Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Решается нелинейное уравнение в частных производных второго порядка (уравнение Беллмана) для некоторых характерных задач оптимальной коррекции движения при наличии случайных возмущений и интегральных ограничений на управляющую функцию.

Выделяются классы автомодельных (инвариантно-групповых) решений уравнения Беллмана для этих задач. Получены некоторые точные аналитические решения.

§ 1. Постановка задачи. Пусть движение системы описывается уравнением

$$dx\,/\,dt = a\,(t)u + b\,(t)\xi, \qquad x\,(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

Здесь t — время, x — скалярная фазовая координата, u — управляющая функция, ξ — случайное возмущение, представляющее собой белый шум постоянной интенсивности, $a\,(t)$ и $b\,(t)$ — заданные функции времени, имеющие смысл эффективности управления и интенсивности возмущения соответственно, t_0, x_0 — начальные данные. Ставится задача об определении управления, удовлетворяющего ограничению

$$\int_{t_0}^{T} |u|^m\,dt \leqslant q_0, \quad m > 0, \quad q_0 \geqslant 0 \tag{1.2}$$

и минимизирующего математическое ожидание следующей функции от фазовой координаты в конце процесса:

$$J = F\,(x\,(T)) \tag{1.3}$$

Здесь T — заданный момент окончания процесса, q_0 — заданное число, m — фиксированный параметр.

Функция $F\,(x)$ есть мера отклонения системы от нуля. Предполагаем, что она обладает свойствами четности, неотрицательности и строгой монотонности, а именно:

$$F\,(x) = F\,(-x), \quad F\,(0) = 0, \quad F\,(x) > 0 \ \ (x \neq 0), \quad F'\,(x) > 0 \ \ (x > 0) \tag{1.4}$$

где штрих означает производную. Управление u будет определяться в виде синтеза, т. е. как функция произвольных начальных данных t_0, x_0, q_0, где $t_0 \leqslant T$, $q_0 \geqslant 0$.

Предполагается, что эти переменные могут быть точно измерены в любой текущий момент времени. Отметим, что случай $m = 1$ отвечает управлению движением при ограниченности расхода топлива, а случай $m = 2$ — управлению с ограничением по энергетике (в частности, управлению при помощи малой тяги).

Введем переменную q, имеющую смысл неизрасходованного ресурса управления. Из соотношений (1.2) получим уравнение и граничные условия для q в виде

$$dq / dt = - | u |^m, \qquad q(t_0) = q_0 \geqslant 0, \qquad q(T) \geqslant 0 \tag{1.5}$$

Не нарушая общности, можно считать $a(t) \geqslant 0$, $b(t) \geqslant 0$ при всех t. Если какая-либо из этих функций принимает при некотором t отрицательное значение, то при этом t можно изменить знак функций u или ξ в уравнении (1.1). Все введенные функции считаем имеющими нужное число производных.

Отметим, что описанная постановка типична для довольно широкого класса задач оптимального управления. В самом деле, пусть движение описывается общей нелинейной системой

$$dX / dt = f(X, U, \xi, t) \tag{1.6}$$

где X — вектор фазовых координат, U — вектор управляющих функций, ξ — вектор возмущений, f — заданная вектор-функция. Обозначим через $Y = F_0(X, t)$ вектор независимых первых интегралов системы (1.6) при $U = \xi = 0$, тогда справедливо тождество

$$\frac{\partial F_0(X, t)}{\partial X} f(X, 0, 0, t) + \frac{\partial F_0(X, t)}{\partial t} = 0 \tag{1.7}$$

где $\partial F_0 / \partial X$ — квадратная матрица частных производных, $\partial F_0/\partial t$ — вектор. Пусть управления U и возмущения ξ в системе (1.6) малы по величине. Тогда из уравнений (1.6), (1.7) получим

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial F_0}{\partial X} [f(X, U, \xi, t) - f(X, 0, 0, t)] \approx \left(\frac{\partial F_0}{\partial X} \frac{\partial f}{\partial U}\right) U + \left(\frac{\partial F_0}{\partial X} \frac{\partial f}{\partial \xi}\right) \xi \tag{1.8}$$

Здесь матрицы частных производных следует брать при $U = 0$, $\xi = 0$, $X = X_0(t)$, где $X_0(t)$ — некоторая опорная траектория, играющая роль невозмущенного движения, т. е. какое-либо частное решение системы (1.6) при $U = \xi = 0$. При этом матричные коэффициенты при U и ξ в системе (1.8) будут функциями только от t, и эта система будет векторным аналогом уравнения (1.1). Если минимизируемый критерий зависит только от одной компоненты вектора Y, то можно рассматривать отдельно лишь одно уравнение из системы (1.8); т. е. уравнение (1.1).

