (2.3)$$

и решая его графически (фиг. 1).

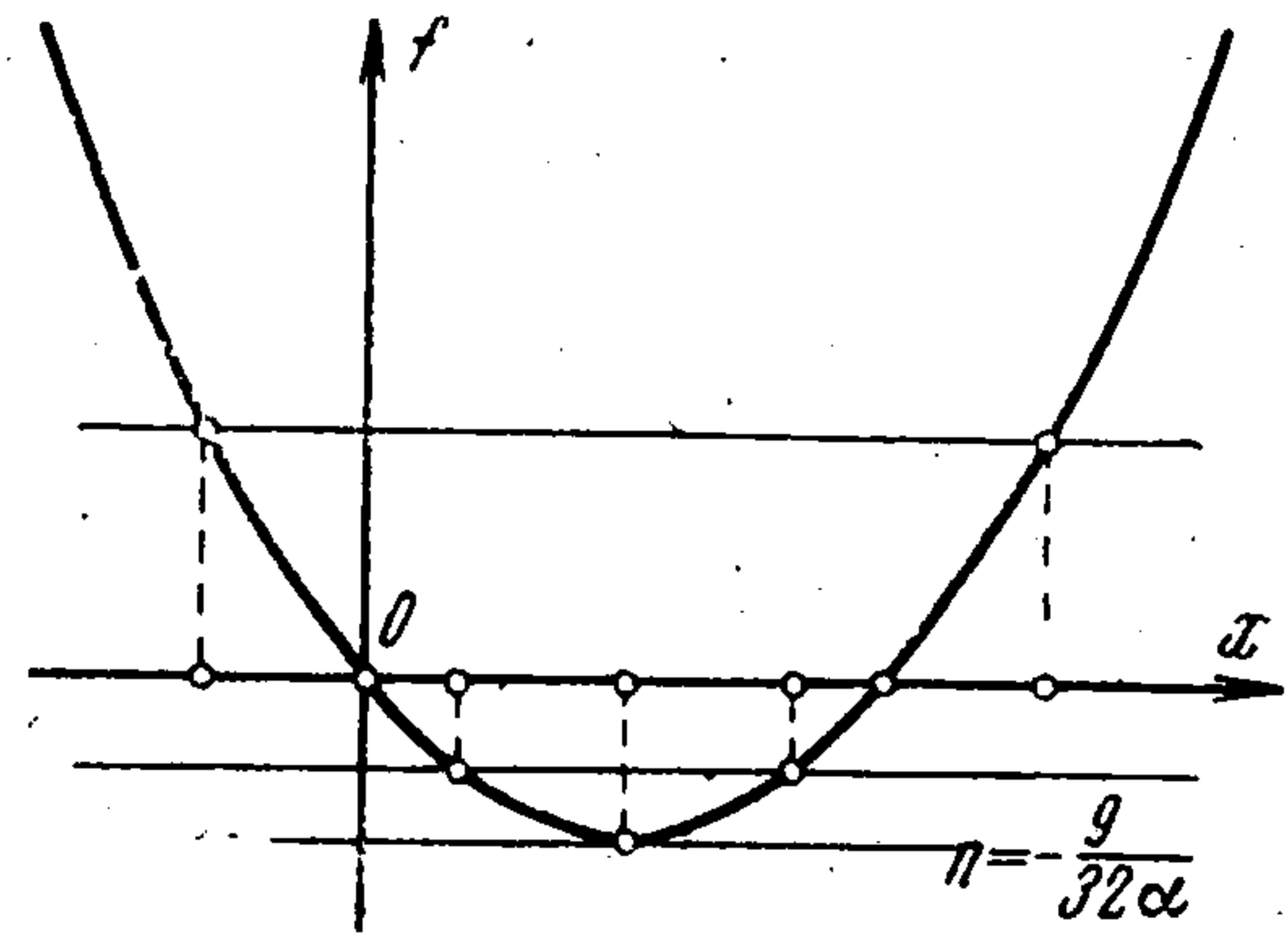
При  $n < -9/32\alpha^{-1}$  уравнение не имеет реальных корней. При  $n = -9/32\alpha^{-1}$  появляется один двойной корень  $x = 3/8\alpha^{-1}$ . Для  $-9/32\alpha^{-1} < n < 0$  имеются два положительных корня. Для  $n = 0$  меньший корень становится равным нулю, а при  $n > 0$  имеются один отрицательный и один положительный корни (отрицательный корень — это особая точка на отрицательной полуоси  $x$ ).

