Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА НАБЛЮДЕНИЯ ПРИ ЗАПАЗДЫВАНИИ ИНФОРМАЦИИ

В. Б. Колмановский

(Москва)

Проблемы оптимального управления при неполной информации представляют существенный интерес для практических задач управления. В предлагаемой работе исследуется вопрос об оптимизации процесса наблюдения за объектом при неполных и неточных измерениях его положения. Эти ошибки измерения обусловлены, во-первых, запаздыванием информации, и во-вторых, наличием случайных возмущений, действующих на измерительные устройства. При сделанных предположениях задача выбора оптимального закона наблюдения сведена к обычной задаче оптимального управления. Для некоторых критериев качества оптимальный закон наблюдения найден в явном виде.

1. Пусть движение исследуемого объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$x^{\cdot}(t) = A(t)x(t) + f(t) \tag{1.1}$$

а наблюдению доступен вектор $y(t)$, равный

$$y(t) = \int_0^t Q(s)\, x(s-h)\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, d\xi(s) \tag{1.2}$$

где l — мерные векторы $x(t)$, $y(t)$ принадлежат евклидову пространству E_l.

Условимся, если не оговорено противное, встречающиеся ниже векторы из E_l понимать как вектор-столбцы, а j-ю координату вектора обозначать той же буквой, что и сам вектор с индексом j внизу. Например, вектор $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_l(t))'$; здесь и далее штрих — знак транспонирования.

Относительно коэффициентов уравнений (1.1), (1.2) постоянно предполагаются выполненными следующие ограничения: матрицы $A(t)$, $Q(t)$ $\sigma(t)$ размером $l \times l$ и вектор $f(t) \in E_l$, причем элементы $f(t)$ и $A(t)$ — непрерывны, а элементы $\sigma(t)$ и $Q(t)$ — измеримы по Борелю и ограничены; постоянная $h \geqslant 0$, наконец $\xi(t)$ — винеровский случайный процесс, принимающий значения из E_l, имеет независимые компоненты, нормированные условиями $\xi(0) = 0$, $M\xi_i(t) = 0$, $M\xi_i^2(t) = t$, $i = 1, \ldots, l$ (буква M обозначает математическое ожидание) и матрица $B(t) = \sigma(t)\sigma'(t)$ — невырождена. При этом уравнение (1.2) понимается как стохастическое дифференциальное уравнение Ито.

Наблюдение $y(t)$ осуществляется на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, причем начальное распределение вектора $x(0)$ задано. Это распределение нормально с известным математическим ожиданием $m_0 \in E_l$ и невырожденной корреляционной матрицей D_0 и не зависит от распределений процесса

$\xi(t)$. Отсюда и из свойств коэффициентов уравнений (1.1), (1.2) вытекает, что условное распределение $x(t)$ при условии $y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$ также нормально.

Если в процессе наблюдения можно изменять матрицу $Q(t)$, задающую состав измерений, и матрицу $B(t)$, определяющую точность измерений, то возникают различные задачи оптимального выбора этих матриц, некоторые из которых и рассматриваются ниже.

Отметим, что при $h = 0$ близким вопросам посвящены статьи [1-3], в которых задача об оптимальном в том или ином смысле выборе матриц $Q(t)$ и $B(t)$ решалась применением принципа максимума Л. С. Понтрягина. Указанным способом в работе [1] эта задача сведена к системе трансцендентных уравнений.

Для решения задач, рассматриваемых в настоящей работе, также может быть применен принцип максимума. Однако в силу гауссовости случайной величины $x(0)$ и линейности уравнений (1.1), (1.2), наряду с принципом максимума можно исходную задачу о выборе матриц $B(t)$ и $Q(t)$ либо свести к изучению возникающей при этом проблеме моментов, либо воспользоваться классическими методами вариационного исчисления. Последние позволяют в некоторых ситуациях найти явный вид оптимального способа наблюдения.

2. Будем говорить, что в момент $s \in [0, T]$ наблюдение отсутствует, если при этом s все элементы матрицы $Q(s)$ равны нулю и обозначим через $m(t)$ и $D(t)$ соответственно условные математическое ожидание и матрицу дисперсии процесса $x(t)$ при наличии наблюдений $y(t)$ и безусловные математическое ожидание и матрицу дисперсии при отсутствии наблюдений. При этом $m(t)$ представляет собой наилучшую в среднеквадратическом смысле оценку (фильтр) величины $x(t)$, построенную по измеренной реализации процесса $y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, а $D(t)$ в силу предположений п. 1 совпадает с безусловной дисперсией разности $x(t) - m(t)$.