Рассмотрим, например, модельную задачу коррекции одномерного движения точки. Уравнения движения имеют вид

$$dX_1/dt = X_2, \qquad dX_2 / dt = u + \xi \tag{1.9}$$

где X_1 — координата, X_2 — скорость, u — управляющая, ξ — возмущающая силы. Введем новую переменную (T — момент окончания процесса)

$$x = X_1 + (T - t) X_2 \tag{1.10}$$

которая является, как нетрудно проверить, первым интегралом системы (1.9) при $u = \xi = 0$. Из соотношений (1.9), (1.10) получим

$$dx / dt = (T - t) u + (T - t) \xi \tag{1.11}$$

Если минимизируемый в конце процесса критерий зависит только от координаты $X_1(T)$, то в силу соотношения $X_1(T) = x(T)$ можно рассматривать вместо системы (1.9) одно уравнение (1.11). При соответствующих условиях и ограничениях на управление придем к поставленной выше задаче (1.1) — (1.3).

§ 2. Уравнение Беллмана и краевые условия. Обозначим через $S(t, x, q)$ минимальное значение функционала — математического ожидания функции (1.3), которое может быть достигнуто при начальных условиях $t_0 = t$, $x_0 = x$, $q_0 = q$ в задаче (1.1) — (1.3). Очевидно, что всегда $S \geqslant 0$.

Сначала рассмотрим случай $0 < m < 1$. Пусть управление $u(t)$ отлично от нуля лишь на интервале $[t_1 - \varepsilon, t_1]$ и равно ε^{-1} на этом интервале, причем $\varepsilon > 0$, $t_1 < T$. При $\varepsilon \to 0$ управление стремится к дельта-функции $\delta(t - t_1)$ и, как видно из уравнения (1.1), приводит к конечному скачку фазовой координаты $x(t)$ на величину $a(t_1)$ в момент t_1. Однако интеграл (1.2) для этого управления стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, если $m < 1$.

Таким образом, управление типа дельта-функций не приводит к расходу ресурса q при $m < 1$. Отсюда следует, что при любом $q_0 > 0$, любых t_0, x_0 и любой реализации случайного процесса $\xi(t)$ можно добиться равенства $x(T) = 0$ при помощи импульса управления в конце процесса, т. е.

$$u(t) = -x(T - 0)\, a^{-1}(T)\, \delta(t - T) \tag{2.1}$$

где $x(T - 0)$ — значение фазовой координаты непосредственно перед подачей импульса. Управление (2.1) обеспечивает абсолютный (нулевой) минимум минимизируемого функционала (математического ожидания функции (1.3)) и поэтому является оптимальным, хотя, конечно, не единственным. Если $a(T) = 0$, то управление (2.1) теряет смысл, но если функция $a(t)$ отлична от нуля при $t < T$, то можно построить минимизирующую последовательность импульсных уравнений, реализующую также нулевой минимум функционала. Таким образом, в случае $m < 1$ задача (1.1) — (1.3) решается тривиально, и здесь $S(t, x, q) \equiv 0$ при $t < T$.

В дальнейшем будем предполагать $m \geqslant 1$, причем сначала рассмотрим случай $m > 1$. Принимая во внимание уравнения (1.1), (1.5), составим уравнение Беллмана для функции S [1]

$$S_t + \min_u [a(t) u S_x - |u|^m S_q] + \frac{1}{2} b^2(t) S_{xx} = 0 \tag{2.2}$$

Индексы у S означают частные производные. Отметим следующие свойства функции S, вытекающие из постановки задачи (1.1) — (1.3) и свойств (1.4)

$$S(t, x, q) = S(t, -x, q), \quad \operatorname{sign} S_x = \operatorname{sign} x, \quad S_q < 0 \tag{2.3}$$

Первое свойство выражает четность функции S. Второе и третье свойства следуют из того, что чем больше начальное отклонение $|x_0|$ в (1.1) и чем меньше запас ресурса q_0 в (1.2), тем больше при прочих равных условиях будет конечное отклонение $|x(T)|$. Минимум по u в (2.2) достигается при

$$u = -[a(t) S_x / (-m S_q)]^{1/(m-1)} \operatorname{sign} x \tag{2.4}$$

Уравнение (2.2) после вычисления минимума с учетом (2.3), (2.4) примет вид в области $x \geqslant 0$

$$S_t + {}^1/_2 b^2(t) S_{xx} + (m-1)\,[a(t) S_x / (-mS_q)]^{m/(m-1)} S_q = 0 \tag{2.5}$$