Таким образом, в зависимости от величины  $n$ , которая выражается через расстройку  $|\beta - \beta|$ , можно установить следующие основные случаи.

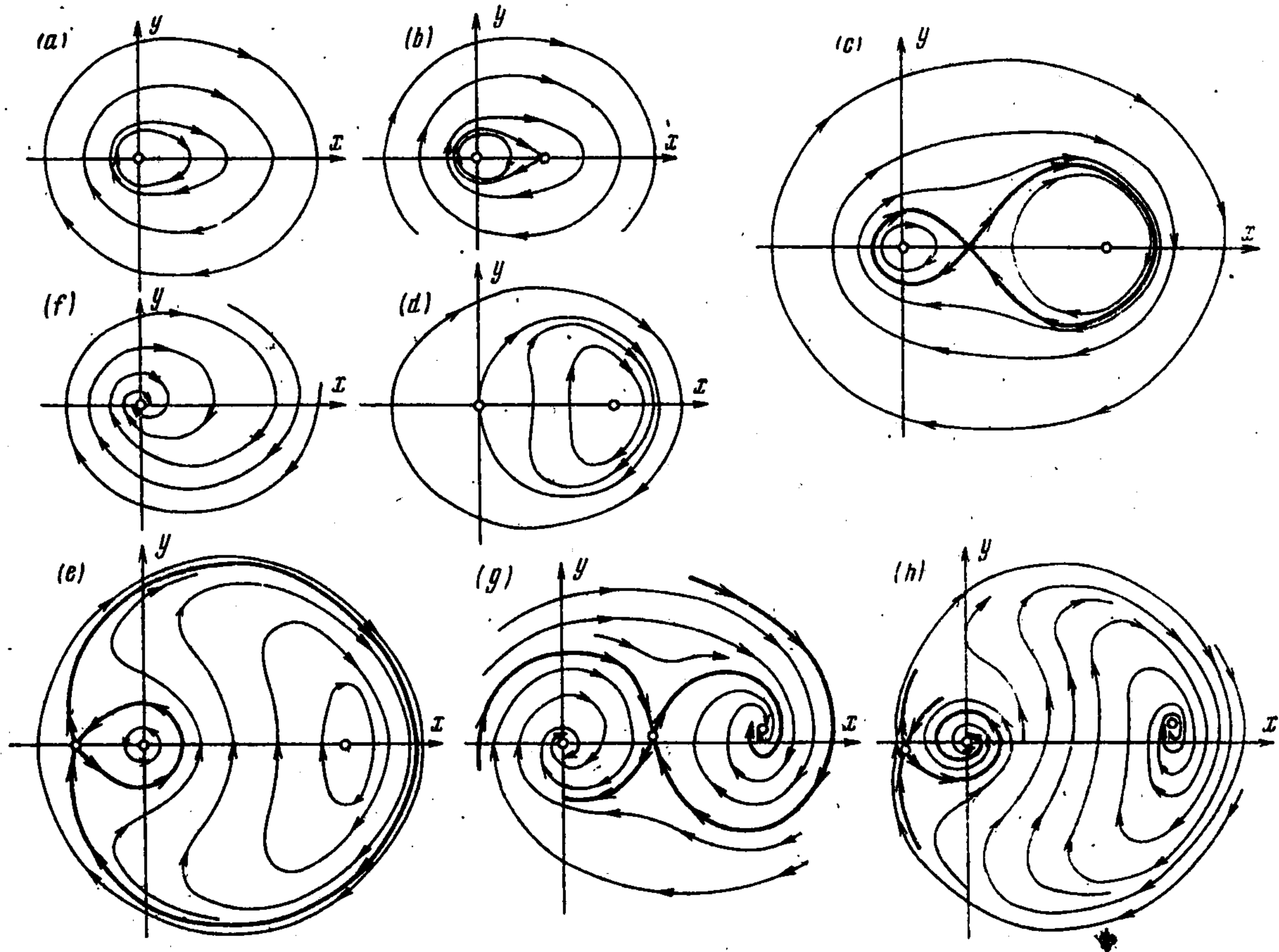
1°. При  $n < -\frac{9}{32}\alpha^{-1}$ . В этом случае существует только одна особая точка — начало отсчета, которая является центром (фиг. 2, а). В граничном случае  $n = -\frac{9}{32}\alpha^{-1}$  имеются две особые точки — начало отсчета, которая опять является центром и  $A = \frac{3}{8}\alpha$ ,  $\lambda = 0$  и оказывается необычной особой точкой, индекс которой равен нулю (фиг. 2, в).

