Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

О СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЯХ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

А. М. Формальский

(Москва)

Рассматривается система управления с нелинейной обратной связью. Начало координат является устойчивым состоянием равновесия этой системы. Получены необходимые и достаточные условия, при которых система имеет более одного стационарного состояния. Исследуются вопросы устойчивости «лишних» состояний равновесия. Рассмотрены некоторые простейшие свойства области притяжения начала координат.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему управления, описываемую следующим матричным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$dx / dt = Ax + bu \tag{1.1}$$

Здесь $x = \| x_i \|$, $A = \| a_{ij} \|$, $b = \| b_i \|$ — матрицы порядка $(n \times 1)$, $(n \times n)$, $(n \times 1)$ соответственно, u — управляющая функция, имеющая вид

$$u = \varphi(\sigma) \qquad (\sigma = cx) \tag{1.2}$$

Здесь $c = \| c_i \|$ — постоянная матрица порядка $(1 \times n)$, $\varphi(\sigma)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая следующим ограничениям:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = k \quad (0 < k < \infty) \tag{1.3}$$

$$0 < \varphi(\sigma) / \sigma \leqslant k \quad \text{при} \quad \sigma \neq 0 \tag{1.4}$$

$$\varphi(\sigma) / \sigma \to 0 \quad \text{при} \quad |\sigma| \to \infty \tag{1.5}$$

Будем предполагать, что для системы (1.1), (1.2) выполняются обычные условия существования и единственности решений при любых начальных условиях.

Начало координат будет, вследствие условия (1.3), состоянием равновесия системы (1.1), (1.2). Предположим, что это состояние является асимптотически устойчивым положением равновесия системы (1.1) при $u = k\sigma$, т. е. системы

$$dx / dt = (A + kbc)x \tag{1.6}$$

Другими словами, пусть

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.7}$$

где λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть корни характеристического уравнения

$$\det(A + kbc - \lambda E) = 0 \tag{1.8}$$

При условии (1.7) состояние $x = 0$ является, как легко видеть [1] асимптотически устойчивым стационарным состоянием системы (1.1), (1.2).

Поставим задачу: выяснить условия, при которых система (1.1), (1.2) имеет стационарные состояния не только в начале координат, т. е. имеет более одного стационарного состояния. Иначе говоря, задача состоит в том, чтобы выяснить условия, при которых в системе (1.1), (1.2) возникают «лишние» (ненужные) положения равновесия.

В случае, когда в системе окажется более одного стационарного состояния, рассмотрим вопрос об устойчивости этих состояний.

Вопросы о числе состояний равновесия и об их устойчивости будут рассмотрены ниже и для случая, когда функция $\varphi(\sigma)$ терпит разрыв при $\sigma = 0$ ($k = \infty$). В этом случае ограничения, наложенные на функцию $\varphi(\sigma)$, будут несколько видоизменены.

2. Стационарные состояния в случае $k < \infty$. Положениями равновесия системы (1.1), (1.2) являются, очевидно, те и только те состояния, которые удовлетворяют условиям

$$Ax = -b\varphi(cx) \tag{2.1}$$

Рассмотрим случай, когда матрица A имеет нулевые собственные значения ($\det(A) = 0$). При этом ранг r матрицы A меньше n

$$r(A) < n \tag{2.2}$$

Докажем, что имеет место следующая лемма.

Лемма. При условии $\det(A) = 0$ система (1.1), (1.2) имеет единственное состояние равновесия в начале координат.

Пусть

$$r\,\|b, Ab, \ldots, A^{n-1}b\| = \rho \leqslant n \tag{2.3}$$

При $\rho = n$ система (1.1) будет вполне управляемой в смысле Калмана [2].

Как следует, например, из [3, 4], систему (1.1), (1.2) при помощи невырожденного преобразования $x = Qz$ можно привести к виду

$$dz_1/dt = A_1z_1 + A_3z_2 + b_1\varphi(c_1z_1 + c_2z_2), \quad dz_2/dt = A_2z_2 \tag{2.4}$$

Здесь $z_1, z_2, A_1, A_2, A_3, b_1, c_1, c_2$ — матрицы порядка $(\rho \times 1)$, $[(n-\rho) \times 1]$, $(\rho \times \rho)$, $[(n-\rho) \times (n-\rho)]$, $[\rho \times (n-\rho)]$, $(\rho \times 1)$, $(1 \times \rho)$, $[1 \times (n-\rho)]$ соответственно. Причем

$$r(V) = r\,\|b_1, A_1b_1, \ldots, A_1^{\rho-1}b_1\| = \rho \tag{2.5}$$

Из условия асимптотической устойчивости системы (2.4) вытекает, что $r(A_2) = n - \rho$, а отсюда и из условия (2.2) получаем

$$r(A_1) < \rho \tag{2.6}$$

Из равенства $r(A_2) = n - \rho$ следует, что уравнения (2.1) в переменных z_1, z_2 приобретают вид

$$A_1z_1 = -b_1\varphi(c_1z_1), \quad z_2 = 0 \tag{2.7}$$

Таким образом, исследование уравнения (2.1) сводится к исследованию уравнения (2.7) порядка ρ, для которого имеет место равенство (2.5).