Введем в рассмотрение фундаментальную матрицу $z(t, s)$ системы (1.1) с помощью соотношений

$$dz(t, s)/dt = A(t)z(t, s), \qquad z(s, s) = I \tag{2.1}$$

где I — единичная матрица. Прежде чем приводить точную формулировку изучаемых оптимальных задач, покажем, что функция $m(t)$ есть решение системы стохастических дифференциальных уравнений

$$dm(t) = D(t)z'(t-h, t)Q'(t)B^{-1}(t)[dy(t) - Q(t)z(t-h, t)m(t)dt + \\ + Q(t)\int_{t-h}^{t} z(t-h, s)f(s)\,ds\,dt] + (A(t)m(t) + f(t))dt, \qquad m(0) = m_0 \tag{2.2}$$

а матрица $D(t)$ определяется равенствами

$$D^{\cdot}(t) = -D(t)z'(t-h, t)Q'(t)B^{-1}(t)Q(t)z(t-h, t)D(t) + \\ + A(t)D(t) + D(t)A'(t), \qquad D(0) = D_0 \tag{2.3}$$

представляющими собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Заметим, что при $h = 0$ формулы (2.2), (2.3) были установлены ранее в известной статье [4].

Теорема 2.1. Пусть выполнены предположения § 1. Тогда функции $m(t)$ и $D(t)$ удовлетворяют уравнениям (2.2), (2.3).

Доказательство. На основании формулы (1.1) функция $\varphi(t) = x(t-h)$ есть решение уравнения

$$\varphi^{\cdot}(t) = A(t-h)\varphi(t) + f(t-h) \tag{2.4}$$

с начальным условием

$$\varphi(0) = z(-h, 0)x(0) + \int_0^{-h} z(-h, s) f(s)\, ds \tag{2.5}$$

Обозначим через $m_-(t)$ наилучшую в среднеквадратическом смысле оценку величины $\varphi(t)$ по результатам наблюдения $y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$ и символ $D_-(t)$ пусть означает дисперсию разности $x(t) - m_-(t)$.

На основании (2.4), (2.5) и результатов работы [4] функция $m_-(t)$ удовлетворяет равенствам

$$dm_-(t) = D_-(t)Q'(t)B^{-1}(t)(dy(t) - Q(t)m_-(t)dt) + (A(t-h)m_-(t) + f(t-h))\,dt, \qquad m_-(0) = M\varphi(0) \tag{2.6}$$

а матрица $D_-(t)$ есть решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D^{\cdot}_-(t) = A(t-h)D_-(t) + D_-(t)A'(t-h) - D_-(t)Q'(t)B^{-1}(t)Q(t)D_-(t) \tag{2.7}$$

определяемое начальными условиями

$$D_-(0) = M(\varphi(0) - m_-(0))^2 \tag{2.8}$$

Уравнение (1.1) — детерминированное, поэтому

$$D(t) = z(t, t-h)\, D_-(t)\, z'(t, t-h) \tag{2.9}$$

С учетом (2.1) и сопряженного уравнения для фундаментальной матрицы $z(t, s)$

$$\partial z(t, s)/\partial s = -z(t, s)A(s), \qquad z(s, s) = I$$

полная производная $z^{\cdot}(t, t-h)$ равняется

$$z^{\cdot}(t, t-h) = A(t)z(t, t-h) - z(t, t-h)A(t-h) \tag{2.10}$$

Но в силу (2.9)

$$D^{\cdot}(t) = z^{\cdot}(t, t-h)D_-(t)z'(t, t-h) + z(t, t-h)D_-^{\cdot}(t)z'(t, t-h) + z(t, t-h)D_-(t)z^{\cdot\prime}(t, t-h) \tag{2.11}$$

Преобразуем выражение (2.11), используя формулы (2.7), (2.9). Прежде всего из (2.9), (2.10) вытекает, что

$$z^{\cdot}(t, t-h)D_-(t)z'(t, t-h) = A(t)D(t) - z(t, t-h)A(t-h)D_-(t)z'(t, t-h) \tag{2.12}$$

и аналогично

$$z(t, t-h)D_-(t)z^{\cdot\prime}(t, t-h) = D(t)A'(t) - z(t, t-h)D_-(t)A'(t-h)z'(t, t-h) \tag{2.13}$$

Так как

$$z(t, t_1)z(t_1, s) = z(t, s) \tag{2.14}$$

то на основании (2.7)

$$z(t, t-h)D_-^{\cdot}(t)z'(t, t-h) = z(t, t-h)[A(t-h)D_-(t) + D_-(t)A'(t-h)]z'(t, t-h) - D(t)z'(t-h, t)Q'(t)B^{-1}(t)Q(t)z(t-h, t)D(t) \tag{2.15}$$

Таким образом, используя формулы (2.8), (2.9) и подставляя (2.12), (2.13), (2.15) в (2.11), и убеждаемся в справедливости соотношений (2.3).