На границе $q = 0$ функция S имеет особенность. Зафиксируем $t < T$, $x > 0$ и устремим $q_0 = q \to 0$, считая, что почти всюду $a > 0$ и $S_x > 0$. Тогда оптимальное управление u задачи (1.1) — (1.3) на интервале $[t, T]$ будет стремиться к нулю, причем по порядку величины $|u|^m \sim q$. Сравнивая это соотношение с равенством (2.4), получим

$$|S_q| = O(q^{(1-m)/m}), \qquad q \to 0 \tag{2.6}$$

Удобно сделать замену переменных (предполагаем $b > 0$)

$$\tau = \int_t^T b^2(t_1)\,dt_1, \qquad p^m = q \tag{2.7}$$

Из (2.6), (2.7) следует, что производная S_p будет ограничена при $p \to 0$, и в новых переменных функция $S(\tau, x, p)$ уже не имеет особенности при $p \to 0$. Уравнение (2.5) в переменных (2.7) примет вид

$$S_\tau = \frac{1}{2} S_{xx} + \frac{(m-1)\,p}{m b_1^2(\tau)} \left[\frac{a_1(\tau) S_x}{-S_p}\right]^{m/(m-1)} S_p, \quad m > 1 \tag{2.8}$$

Из соотношений (1.3), (2.3), (2.7) вытекают начальное и граничное условия для функции $S(\tau, x, p)$

$$S(0, x, p) = F(x), \qquad S_x(\tau, 0, p) = 0 \tag{2.9}$$

При $p = 0$ уравнение (2.8) превращается в обычное уравнение теплопроводности, решение которого при условиях (2.9) имеет вид

$$S(\tau, x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{2\tau}\right] F(x_1)\,dx_1 \tag{2.10}$$

Здесь использована четность функции $F(x)$. Отметим, что решение (2.10) отвечает неуправляемому движению: ресурс управления p равен нулю. Таким образом, задача свелась к определению функции $S(\tau, x, p)$ в области $D = \{\tau \geqslant 0,\ x \geqslant 0,\ p \geqslant 0\}$ по уравнению (2.8) и граничным условиям (2.9), (2.10) на границах области. Строго говоря, соотношение (2.10) не является граничным условием, так как оно следует из самого уравнения (2.8). Можно показать, что поставленных условий, вообще говоря, достаточно, чтобы решать задачу шагами по τ в направлении роста τ, например, конечно-разностным методом.

Трудность встретится при малом τ, так как при $\tau \to 0$ имеем $S \to F(x)$ и поэтому $S_p \to 0$. При этом второе слагаемое в правой части (2.8) стремится к ∞ при $\tau \to 0$. Найдем асимптотическое решение уравнения (2.8) при малом τ. Первое слагаемое в правой части (2.8) стремится к $F''(x) / 2$ при $\tau \to 0$, оно ограничено и поэтому им можно пренебречь по сравнению со вторым слагаемым. Тогда уравнение (2.8) примет вид

$$S_\tau = \frac{(m-1)\,p}{m b_1^2(\tau)} \left[\frac{a_1(\tau) F'(x)}{-S_p}\right]^{m/(m-1)} S_p, \qquad \tau \to 0 \tag{2.11}$$

где производная S_x заменена ее предельным значением $F'(x)$. Решение уравнения (2.11), удовлетворяющее начальному условию (2.9), ищем в виде

$$S(\tau, x, p) = F(x) - pF'(x) f_1(\tau), \quad f_1(0) = 0 \tag{2.12}$$

Подставляя равенство (2.12) в (2.11), получим уравнение для определения функции f_1

$$\frac{df_1}{d\tau} = \frac{m-1}{m} a_1^{m/(m-1)}(\tau) b_1^{-2}(\tau) f_1^{-1/(m-1)}(\tau)$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $f_1(0) = 0$, получим

$$f_1(\tau) = \left[\int_0^\tau \frac{a_1^{m/(m-1)}(\tau_1)}{b_1^2(\tau_1)} d\tau_1\right]^{(m-1)/m} \tag{2.13}$$

Соотношения (2.12), (2.13) определяют асимптотику функции S при $\tau \to 0$ и дают возможность «отойти» от плоскости $\tau = 0$, задав решение при малом $\tau > 0$, что важно для численного счета.