Столбцы матрицы V являются линейными комбинациями столбцов матрицы $\| A_1, b_1 \|$, поэтому $r(V) \leqslant r \| A_1, b_1 \|$ (см. [5]). Так как $r \| A_1, b_1 \| \leqslant \rho$, из соотношения (2.5) заключаем, что

$$r \| A_1, b_1 \| = \rho \tag{2.8}$$

Заметим, что, как видно из (2.6) и (2.8), $r(A_1) = \rho - 1$.

Соотношения (2.6), (2.8) дают основания утверждать, что равенство (2.7) может иметь место только при $\varphi(c_1 z_1) = 0$. Из условия (1.3) и неравенства (1.4) следует, что $\varphi(\sigma) = 0$ только при $\sigma = 0$. Поэтому уравнение (2.7) может иметь только такие решения z_1, для которых $c_1 z_1 = 0$. Следовательно, эти решения z_1 удовлетворяют уравнениям

$$A_1 z_1 = 0, \qquad c_1 z_1 = 0 \tag{2.9}$$

Если система (2.9) имеет хотя бы одно ненулевое решение, тогда она имеет ненулевые решения, сколь угодно близкие к началу координат. Это означает, что система (2.4) имеет сколь угодно близкие к началу координат стационарные состояния, а это противоречит условию асимптотической устойчивости состояния $x = 0$. Следовательно, уравнения (2.9) имеют только нулевое решение. Отсюда вытекает, что уравнение (2.7), а значит, и уравнение (2.1), имеет только нулевое решение.

Теперь будем предполагать, что

$$r(A) = n \tag{2.10}$$

Тогда все стационарные состояния системы (1.1), (1.2) удовлетворяют матричному соотношению

$$x = -A^{-1} b \varphi(cx) \tag{2.11}$$

т. е. расположены на прямой, проходящей через начало координат. Если состояние x удовлетворяет условию (2.11), то величина $\sigma = cx$ удовлетворяет, очевидно, скалярному уравнению

$$\sigma = -cA^{-1} b \varphi(\sigma) \tag{2.12}$$

Легко показать и обратное: если некоторое число σ есть решение уравнения (2.12), то вектор

$$x = -A^{-1} b \varphi(\sigma) \tag{2.13}$$

является решением уравнения (2.11).

Таким образом, матричное уравнение (2.11) имеет столько решений, сколько скалярное уравнение (2.12). Поэтому, чтобы решить поставленную задачу, достаточно исследовать уравнение (2.12).

Число корней уравнения (2.12) зависит от того, что собой представляет величина $cA^{-1}b$. Необходимое для решения рассматриваемой задачи суждение об этой величине можно получить, используя условие (1.7) устойчивости линейной системы (1.6).

Характеристическое уравнение (1.8), как следует из детерминантного соотношения, приведенного, например, в [3] (стр. 163), можно представить в виде

$$\det(A - \lambda E)\, [1 + kc (A - \lambda E)^{-1} b] = 0 \tag{2.14}$$

Для выполнения неравенств (1.7) необходимо, чтобы знак коэффициента при старшей степени λ в уравнении (2.14) был равен знаку свободного члена. Это необходимое условие устойчивости имеет вид

$$(-1)^n \det(A)\,[1 + kcA^{-1}b] > 0 \qquad (2.15)$$

Обозначим через l число положительных собственных значений матрицы A. Тогда, очевидно