2°. При  $-\frac{9}{32}\alpha^{-1} < n < 0$ . В этом случае имеются три особые точки — начало отсчета (центр), точка, соответствующая меньшему корню уравнения (2.3) (седло) и точка, которая соответствует большему корню уравнения (2.3) (центр). Через седла проходит сепаратриса, имеющая вид «восьмерки» и охватывающая два центра. Фазовые траектории для этого случая показаны на фиг. 2, с. В граничном случае  $n = 0$  — седловая точка и центр, соответствующий началу отсчета, сливаются, образуя неустойчивую критическую точку, аналогичную точке  $A = \frac{3}{8}\alpha$ ,  $\lambda = 0$  в граничном случае  $n = -\frac{9}{32}\alpha^{-1}$ . Фазовые траектории для этого случая показаны на фиг. 2, д.

3°. При  $0 < n$ . Здесь, как и в случае 2°, имеются три особые точки. Начало отсчета и точка, соответствующая положительному корню, являются центрами, точка соответствующая отрицательному корню, будет седлом. Три семейства фазовых траекторий отделяются сепаратрисой, исходящей из седловой точки и возвращающейся в нее (фиг. 2, е).



Фиг. 1



Фиг. 2

Для всех случаев при  $c \rightarrow \infty$  фазовые траектории превращаются в круговые.

Центры и седловые точки на фазовой плоскости, определяемые уравнением (2.3), являются бифуркационными амплитудами, соответствующими устойчивому и неустойчивому субгармоническим решениям уравнения (1.3). Замкнутые фазовые траектории описывают длиннопериодические колебания амплитуды  $A$  (биения), в то время как сепаратрисы соответствуют переходным изменениям  $A$ .

Если ввести в систему малое демпфирование, то центры на фазовой плоскости превратятся в асимптотически устойчивые фокусы, в то время как седловые точки по существу не изменяются. Субгармонические решения, соответствующие фокусам, будут асимптотически устойчивыми. Фазовые траектории описывают теперь очень медленный переходный режим движения. Случаи 1°, 2°, 3° при наличии демпфирования показаны соответственно на фиг. 2, *f*, *g*, *h*. Надо отметить, что фокус (и центр)  $A = 0$  соответствует не субгармоническому решению, а скорее гармоническому решению (1.4), у которого отсутствует первый член.