Определив решение краевой задачи (2.8)— (2.10), можно затем найти синтез оптимального управления. Согласно равенствам (2.4), (2.7) имеем

$$u(\tau, x, p) = -p[-a_1(\tau) S_x / S_p]^{1/(m-1)} \ (x > 0), \quad u(\tau, -x, p) = -u(\tau, x, p) \tag{2.14}$$

§ 3. **Случай $m = 1$.** Важный случай $m = 1$ требует специального рассмотрения, так как формулы § 2 содержат неопределенности при $m \to 1$. Введем обозначение

$$Q = a_1(\tau) S_x + S_p \tag{3.1}$$

и перепишем уравнение (2.8) в виде

$$S_\tau = \frac{1}{2} S_{xx} + \frac{(m-1)p}{mb_1^2(\tau)} \left(1 - \frac{Q}{S_p}\right)^{m/(m-1)} S_p \tag{3.2}$$

Перейдем к пределу при $m \to 1 + 0$, предполагая, что функция S при $m = 1$ обладает достаточной гладкостью и учитывая, что $S_p < 0$.

Если в какой-то точке $Q > 0$, то предел правой части уравнения (3.2) при $m \to 1$ оказывается равным бесконечности, что лишено смысла. Поэтому всюду в области D имеем $Q \leqslant 0$ при $m = 1$. Обозначим через D_1 ту часть области D, где $Q < 0$, а через D_2 — оставшуюся часть, где $Q = 0$. В области D_1, переходя к пределу при $m \to 1$ в уравнении (3.2), получим

$$S_\tau = {}^1/_2 S_{xx}, \quad Q = a_1(\tau) S_x + S_p < 0 \quad \text{в } D_1 \tag{3.3}$$

В области D_2 имеем $Q \equiv 0$, и тогда из (3.1) следует

$$S(\tau, x, p) = G[x - a_1(\tau)p, \tau], \quad Q = 0 \quad \text{в } D_2 \tag{3.4}$$

где G — произвольная функция двух переменных, подлежащая определению.

Обозначим через Γ границу областей D_1 и D_2. Если функция $S(\tau, x, p)$ в области D_1 найдена, то на границе Γ, согласно непрерывности функции S, будем иметь начальное данное $S = G$ на Γ, из которого определится функция G и все решение (3.4) в области D_2. Для решения уравнения (3.3) в области D_1 нужно задать на неизвестной границе Γ два краевых условия. Одно условие $Q = 0$ на Γ следует из непрерывности Q на Γ.

Для получения второго условия продифференцируем обе части уравнения (3.2) по x и положим затем $Q = 0$. Получим

$$\left(S_\tau - \frac{1}{2} S_{xx}\right)_x = \frac{p}{b_1^2(\tau)} \left(\frac{m-1}{m} S_{px} - \frac{Q_x}{S_p}\right) \tag{3.5}$$

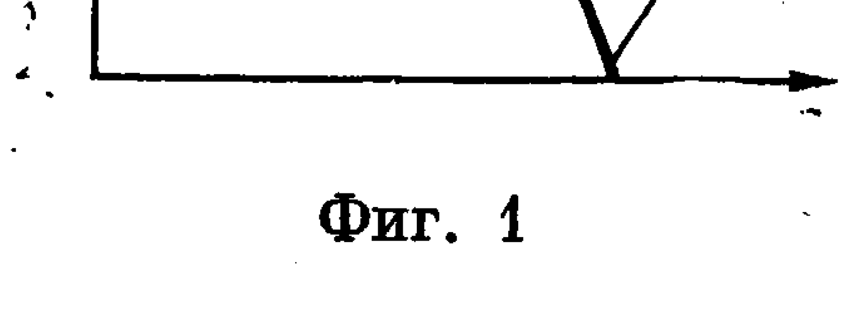
Равенство (3.5) справедливо при $m > 1$ на поверхности $Q = 0$, которая при $m \to 1$ переходит в границу Г. Но при $m \to 1$ левая часть соотношения (3.5) стремится к нулю на Г, так как в области D_1, примыкающей к Г, тождественно выполняется уравнение (3.3). Поэтому, переходя к пределу при $m \to 1$, получим из (3.5), что $Q_x = 0$ на Г. Аналогично $Q_p = 0$ на Г, но из двух условий $Q_x = 0$, $Q_p = 0$ лишь одно независимо, так как $Q \equiv 0$ на Г.