$$(-1)^{n-l} \det(A) > 0 \qquad (2.16)$$

Используя (2.16), вместо неравенства (2.15) получаем

$$(-1)^l\,[1 + kcA^{-1}b] > 0 \qquad (2.17)$$

Из неравенства (2.17) вытекает, что

$$cA^{-1}b < -1/k \quad (0 < -1/cA^{-1}b < k) \quad (l = 2p + 1) \qquad (2.18)$$

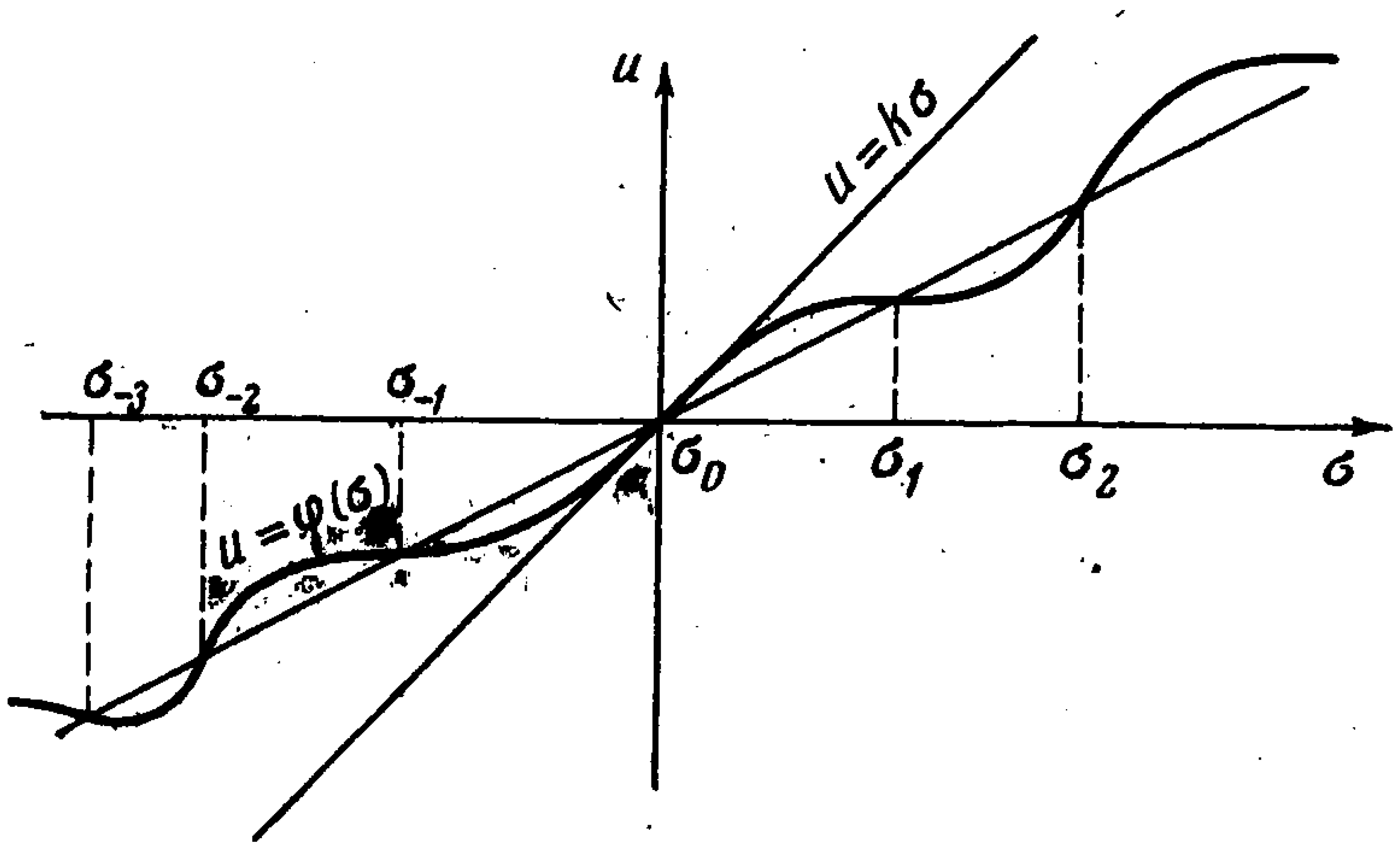
$$cA^{-1}b > -1/k \quad (l = 2p)\ (p \text{ — целое число}) \qquad (2.19)$$

Теперь возвратимся к исследованию уравнения (2.12). При этом будем интересоваться корнями, отличными от нуля.

Пусть сначала $l = 2p + 1$. Так как при этом $cA^{-1}b \neq 0$, уравнение (2.12) можно переписать в виде

$$\varphi(\sigma)\,/\,\sigma = -1\,/\,cA^{-1}b \qquad (2.20)$$

Левая часть соотношения (2.20) есть непрерывная функция, причем $\varphi(\sigma)\,/\,\sigma \to k$ при $\sigma \to 0$. Из условия (1.5) следует, что уравнение (2.20) при наличии неравенства (2.18) имеет, по крайней мере, два корня: один положительный σ_1 и один отрицательный σ_{-1} (фигура).



Пусть теперь $l = 2p$. Если $cA^{-1}b = 0$, то уравнение (2.12) имеет только нулевое решение. При $cA^{-1}b \neq 0$ уравнение (2.12) можно записать в виде (2.20). Если $cA^{-1}b < 0$, то, как видно из неравенства (2.19), $-1/cA^{-1}b > k$. Из условия (1.4) вытекает, что уравнение (2.20) не имеет корней. Если $cA^{-1}b > 0$, то $-1\,/\,cA^{-1}b < 0$ и, как снова вытекает из условия (1.4), уравнение (2.20) не имеет корней. Следовательно, если $l = 2p$, то уравнение (2.11) имеет единственное решение $x = 0$.

Таким образом, учитывая доказанную выше лемму, получаем две следующие теоремы.

Теорема 2.1. В системе (1.1), (1.2) существует более одного стационарного состояния тогда и только тогда, когда матрица A не имеет нулевых собственных значений, а число ее положительных собственных значений нечетно.

Теорема 2.2. Если матрица A не имеет нулевых собственных значений, а число ее положительных собственных значений нечетно, то система (1.1), (1.2) имеет, по крайней мере, три стационарных состояния.

Следствие. Если все собственные значения матрицы A имеют неположительные действительные части, то система (1.1), (1.2) имеет только одно состояние равновесия $x = 0$.

Чтобы найти все стационарные состояния системы, нужно найти все корни уравнения (2.12) и подставить их в правую часть соотношения (2.13).