3. Найдем еще и амплитуду  $A$  как функции  $u$ . Из (1.10) и (1.12), получаем

$$\frac{d\mu}{\pm \sqrt{\mu^3 - (c - n\mu + \alpha\mu^2)^2}} = 2du \quad (\mu = A^2) \quad (3.1)$$

Рассмотрим полином

$$G(\mu) = \mu^3 - (c - n\mu + \alpha\mu^2)^2 \quad (3.2)$$

Корни полинома (3.2) совпадают с положительными корнями (для  $A^2$ ) уравнения (1.12) при  $\cos \lambda = \pm 1$ . Полином (3.2) для различных значений  $c$  и  $n$  имеет четыре реальных корня или два реальных и два комплексных корня, т. е. его можно записать в виде

$$G(\mu) = -\alpha^2 (\mu - \mu_1) (\mu - \mu_2) (\mu - \mu_3) (\mu - \mu_4), \quad \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \mu_4 > 0 \quad (3.3)$$

или

$$G(\mu) = -\alpha^2 (\mu - \mu_1) (\mu - \mu_2) [(\mu - \nu)^2 + \omega^2], \quad \mu_1 > \mu_2 > 0$$

$$\nu = 1/2 [\alpha^{-2} + 2n\alpha^{-1} - (\mu_1 + \mu_2)], \quad \omega^2 = c^2\alpha^{-2}\mu_1\mu_2 - \nu^2 \quad (3.4)$$

Полином (3.2) будет иметь вид (3.3), если для некоторого значения  $c$  существуют две фазовые траектории, которые пересекают ось  $x$ . Первая — в точках с полярными радиусами  $A_3 = \sqrt{\mu_3}$ ,  $A_4 = \sqrt{\mu_4}$  и вторая — в точках с полярными радиусами  $A_1 = \sqrt{\mu_1}$ ,  $A_2 = \sqrt{\mu_2}$ . Полином (3.2) будет иметь вид (3.4), если для некоторого значения  $c$  существует только одна фазовая траектория, которая пересекает ось  $x$  в точках с полярными радиусами  $A_1 = \sqrt{\mu_1}$ ,  $A_2 = \sqrt{\mu_2}$ .

Действительные корни находятся непосредственно при построении соответствующей фазовой траектории. Легко показать, что функция  $G(\mu)$  имеет вид (3.4) для всех фазовых траекторий в случае 1°, а также для большинства фазовых траекторий в случаях 2° и 3°; можно показать, что полином  $G(\mu)$  имеет вид (3.3) в случае 3° для всех фазовых траекторий, которые замыкаются около начала отсчета, а также для соответствующих им фазовых траекторий (при том же значении  $c$ ), которые замыкаются около другого центра. В случае 2° полином  $G(\mu)$  имеет вид (3.3) для всех фазовых траекторий, которые замыкаются около другого центра, а также для соответствующих им фазовых траекторий, которые замыкаются около начала отсчета при  $-9/32 \alpha^{-1} < n < -1/4 \alpha^{-1}$ ; полином  $G(\mu)$  будет иметь вид (3.3) [также при  $-1/4 \alpha^{-1} < n < 0$  для всех фазовых траекторий, которые замыкаются около начала отсчета и для соответствующих фазовых траекторий, замыкающихся около другого центра.

В первую очередь рассмотрим случай, когда  $G(\mu)$  имеет вид (3.3). Положим

$$k^2 = \frac{(\mu_3 - \mu_4)(\mu_2 - \mu_1)}{(\mu_3 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_4)}, \quad l^2 = \frac{4}{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)} \quad (3.5)$$

Тогда, пользуясь [12], из (3.1) получим для  $\mu$  в интервале  $\mu_4 \leq \mu \leq \mu_3$

$$\mu = \frac{\mu_4(\mu_1 - \mu_3) + \mu_1(\mu_3 - \mu_4) \operatorname{sn}^2 U}{\mu_1 - \mu_3 + (\mu_3 - \mu_4) \operatorname{sn}^2 U} \quad \left( U = \frac{2\alpha}{l} (u - u_0) \right) \quad (3.6)$$

Здесь модуль  $k$  эллиптической функции Якоби  $\operatorname{sn}$  определяется выражением (3.5), а  $u_0$  есть значение параметра  $u$  для  $\mu = \mu_4$ .