Таким образом, при $m = 1$ искомая функция S удовлетворяет уравнениям (3.3), (3.4) в областях D_1, D_2, на границе Г между этими областями S непрерывна и удовлетворяет условиям

$$Q = a_1(\tau) S_x + S_p = 0, \quad Q_x = a_1(\tau) S_{xx} + S_{px} = 0 \quad \text{на } \Gamma \tag{3.6}$$

и, кроме того, имеют место условия (2.9), (2.10) на границах области D. Из второго условия (2.9) и неравенства $S_p < 0$ следует, что $Q < 0$ при $x = 0$, т. е. плоскость $x = 0$ принадлежит области D_1. Заметим еще, что $p = q$ при $m = 1$ согласно (2.7), а функция $b_1(\tau)$ не входит в постановку задачи (3.3), (3.4), (3.6).

Области D_1, D_2 имеют простой смысл. Из формулы (2.14) при $m \to 1$ легко получить, что $u = 0$ в области D_1, т. е. в D_1 происходит неуправляемое движение под действием только случайного возмущения. В области же D_2 производится импульсная коррекция, причем $u < 0$, так как $x \geqslant 0$ во всей области D, см. (2.14). Из формул (1.1), (1.5) следует, что при импульсной коррекции (u — дельта-функция времени) в случае $m = 1$ и $u < 0$ величина $x - a(t)\, q$ не изменяется в момент коррекции. Следовательно, не будет изменяться и аргумент $x - a_1(\tau)\, p$ функции G в (3.4), то есть в области D_2 фазовая точка (τ, x, p) перемещается при коррекции вдоль характеристики уравнения $Q = 0$. Качественно это изображено на фиг. 1, где показано сечение области D плоскостью $\tau = \mathrm{const}$. Параллельные прямые на фиг. 1 есть характеристики $x - a_1(\tau)\, p = \mathrm{const}$, на которых функция S постоянна в области D_2. Если фазовая точка (τ, x, p) лежит в области D_1, то $u = 0$. Если же (τ, x, p) лежит в D_2, то управление представляет собой импульс, мгновенно перемещающий фазовую точку по прямым (фиг. 1) в направлении, указанном стрелками (в направлении убывания x и p), до границы Г или до границы области D. Очевидно, что для построения синтеза оптимального управления при $m = 1$ достаточно определить границу Г.



Фиг. 1

Отметим один частный случай, допускающий простое точное решение. Пусть $a(T) \geqslant a(t)$ при $t \leqslant T$, т. е. эффективность управления в конце процесса максимальна. Тогда оптимальное управление представляет собой, очевидно, импульс, поданный в момент T и уменьшающий, насколько позволяет ресурс управления, конечное отклонение $|x(T)|$.

Будем иметь в обозначениях § 1

$$u(t) = [x(T) - x(T-0)]\, a^{-1}(T)\, \delta(t-T) \qquad (3.7)$$
$$x(T) = \max\,[|x(T-0)| - a(T)\, q_0,\ 0]\ \mathrm{sign}\, x(T-0)$$

В обозначениях (2.7) из равенств (3.7) вытекает, что при $\tau \to +0$ получим

$$S(\tau, x, p) = F\,\{\max\,[x - a_1(0)\, p,\ 0]\},\quad x \geqslant 0,\ \tau \to +0 \qquad (3.8)$$

Здесь использованы свойства (1.4). Закон управления (3.7) показывает, что область D_2 здесь вырождается в плоскость $\tau = 0$, на которой S испытывает скачок от величины $F(x)$ до величины (3.8). Вся область D при $\tau > 0$ будет областью D_1. Функцию S в области D_1 найдем, записывая решение уравнения (3.3) с начальным условием (3.8) при условии симметрии (2.9).

$$S(\tau, x, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int\limits_{a_1(0)p}^{\infty} \left\{\exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{2\tau}\right] + \exp\left[-\frac{(x+x_1)^2}{2\tau}\right]\right\} \times$$
$$\times F(x_1 - a_1(0)\, p)\, dx_1,\quad p \geqslant 0,\ \tau > 0 \qquad (3.9)$$

Чтобы проверить неравенство $Q < 0$, подставим решение (3.9) в формулу (3.1)

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int\limits_{a_1(0)p}^{\infty} \left\{[a_1(\tau) - a_1(0)] \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{2\tau}\right] - [a_1(0) + a_1(\tau)] \times\right.$$
$$\left.\times \exp\left[-\frac{(x+x_1)^2}{2\tau}\right]\right\} F'[x_1 - a_1(0)\, p]\, dx_1$$

Из условий (1.4) и $a_1(0) \geqslant a_1(\tau) > 0$ следует, что $Q < 0$ в области D_1, так что формула (3.9) действительно дает решение задачи.