Рассмотрим для примера следующую функцию $\varphi(\sigma)$:

$$u = \varphi(\sigma) = \begin{cases} -M & (k\sigma \leqslant -M) \\ k\sigma & (|k\sigma| \leqslant M) \\ M & (k\sigma \geqslant M) \end{cases} \qquad (M = \text{const} > 0) \tag{2.21}$$

Функция (2.21), описывающая линейную обратную связь с насыщением, удовлетворяет, очевидно, ограничениям (1.3) — (1.5). При выполнении условий теоремы 2.2 уравнение (2.12) имеет только три решения

$$\sigma_{-1} = cA^{-1}bM \qquad \sigma_0 = 0, \qquad \sigma_1 = -cA^{-1}bM$$

Состояниями равновесия системы (1.1), (2.21) будут три состояния

$$x_{-1} = A^{-1}bM \qquad x_0 = 0, \qquad x_1 = -A^{-1}bM \tag{2.22}$$

Заметим, что вопрос о стационарных состояниях регулируемых систем рассматривался в несколько другой постановке в [6].

3. Случай $k = \infty$. Рассмотрим случай, когда функция $\varphi(\sigma)$ терпит разрыв при $\sigma = 0$. Пусть

$$\lim_{\sigma\to -0} \varphi(\sigma) = \varphi(-0) < 0, \qquad \lim_{\sigma\to +0} \varphi(\sigma) = \varphi(+0) > 0$$

Функцию $\varphi(\sigma)$ при $\sigma \neq 0$ будем предполагать непрерывной. При $\sigma = 0$ функцию $\varphi(\sigma)$ определим в соответствии с теорией дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями [7]. Пусть $cb \neq 0$, тогда

$$\varphi(0) = \begin{cases} \varphi(-0) & \text{при} \quad x \in P_1 \\ -cAx/cb & \text{при} \quad x \in P_2 \\ \varphi(+0) & \text{при} \quad x \in P_3 \end{cases} \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &= \{x\colon\ cx = 0, \quad -cAx\,/\,cb < \varphi(-0)\} \\ P_2 &= \{x\colon\ cx = 0, \quad \varphi(-0) \leqslant -cAx\,/\,cb \leqslant \varphi(+0)\} \\ P_3 &= \{x\colon\ cx = 0, \quad \varphi(+0) < -cAx\,/\,cb\} \end{aligned}$$

Определение (3.1) значения $\varphi(0)$ таково, что, производная $\sigma^\cdot$ в силу системы (1.1), (1.2) в точках $x \in P_2$ равна нулю. В области P_2 система (1.1), (1.2) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \left(A - \frac{bcA}{cb}\right)x \tag{3.2}$$

В точках $x \in P_1$ или $x \in P_3$ производная $\sigma^\cdot \neq 0$, т. е. фазовые траектории «протыкают» участки P_1 и P_3 гиперплоскости $cx = 0$.

Будем считать по-прежнему выполненными условия (1.4) (левая часть) и (1.5).

Состояние $x = 0$ является, как видно из (3.1), стационарным состоянием системы (1.1), (1.2). Будем предполагать, что это состояние равновесия асимптотически устойчиво. Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости состояния $x = 0$ содержит два требования [8].

Первое требование состоит в том, что множество P_2 должно быть «притягивающим». Это требование записывается в виде неравенства

$$cb < 0 \tag{3.3}$$

Второе требование состоит в том, что движение, начинающееся из точек $x \in P_2$, достаточно близких к началу координат, асимптотически стремится к началу координат, оставаясь на множестве P_2. Уравнение (3.2), которое описывает движение системы на множестве P_2 (так называемое скользящее движение), имеет, очевидно, одно нулевое собственное значение $\lambda_1 = 0$, соответствующее интегралу $cx = \text{const}$. Второе требование сводится к тому, что все остальные собственные значения системы (3.2) имеют отрицательные действительные части

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{3.4}$$

Значения λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть корни характеристического уравнения

$$\det\,(A - bcA \,/\, cb - \lambda E) = 0 \tag{3.5}$$

Теперь перейдем непосредственно к исследованию вопроса о стационарных состояниях.

На плоскости $cx = 0$ есть только одно состояние равновесия $x = 0$. Действительно, на множествах P_1 и P_3 нет стационарных состояний, поскольку на них $\sigma^{\cdot} \neq 0$ (в силу неравенства (3.3) $\sigma^{\cdot} < 0$ при $x \in P_1$ и $\sigma^{\cdot} > 0$ при $x \in P_3$). На множестве P_2 не может быть стационарных состояний, кроме состояния $x = 0$, вследствие условия (3.4).

Исследование вопроса о состояниях равновесия, лежащих вне плоскости $cx = 0$, сводится к рассмотрению уравнения (2.1).

При условии (2.2) исследование уравнения (2.1), аналогичное проведенному в п. 2, приводит к сформулированной в этом параграфе лемме. Таким образом, эта лемма имеет место и в случае $k = \infty$.