Для  $\mu$  в интервале  $\mu_2 \leq \mu \leq \mu_1$  имеем

$$\mu = \frac{\mu_2 (\mu_1 - \mu_3) - \mu_3 (\mu_1 - \mu_2) \operatorname{sn}^2 U}{\mu_1 - \mu_3 - (\mu_1 - \mu_2) \operatorname{sn}^2 U} \quad \left( U = \frac{2\alpha}{l} (u - u_0) \right) \quad (3.7)$$

Здесь модуль  $k$  имеет то же значение, как и в (3.6), а  $u_0$  есть значение параметра  $u$  для  $\mu = \mu_2$ .

Период долгопериодических колебаний амплитуды  $A$  по отношению времени  $\tau$  определяется формулой

$$\varepsilon T = \frac{la \beta^2}{8 (\beta^2 - 1) (\beta - 1)} K(k) \quad (3.8)$$

Здесь  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода в форме Лежандра с модулем  $k$ . Видно, что период изменения  $A$  для двух случаев (3.6) и (3.7) один и тот же, хотя сами движения совершенно различны.

Рассмотрим и случай, когда  $G(\mu)$  имеет вид (3.4). Здесь, следуя [12], обозначим

$$\operatorname{tg} p = \frac{\mu_1 - \nu}{\omega}, \quad \operatorname{tg} q = \frac{\mu_2 - \nu}{\omega}, \quad k^2 = \sin^2 \frac{p - q}{2}, \quad l = - \frac{(\cos p \cos q)^{1/2}}{\omega} \quad (3.9)$$

Для  $\mu$  в интервале  $\mu_2 \leq \mu \leq \mu_1$  получаем

$$\mu = \frac{\mu_1 \cos p + \mu_2 \cos q + (\mu_1 \cos p - \mu_2 \cos q) \operatorname{cn} U}{\cos p + \cos q + (\cos p - \cos q) \operatorname{cn} U} \quad \left( U = \frac{2\alpha}{l} (u - u_0) \right) \quad (3.10)$$

Здесь модуль  $k$  эллиптической функции Якоби  $\operatorname{sn}$  и величина  $l$ , определяются выражениями (3.9) и  $u_0$  — значение параметра  $u$  для  $\mu = \mu_1$ .

Период колебаний амплитуды  $A$  определяется формулой

$$\varepsilon T = - \frac{la \beta^2}{4 (\beta^2 - 1) (\beta - 1)} K(k) \quad (3.11)$$

где модуль полного эллиптического интеграла и  $l$  определяются выражениями (3.9).

После определения  $A$  как функции от  $u$  и  $\tau$ , используя (1.9), можно определить и  $\psi$  как функции от  $u$  и  $\tau$ .

Решение уравнений первого приближения (1.7) и (1.8) завершается определением аддитивного возмущения  $z_1$ . Из (1.8) получаем

$$\begin{aligned} z_1 = & 1/8a[2\beta^2(1 - \beta^2)^2 A^2 + (3\beta^2 - 2)a^2](1 - \beta^2)^{-4} \cos \beta\tau - 1/192A^3 \cos(3\tau - 3\psi) + \\ & + 1/24(3\beta^2 - 2)a^3(1 - \beta^2)^{-3}(1 - 9\beta^2)^{-1} \cos 3\beta\tau - 1/8a\beta^2 A^2(1 - \beta^2)^{-1}(\beta + 1)^{-1} \cos \times \\ & \times [(2 + \beta)\tau - 2\psi] + 1/32a^2(2\beta^2 - 1)(1 + \beta^2)^{-2}(1 - \beta)^{-1}\beta^{-1} \cos [(2\beta - 1)\tau + \psi] - \\ & - 1/32a^2(2\beta^2 - 1)(1 + \beta^2)^{-2}(\beta + 1)^{-1}\beta^{-1} \cos [(2\beta + 1)\tau - \psi] \end{aligned} \quad (3.12)$$

В любом случае  $z_1$  представляет собой высшие гармоники движения. Они не являются существенными для общего представления характера движения. Природу движения отражает главный член  $A \cos(\tau - \psi)$ .