§ 4. Автомодельные решения. Пусть при $m \geqslant 1$ выполнены равенства

$$F(x) = |x|^n,\quad a_1(\tau)\,[b_1(\tau)]^{2(1-m)/m} = A\tau^k,\quad n > 0,\quad A > 0 \qquad (4.1)$$

где n, A, k — постоянные. В частности, если функции $a(t)$ и $b(t)$ в уравнении (1.1) имеют вид

$$a(t) = A_1 (T-t)^\alpha, \qquad b(t) = B_1 (T-t)^\beta$$

где A_1, B_1, α, β — постоянные, то после замены (2.7) придем к условию (4.1) при

$$k = [\alpha + 2(1-m)m^{-1}\beta]\,(2\beta+1)^{-1}$$

Если выполнены условия (4.1), то уравнение (2.8) и краевые условия (2.9), (2.10) для случая $m > 1$, а также соотношения (3.3), (3.4) для $m = 1$ будут инвариантны относительно следующей однопараметрической группы преобразований растяжения:

$$x \to Cx,\quad \tau \to C^2\tau,\quad p \to C^{-r}p,\quad S \to C^n S,\quad r = 2k + 1 - 2m^{-1} \qquad (4.2)$$

с параметром C. Следовательно, краевые задачи из §§ 2, 3 имеют автомодельные решения, инвариантные относительно группы преобразований (4.2). Эти решения можно искать, например, в виде

$$S = \tau^{1/2n}\psi(y, z),\quad y = Ap\tau^{1/2r},\quad z = x\tau^{-1/2},\quad r = 2k + 1 - 2m^{-1} \qquad (4.3)$$

или в других эквивалентных формах. Подставляя соотношения (4.1), (4.3) в уравнение (2.8) и равенства (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), получим уравнение, краевые условия и асимптотическое представление функции $\psi(y, z)$ в виде

$$n\psi - z\psi_z + ry\psi_y = \psi_{zz} - 2\,[(m-1)\,/\,m]\,y\,[\psi_z{}^m\,/\,(-\psi_y)]^{1/(m-1)}$$

$$\psi_z(y, 0) = 0, \qquad \psi(0, z) = h_n(z) \tag{4.4}$$

$$\psi(y, z) = z^n\left[1 - \frac{ny}{z}\left(\frac{m-1}{km+m-1}\right)^{(m-1)/m}\right] \qquad (z \to \infty,\ yz^r = \mathrm{const})$$

Здесь введено обозначение

$$h_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\frac{-(z-t)^2}{2}\,|\,t\,|^n\,dt =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi}}\exp\frac{-z^2}{4}\,[D_{-n-1}(z) + D_{-n-1}(-z)] \tag{4.5}$$

где D_{-n-1} — функции параболического цилиндра [2], через которые выражается интеграл (4.5). При натуральном n формула (4.5) может быть упрощена [2] и принимает вид

$$h_n(z) = \exp\frac{-z^2}{2}\,\frac{d^n}{dz^n}\left\{\exp\frac{z^2}{2}\left[1 + \frac{(-1)^n - 1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\}$$

$$\mathrm{Erfc}\,z = \int\limits_z^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int\limits_0^z e^{-t^2}\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.6}$$

Краевая задача (4.4) сводится к определению функции $\psi(y, z)$ в области $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Она значительно проще исходной задачи (2.8) — (2.10), так как содержит всего две независимые переменные.

Аналогичные упрощения проделаем для случая $m = 1$. Подставляя формулы (4.1), (4.3) при $m = 1$ в соотношения (3.3), (3.4), (3.6), (2.9), (2.10), будем иметь краевую задачу

$$n\psi - z\psi_z + (2k-1)\,y\psi_y = \psi_{zz}, \qquad Q^\circ < 0 \quad \text{в } D_1{}^\circ$$

$$\psi = G^\circ(z - y), \qquad Q^\circ = 0 \quad \text{в } D_2{}^\circ \tag{4.7}$$

$$Q^\circ = Q_z{}^\circ = 0 \quad \text{на } \Gamma^\circ, \qquad \psi_z(y, 0) = 0, \qquad \psi(0, z) = h_n(z)$$

$$\psi(y, z) = z^n \quad \text{при } z \to \infty, \qquad yz^{2k-1} = \mathrm{const}, \qquad Q^\circ = \psi_z + \psi_y$$