При условии (2.10) ход рассуждений, приведенных в предыдущем пункте так же, как и при условии (2.2), сохраняется. В неравенствах (2.18), (2.19) следует положить $k = \infty$. Выведем, однако, эти неравенства в случае $k = \infty$ путем строгих рассуждений.

Характеристическое уравнение (3.5), как следует из [3], можно записать в виде

$$\det\,(A - \lambda E)\,[1 - (cA/cb)(A - \lambda E)^{-1}\,b] = 0 \tag{3.6}$$

Свободный член в этом уравнении равен нулю. Разложение выражения, стоящего в квадратных скобках, по степеням λ начинается с члена $-\,\lambda\,(cA^{-1}b/cb)$. Для выполнения неравенств (3.4) необходимо, чтобы знак коэффициента при старшей степени λ^n в уравнении (3.6) был равен знаку коэффициента при λ. Это необходимое условие имеет вид

$$(-1)^n \det\,(A)\,(-\,cA^{-1}b/cb) > 0 \tag{3.7}$$

Используя неравенства (2.16) и (3.3), вместо (3.7) получаем выражение

$$(-1)^l cA^{-1}b > 0$$

Отсюда следуют неравенства, которые получаются из (2.18), (2.19) при $k = \infty$

$$cA^{-1}b < 0 \quad (l = 2p + 1), \qquad cA^{-1}b > 0 \quad (l = 2p)$$

Таким образом, в случае $k = \infty$ имеют место теоремы 2.1 и 2.2.

Типичным примером для данного пункта является система с релейной обратной связью. Функция $\varphi(\sigma)$ в такой системе имеет вид

$$\varphi(\sigma) = -M \quad (\sigma < 0), \qquad \varphi(\sigma) = M \quad (\sigma > 0)$$

С учетом этой формулы и формулы (3.1) выражение для управления можно записать в виде

$$u = \begin{cases} -M & (cx < 0 \text{ или } cx = 0 \text{ и } -cAx/cb < -M) \\ -cAx/cb & (cx = 0 \text{ и } |cAx/cb| \leqslant M) \\ M & (cx > 0 \text{ или } cx = 0 \text{ и } -cAx/cb > M) \end{cases} \tag{3.8}$$

Функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет всем перечисленным в данном пункте условиям. При выполнении условий теоремы 2.2 система (1.1), (3.8) имеет три стационарных состояния (2.22).

Приведем еще один пример.

Рассмотрим движение летательного аппарата на постоянной высоте с постоянной по величине скоростью. Предположим, что аппарат стабилизирован по крену, тогда уравнения движения аппарата в курсовой плоскости при некоторых допущениях можно записать в виде [9,10].

$$dx_1/dt = x_2, \quad dx_2/dt = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u, \quad dx_3/dt = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3u \tag{3.9}$$

Здесь x_1 и x_3 — углы курса и скольжения, x_2 — угловая скорость курса, u — угол отклонения аэродинамических рулей, удовлетворяющий условию $|u| \leqslant u_0$, где u_0 — максимально возможный угол отклонения, постоянные коэффициенты a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}, b_2, b_3 определяются аэродинамической и весовой компоновкой аппарата и скоростью движения центра тяжести.

Предположим, что желаемым режимом движения аппарата является движение с постоянным углом курса $x_1 = 0$. Тогда , очевидно, желаемым состоянием системы (3.9) будет состояние $x = 0$. Пусть обратная связь (1.2), осуществляющая стабилизацию этого состояния, удовлетворяет условиям (1.3) (либо (3.1)), (1.4), (1.7); вследствие ограничения $|u| \leqslant u_0$, она удовлетворяет также условию (1.5). Матрица А системы (3.9) имеет, по крайней мере, одно нулевое собственное значение (аппарат без обратной связи безразличен к углу курса). Поэтому система (3.9) (1.2) имеет только одно стационарное состояние $x = 0$.

4. Устойчивость стационарных состояний. В этом пункте будем предполагать выполненными условия теоремы 2.2, т. е. будем считать. что $\det(A) \neq 0$ и $l = 2p + 1$.

Пусть $x_s \neq 0$ — стационарное состояние системы (1.1), (1.2), соответствующее корню $\sigma_s \neq 0$ уравнения (2.12). Рассмотрим вопрос об устойчивости этого стационарного состояния.

Введем при помощи соотношения

$$x = x_s + y \tag{4.1}$$

вектор y новых переменных. Будем считать, что функция $\varphi(\sigma)$ является аналитической в некоторой окрестности значения σ_s

$$\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma_s) + \varphi'(\sigma_s)(\sigma - \sigma_s) + (1/m!)\,\varphi^{(m)}(\sigma_s)(\sigma - \sigma_s)^m + O[(\sigma - \sigma_s)^{m+1}] \tag{4.2}$$

Здесь m — порядок первой после $\varphi'(\sigma_s)$ отличной от нуля производной функции $\varphi(\sigma)$ в точке σ_s; $O[(\sigma-\sigma_s)^{m+1}]$ — функция, разложение которой начинается с членов, порядок которых не ниже $m+1$. Тогда система (1.1), (1.2) может быть записана в виде

$$\frac{dy}{dt} = Ay + b\varphi'(\sigma_s)cy + b\frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(\sigma_s)(cy)^m + bO[(cy)^{m+1}] \qquad (4.3)$$