Поступила 25 III 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Skalak R., Jarumovych M. I. Subharmonic oscillations of a pendulum. J. Appl. Mech., Ser. E., 1960, vol. 27, pp. 159—164.
2. Caughy T. K. Subharmonic oscillations of a pendulum (discussion). J. Appl. Mech., Ser. E., 1960, vol. 27, No. 4, pp. 754—755.
3. Капца П. Л. Динамическая устойчивость маятника с вибрирующей точкой подвеса. ЖЭТФ, 1951, т. 21, № 5.
4. Struble R. A. On the subharmonic oscillations of a pendulum. Trans. ASME, Ser. E., 1963, vol. 30, No. 2, pp. 301—303.
5. Struble R. A. Oscillations of a pendulum under parametric excitation. Quart. Appl. Math., 1953, vol. 21, No. 2, pp. 121—131.

6. Struble R. A. On the oscillations of a pendulum under parametric excitation. Quart. Appl. Math., 1964, vol. 22, No. 2, pp. 157—159.
7. Struble R. A., Marlin G. A. Periodic motion of a simple pendulum with periodic disturbance. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1965, vol. 18, No. 4, pp. 405—417.
8. Г а д и о н е н к о А. Я. Резонансные колебания и вращения маятника с вибрирующей точкой подвеса. Укр. матем. ж., 1966, т. 18, № 2.
9. Struble R. A. Nonlinear differential equations, McGraw-Hill book Co., N. Y. 1962, ch. 8.
10. Struble R. A., Yionoulis S. M. General perturbational solution of the harmonically forced Duffing equation. Arch. Rat. Mech. and Anal., 1962, vol. 9, No. 5, pp. 422—438.
11. Б о г о л ю б о в Н. Н., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. Физматгиз, 1963.
12. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1967.

## О СИНТЕЗЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ МЕТОДОМ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. Н. Макеев

(Москва)

Описывается метод последовательного расчета параметров, определяющих управление для стабилизации линейных систем, основанный на идеях нелинейного программирования и сводящийся к минимизации оригинального функционала. Строгого математического обоснования привести не удалось.

1. Пусть возмущенное движение стационарной управляемой линейной системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$dX/dt = AX + BU \quad (1.1)$$

Здесь  $X$  — вектор-столбец основных переменных;  $A$  — квадратная матрица  $n \times n$ ;  $B$  — вектор-столбец коэффициентов эффективности управления;  $U$  — скаляр управляющего воздействия регулятора.

Предполагается, что система (1.1) удовлетворяет условиям управляемости. Матрицы  $A$ ,  $B$  не являются вырожденными, а матрица  $\Phi = \|B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\|$  имеет ранг  $n$  и состоит из  $n$  линейно независимых векторов.

Требуется отыскать закон управления

$$U = CX \quad (1.2)$$

гарантирующий асимптотическую устойчивость невозмущенного движения  $X = 0$ . Предполагается, что матрица  $C$  имеет вид вектора-строки и в произведении  $BC$  дает квадратную матрицу  $n \times n$ .

Подставив управление (1.2) в систему (1.1), получим

$$dX/dt = (A + BC)X \quad (1.3)$$

Для решения задачи стабилизации используем второй метод Ляпунова. Квадратичную форму  $V$  строим в виде

$$V = X^*KX \quad (1.4)$$

Здесь  $K$  — симметрическая квадратная матрица  $n \times n$ . Пусть  $W$  полная производная

$$W = X^*KX + X^*KX \quad (1.5)$$