Здесь $D_1{}^\circ$ и $D_2{}^\circ$ — области квадранта $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, в которых выполнены условия $Q^\circ < 0$ и $Q^\circ = 0$ соответственно, а Γ° — неизвестная граница, разделяющая эти области. Через G° обозначена произвольная функция одной переменной, подлежащая определению. Из неравенства $S_p < 0$ вытекает, что всюду $\psi_y < 0$. Поэтому на прямой $z = 0$, где $\psi_z = 0$, будем иметь $Q^\circ < 0$ согласно (4.8), следовательно, область $D_1{}^\circ$ содержит прямую $z = 0$.

Краевая задача с неизвестной границей (4.7) допускает точное аналитическое решение при $k = 0$ и $k = 1/2$. Если $k = 0$ и $m = 1$ в соотношении (4.1), то выполнено условие $a_1(\tau) = A$. При этом, как следует из § 3, будет иметь место решение (3.9). Переходя в (3.9) к переменным (4.3) при $k = 0$, $m = 1$, получим следующее точное решение задачи (4.7) при $k = 0$:

$$\psi(y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^\infty \left[\exp\frac{-(z-t)^2}{2} + \exp\frac{-(z+t)^2}{2}\right] |y-t|^n\, dt \qquad (4.8)$$

Область D_1°, в которой имеет место решение (4.8) и выполнено неравенство $Q^\circ < 0$, здесь совпадает со всем квадрантом $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, а область D_2° вырождается, уходя на бесконечность.

Рассмотрим случай $k = 1/2$. При $k = 1/2$ из (4.7) получим для области D_1°

$$n\psi - z\psi_z = \psi_{zz}, \qquad \psi_z(y, 0) = 0 \qquad (4.9)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что функция $h_n(z)$ из (4.5) удовлетворяет равенствам (4.9). Следовательно, решение в области D_1° имеет вид

$$\psi(y, z) = h_n(z) g_n(y) \qquad (4.10)$$

где g_n — пока произвольная функция. Подставим решение (4.10) в граничное условие (4.7) на границе Γ°

$$h_n' q_n + h_n g_n' = 0, \qquad h_n'' g_n + h_n' g_n' = 0 \qquad (4.11)$$

Штрихами обозначены производные по аргументам y, z. Для существования нетривиального решения $g_n(y)$ определитель системы (4.11), линейной и однородной относительно g_n, g_n', должен быть равен нулю. Отсюда получим

$$h_n''(z) h_n(z) = h_n'^2(z) \qquad (4.12)$$

Наименьший положительный корень уравнения (4.12) обозначим через z_n. Таким образом, граница Γ° при $k = 1/2$ есть прямая $z = z_n$. Из первого уравнения (4.11) найдем

$$g_n(y) = \exp[-h_n'(z_n)\, y / h_n(z_n)] \qquad (4.13)$$

Здесь использовано условие $g_n(0) = 1$, вытекающее из граничного условия (4.7) при $y = 0$ и представления (4.10).

Таким образом, в области D_1°, определяемой условием $0 \leqslant z < z_n$, решение $\psi(y, z)$ задано равенствами (4.10), (4.13), в которых функция $h_n(z)$ определена формулами (4.5), (4.6), а число z_n — уравнением (4.12). В области D_2°, заданной неравенством $z > z_n$, имеем $\psi = G^\circ(z - y)$, согласно (4.7).