Вопрос об устойчивости стационарного состояния x_s системы (1.1), (1.2) сводится к вопросу об устойчивости состояния равновесия $y=0$ системы (4.3). Уравнения первого приближения для системы (4.3) имеют вид

$$dz/dt = (A + \varphi'(\sigma_s)bc)z \qquad (4.4)$$

Рассмотрим сначала ситуацию, когда для некоторого $\varepsilon > 0$ при всех значениях σ, удовлетворяющих условию $\sigma_s - \varepsilon < \sigma < \sigma_s$, имеет место неравенство

$$(-1/cA^{-1}b)\sigma < \varphi(\sigma) \qquad (4.5)$$

Подобная ситуация имеет место на фигуре в точках σ_{-3}, σ_{-1}, σ_1. При условии (4.5), очевидно, имеет место неравенство

$$-1/cA^{-1}b \geqslant \varphi'(\sigma_s) \qquad (4.6)$$

Покажем, что имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. Если $\varphi'(\sigma_s) < -1/cA^{-1}b$, то стационарное состояние x_s системы (1.1), (1.2) неустойчиво.

Система (4.4) отличается от системы (1.6) только тем, что в системе (4.4) вместо величины k стоит $\varphi'(\sigma_s)$. Поэтому, как следует из неравенства (2.18), необходимым условием асимптотической устойчивости системы (4.4) является неравенство $\varphi'(\sigma_s) > -1/cA^{-1}b$. Как видно из (4.6), это необходимое условие не выполняется в ситуации (4.5). При наличии в соотношении (4.6) знака строгого неравенства (кривая $u=\varphi(\sigma)$ пересекает в точке $\sigma=\sigma_s$ прямую $u=(-1/cA^{-1}b)\sigma$, переходя из верхней полуплоскости в нижнюю) система (4.4), а значит, и система (4.3) [11], является неустойчивой.

Пусть в соотношении (4.6) имеет место знак равенства (кривая $u=\varphi(\sigma)$ в точке $\sigma=\sigma_s$ касается прямой $u=(-1/cA^{-1}b)\sigma$). Тогда, как вытекает из выражений (4.2) и (4.5)

$$\begin{aligned} &\varphi^{(m)}(\sigma_s) > 0, \quad \text{если} \quad m = 2q \\ &\varphi^{(m)}(\sigma_s) < 0, \quad \text{если} \quad m = 2q+1 \quad (q - \text{целое число}) \end{aligned} \qquad (4.7)$$

Системы (4.3) и (4.4) при наличии знака равенства в соотношении (4.6) приобретают вид

$$\frac{dy}{dt} = \left(A - \frac{bc}{cA^{-1}b}\right)y + b\frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(\sigma_s)(cy)^m + bO[(cy)^{m+1}] \qquad (4.8)$$

$$\frac{dz}{dt} = \left(A - \frac{bc}{cA^{-1}b}\right)z \qquad (4.9)$$

Система (4.9) имеет нулевое собственное значение, соответствующее интегралу $cA^{-1}z = \text{const}$. Если среди остальных имеется собственное значение с положительной действительной частью, то система (4.9), а значит, и система (4.8), неустойчива.

Предположим, что $\lambda_1 = 0$ однократное собственное значение системы (4.9), все остальные собственные значения пусть имеют отрицательные действительные части

$$Re\,\lambda_i < 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{4.10}$$

Значения λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть корни характеристического уравнения

$$\det\,(A - bc\,/\,cA^{-1}b - \lambda E) = 0 \tag{4.11}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 4.2. Если $\varphi'(\sigma_s) = -1\,/\,cA^{-1}b$, уравнение (4.11) имеет однократный нулевой корень, а действительные части остальных корней отрицательны, то стационарное состояние x_s неустойчиво.

Принятые предположения сводят задачу об устойчивости системы (4.8) к исследованию так называемого [11] критического случая одного нулевого корня. Результаты, полученные для этого критического случая Ляпуновым ([11], стр. 92—96), применим к рассматриваемой здесь задаче. В соответствии с методом исследования, изложенным в [11], примем интеграл $v_1 = cA^{-1}y$ линейной системы (4.9) за новую переменную для системы (4.8). Кроме того, введем также переменные $v_2, \ldots, v_n$ так, чтобы соответствующее преобразование $y = Dv$ было невырожденным. Тогда система (4.8) приобретает вид

$$\frac{dv}{dt} = D^{-1}\left(A - \frac{bc}{cA^{-1}b}\right)Dv + D^{-1}b\,\frac{1}{m!}\,\varphi^{(m)}(\sigma_s)\,(cDv)^m + D^{-1}bO\,[(cDv)^{m+1}] \tag{4.12}$$

Причем первое уравнение этой системы (оно получается умножением системы (4.8) слева на строку cA^{-1}) имеет вид

$$\frac{dv_1}{dt} = cA^{-1}b\,\frac{1}{m!}\,\varphi^{(m)}(\sigma_s)\,(cDv)^m + cA^{-1}bO\,[(cDv)^{m+1}] \tag{4.13}$$

Приравняем нулю правые части уравнений (4.12)

$$\left(A - \frac{bc}{cA^{-1}b}\right)Dv + b\,\frac{1}{m!}\,\varphi^{(m)}(\sigma_s)\,(cDv)^m + bO\,[(cDv)^{m+1}] = 0 \tag{4.14}$$

Рассмотрим последние $(n - 1)$ скалярных соотношений системы (4.14) как уравнения относительно переменных $v_2, \ldots, v_n$, считая v_1 независимой переменной [11]. Пусть

$$v_i = u_i\,(v_1) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{4.15}$$

решение этих уравнений, причем $u_i\,(0) = 0$.

Умножив соотношение (4.14) слева на строку cA^{-2}, получим

$$cA^{-1}Dv - \frac{cA^{-2}b}{cA^{-1}b}\,cDv + cA^{-2}b\,\frac{1}{m!}\,\varphi^{(m)}(\sigma_s)\,(cDv)^m + cA^{-2}\,bO\,[(cDv)^{m+1}] = 0 \tag{4.16}$$

Первый член, стоящий в уравнении (4.16), есть переменная v_1. Решение уравнения (4.16) относительно переменной cDv разлагается в ряд по переменной v_1 следующим образом:

$$cDv = \frac{cA^{-1}b}{cA^{-2}b}\,v_1 + \ldots \tag{4.17}$$

где точками обозначены члены более высокого по переменной v_1 порядка. Отсюда следует, что величина $cDv\,(v_1)$, где $v\,(v_1)$ — столбец, состоящий из функций v_1, $u_2\,(v_1)$, ..., $u_n\,(v_1)$ также разлагается в ряд (4.17).

Сделаем в системе (4.12) замену переменных при помощи соотношений

$$v_1 = v_1, \quad v_i = w_i + u_i(v_1) \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

Уравнение (4.13) после этой замены приобретает вид

$$dv_1 / dt = gv_1^m + V_1(v_1, w_2, \ldots, w_n) \tag{4.18}$$

где в соответствии с (4.17)

$$g = \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(\sigma_s) \frac{(cA^{-1}b)^{m+1}}{(cA^{-2}b)^m} \tag{4.19}$$

функция $V_1(v_1, w_2, \ldots, w_n)$ содержит члены, измерение которых не ниже m, а разложение функции $V_1(v_1, 0, \ldots, 0)$ начинается с членов, степень которых не ниже $m + 1$.

Если $m = 2q$, то система (4.8) неустойчива [11] независимо от знака коэффициента g.

Если $m = 2q + 1$, то решение задачи об устойчивости зависит от знака коэффициента g. В выражении (4.19) известны знаки всех величин, за исключением величины $cA^{-2}b$. Найдем знак этой величины.

Характеристическое уравнение (4.11) можно, пользуясь детерминантным соотношением [3], записать в виде

$$\det(A - \lambda E)\left[1 - \frac{c(A - \lambda E)^{-1}b}{cA^{-1}b}\right] = 0 \tag{4.20}$$

Свободный член в этом уравнении равен нулю. Разложение выражения, стоящего в квадратных скобках, в ряд по степеням λ начинается с члена $-\lambda\,(cA^{-2}b/cA^{-1}b)$. Из неравенств (4.10) следует, что знак коэффициента при λ^n в уравнении (4.20) равен знаку коэффициента при λ. Это условие записывается в виде

$$(-1)^n \det(A)\,(-cA^{-2}b/cA^{-1}b) > 0 \tag{4.21}$$

Пользуясь условием, что $l = 2p + 1$, и неравенствами (2.16), (2.18), вместо соотношения (4.21) получаем искомое неравенство

$$cA^{-2}b < 0 \tag{4.22}$$

Из неравенств (4.7) и (4.22) вытекает, что если $m = 2q + 1$, то $g > 0$. Следовательно, при нечетном m система (4.8) неустойчива [11].

Неисследованными остаются критические случаи, когда уравнение (4.11) имеет неоднократный нулевой корень или нулевой корень и пару чисто мнимых корней, а действительные части остальных корней отрицательны.

Рассмотрим теперь другую ситуацию. Пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что при всех значениях σ, удовлетворяющих условию $\sigma_s - \varepsilon < \sigma < \sigma_s$, имеет место неравенство

$$(-1 / cA^{-1}b)\,\sigma > \varphi(\sigma) \tag{4.23}$$

Подобная ситуация имеет место на фигуре в точках σ_{-2}, σ_2. Из условия (4.23) получаем, что

$$-1 / cA^{-1}b \leqslant \varphi'(\sigma_s) \tag{4.24}$$

Если в соотношении (4.24) имеет место знак строгого неравенства (кривая $u = \varphi(\sigma)$ пересекает в точке $\sigma = \sigma_s$ прямую $u = (-1 / cA^{-1}b)\,\sigma$, переходя из нижней полуплоскости в верхнюю), то это означает, что выполняется лишь необходимое условие устойчивости (2.18). Заключение об устой чивости в этом случае сделать не удается. При $\varphi'(\sigma_s) = k$, например, состояние x_s, очевидно, асимптотически устойчиво. Как вытекает из [1], состояние x_s будет асимптотически устойчивым также при всех значениях $\varphi'(\sigma_s)$, достаточно близких к значению k.