Положим $z = z_n$ и приравняем решения в областях D_1°, D_2°. Получим

$$h_n(z_n) g_n(y) = G^\circ(z_n - y), \qquad y \geqslant 0$$

Отсюда при помощи (4.13) найдем

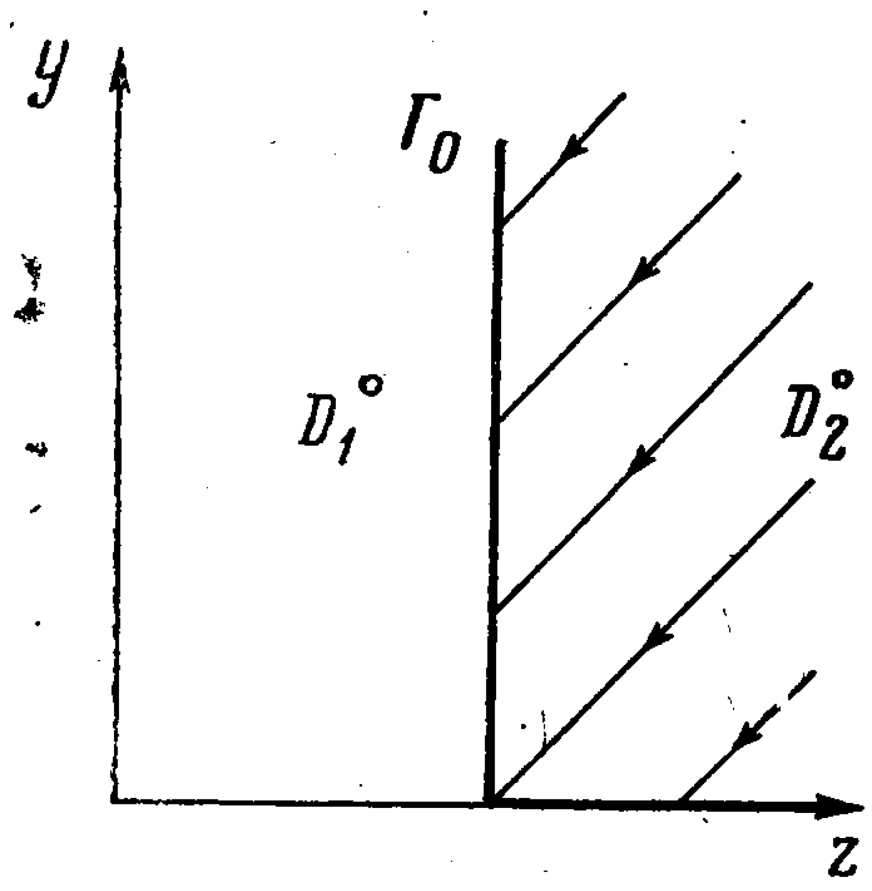
$$G^\circ(x) = h_n(z_n)\exp[h_n'(z_n)(x - z_n)/h_n(z_n)], \qquad x \leqslant z_n \tag{4.14}$$

Для определения функции $G^\circ(x)$ при $x > z_n$ воспользуемся граничным условием (4.7) при $y = 0$. Обозначая аргумент функции G° через x, получим

$$G^\circ(x) = h_n(x), \qquad x \geqslant z_n \tag{4.15}$$

Формулы (4.14), (4.15) полностью задают функцию G°, а тем самым и решение в области D_2°. Таким образом, решение задачи при $k = 1/2$ полностью построено, и можно показать, что оно удовлетворяет всем условиям (4.7).

По формулам (4.3) можно вернуться к исходным переменным. Если переменные τ, x, p таковы, что $z < z_n$, то управление должно равняться нулю (область D_1°, см. § 3). Если же $z > z_n$, то следует производить импульсное управление, причем при $z_n < z < z_n + y$ импульс должен переводить систему в состояние $z = z_n$, а при $z_n > z_n + y$ — в состояние $y = 0$; в последнем случае расходуется сразу весь ресурс управления.



Фиг. 2

На фиг. 2 изображены области D_1°, D_2° и прямы $y - z = \text{const}$, на которых функция ψ постоянна в области D_2^0 и по которым движется фазовая точка при импульсном управлении.

В качестве примера рассмотрим частный случай $k = 1/2$, $n = 2$, отвечающий квадратичной функции $F(x)$ в критерии (1.3). Из соотношений (4.6), (4.12), 4.13) при $n = 2$ найдем

$$h_2(z) = z^2 + 1, \qquad z_2 = 1, \qquad g_2(y) = e^{-y} \tag{4.16}$$

Решение (4.10), (4.14), (4.15) при $n = 2$ с учетом равенств (4.16) примет простой вид

$$\psi(y, z) = (z^2 + 1)e^{-y} \quad (z \leqslant 1), \qquad \psi(y, z) = 2e^{z-y-1} \quad (1 \leqslant z \leqslant 1 + y)$$

$$\psi(y, z) = (z - y)^2 + 1 \qquad (z \geqslant 1 + y)$$

В общем случае ($k \neq 0$, $k \neq 1/2$, $m \neq 1$) рассмотренные здесь задачи могут решаться численно, например, методом конечных разностей; некоторые расчеты такого рода проводятся в Институте проблем механики АН СССР.

Поступила 14 VIII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., Физматгиз, 1963.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., «Наука», 1966.