Рассмотрим теперь случай, когда в соотношении (4.24) имеет место знак равенства. При этом, как следует из выражений (4.2) и (4.23)

$$\varphi^{(m)}(\sigma_s) < 0, \quad \text{если } m = 2q$$

$$\varphi^{(m)}(\sigma_s) > 0, \quad \text{если } m = 2q + 1 \tag{4.25}$$

Системы (4.3) и (4.4) в рассматриваемом случае приобретают вид (4.8) и (4.9) соответственно. Будем предполагать, что имеют место неравенства (4.10), при этом задача об устойчивости сводится к исследованию критического случая одного нулевого корня.

Устойчивость в этом случае определяется величинами m и g в уравнении (4.18).

При четном m состояние x_s неустойчиво [11].

Пусть теперь $m = 2q + 1$. При этом, как вытекает из неравенств (4.22) и (4.25), коэффициент $g < 0$, и, следовательно [11], стационарное состояние x_s асимптотически устойчиво.

Итак, в ситуации (4.23) имеет место следующая теорема.

Теорема 4.3. Если $\varphi'(\sigma_s) = -1 / cA^{-1}b$, уравнение (4.11) имеет однократный нулевой корень, а действительные части остальных корней отрицательны, то стационарное состояние x_s системы (1.1), (1.2) при четном m неустойчиво, а при нечетном m асимптотически устойчиво.

Таким образом, в ситуации (4.23) состояние x_s, в зависимости от поведения функции $\varphi(\sigma)$, может быть как асимптотически устойчивым, так и неустойчивым.

Для управлений (2.21) и (3.8), приведенных в качестве примера в предыдущих пунктах, стационарные состояния $x_{-1} = A^{-1}bM$, $x_1 = -A^{-1}bM$ являются неустойчивыми. Это следует из теоремы 4.1.

5. **Области устойчивости.** Обозначим через W область притяжения (область устойчивости) начала координат, т. е. множество состояний x, из которых система (1.1), (1.2) асимптотически приходит в начало координат. Существует, очевидно, окрестность S начала координат, целиком принадлежащая области W.

Если система (1.1), (1.2) имеет только одно состояние равновесия $x = 0$, это еще не означает, что область W совпадает со всем пространством X. Если же система имеет более одного стационарного состояния, то можно утверждать, что область W не совпадает со всем пространством X.

Из теоремы 2.2 вытекает, что, если матрица A невырожденна и число ее положительных собственных значений нечетно, то область W не совпадает со всем пространством X, т. е. система (1.1), (1.2) не является устойчивой «в целом».

Если функция (1.2) ограничена $|\varphi(\sigma)| \leqslant M$, как в примерах (2.21), (3.8) и (3.9), то область W занимает лишь часть пространства X в любом случае, когда у матрицы A есть собственные значения с положительной действительной частью. В самом деле, как следует, например, из [2, 12], в таком случае так называемая область управляемости Q системы (1.1), с управлениями $|u(t)| \leqslant M$ занимает лишь часть пространства X, а $W \in Q$.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in W$. Существует такой момент времени T, что траектория $x(x_0, t)$ системы (1.1), (1.2), начинающаяся из точки x_0, в этот момент оказывается внутри окрестности S, $x(x_0, T) \in S$. Из факта непрерывной зависимости решения от начальных условий следует, что траектории, начинающиеся из достаточно малой окрестности точки x_0, в момент времени T оказываются в окрестности S. Из этого вытекает, что область W открыта.

Обозначим через R множество предельных (граничных) точек области W. Если $x_0 \in R$, то $x(x_0, t) \in R$ при всех t. Это легко следует из непрерывной зависимости решения от начальных условий. Другими словами граница R области устойчивости W целиком состоит из интегральных траекторий системы (1.1), (1.2).

Нетрудно видеть, что границе R могут принадлежать только неустойчивые стационарные состояния системы (1.1), (1.2).

Поступила 8 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А. О сходимости процессов автоматического регулирования после больших начальных отклонений. Автоматика и телемеханика, 1946, т. 7, № 2—3.
2. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. I Междунар. конгр. ИФАК, т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1961.
3. Лефшец С. Устойчивость нелинейных систем автоматического управления. М., «Мир», 1967.
4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
5. Гальперин Е. А., Красовский Н. Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
6. Миндлин И. М. Об устойчивости систем авторегулирования с одним нелинейным элементом. Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 3.
7. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960, т. 51 (93), вып. 1.
8. Бромберг П. В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М., «Наука», 1967.
9. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полета. М., «Машиностроение», 1965.
10. Боднер В. А. Теория автоматического управления полетом. М., «Наука», 1964.
11. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., Изд-во АН СССР, 1962.
12. Формальский А. М. Построение области управляемости для системы с неустойчивым объектом. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1965, № 5.