Для доказательства равенства (2.2) отметим, что на основании (1.1)

$$m(t) = z(t, t-h)\, m_-(t) + \int_{t-h}^{t} z(t, s)\, f(s)\, ds \tag{2.16}$$

Вычислим стохастический дифференциал функции $m(t)$. Из (2.1), (2.6), (2.10), (2.16) вытекает, что

$$dm(t) = A(t)\, z(t, t-h)\, m_-(t)\, dt + A(t) \int_{t-h}^{t} z(t, s)\, f(s)\, ds\, dt +$$

$$+ z(t, t-h)\, D_-(t)\, Q'(t)\, B^{-1}(t)\, [dy(t) - Q(t)\, m_-(t)\, dt] + f(t)\, dt \tag{2.17}$$

Преобразуем отдельные слагаемые в правой части (2.17), Имеем в силу (2.16)

$$A(t)\, z(t, t-h)\, m_-(t) = A(t)\, m(t) - A(t) \int_{t-h}^{t} z(t, s)\, f(s)\, ds \tag{2.18}$$

Далее на основании (2.9), (2.14)

$$z(t, t-h)\, D_-(t) Q'(t) B^{-1}(t) = D(t)\, z'(t-h, t)\, Q'(t)\, B^{-1}(t) \tag{2.19}$$

Кроме того с учетом (2.9), (2.14), (2.16)

$$Q(t)\, m_-(t) = Q(t)\, z(t-h, t)\, m(t) - Q(t) \int_{t-h}^{t} z(t-h, s)\, f(s)\, ds \tag{2.20}$$

Следовательно, подстановка (2.18) — (2.20) в (2.17) и доказывает равенства (2.2). Теорема 2.1 доказана.

Обозначим через $V(t)$ неотрицательно определенную симметрическую матрицу

$$V(t) = z'(t-h, t) Q'(t) B^{-1}(t) Q(t) z(t-h, t) \tag{2.21}$$

и перепишем уравнение (2.3), представляющее собой матричное уравнение Бернулли, в виде

$$D^{\cdot}(t) = A(t) D(t) + D(t) A'(t) - D(t) V(t) D(t), \qquad D(t_0) = D_0 \tag{2.22}$$

При выполнении требований п. 1 нетрудно показать, что для любой неотрицательно определенной матрицы $V(t)$ существуют матрица $Q(t)$ и положительно определенная матрица $B(t)$, удовлетворяющие равенству (2.21).

Повторяя рассуждения книги ([5], стр. 420), получаем, что для определителя $\det D(t)$ матрицы $D(t)$ имеет место тождество Якоби

$$\det D(t) = \det D_0 \exp\left\{\int_0^t Sp\,[A(s) - V(s) D(s) + A'(s)]\, ds\right\}$$

(здесь $SpA(t)$ — след матрицы $A(t)$), из которого вытекает, что матрица $D(t)$ при любом значении аргумента t является неособенной. Следовательно, существует матрица $\alpha(t) = D^{-1}(t)$, определяемая в силу (2.22) условиями

$$\alpha^{\cdot}(t) = -A'(t)\alpha(t) - \alpha(t)A(t) + V(t), \qquad \alpha(0) = \alpha_0 = D_0^{-1} \quad (2.23)$$

Иногда, чтобы подчеркнуть зависимость решения $\alpha(t)$ уравнения (2.23) от начальных условий и функции $V(t)$ будем обозначать его символом $\alpha(\alpha_0, V, t)$.

3. *Задача* 1. Пусть даны положительно определенные матрицы $\alpha_0 = D_0^{-}$, $\alpha_T = D_T^{-1}$ такие, что матрица

$$R = \alpha_T - [z'(T, 0)]^{-1}\alpha_0 z(T, 0)^{-1}$$

неотрицательно определена. Требуется найти неотрицательно определенную матрицу $V_0(t)$, минимизирующую при каждом $i = 1, \ldots, l$ выражение

$$\int_0^T \sum_{j=1}^{l} ([z'(T, s)]^{-1} V_0(s))_{ij}^2 ds$$

(здесь и далее $(A)_{ij}$ означает ij элемент матрицы A), для которой $\alpha(\alpha_0, V_0, T) = \alpha_T$.

Если $V(t) \equiv 0$, то на основании (2.22), (2.23) функция

$$z(T, 0)\alpha_0^{-1}z'(T, 0) = z(T, 0)\, D_0 z'(T, 0)$$

есть матрица дисперсии неизвестного вектора $x(t)$ в момент $t = T$ при отсутствии наблюдений. В результате измерений вероятностные суждения о величине $x(T)$ должны в каком-то смысле уточняться, что и отражено в требовании неотрицательной определенности матрицы R, из которого, в частности, вытекает, что условная дисперсия величин $x_i(T)$ при проведении наблюдений не больше чем при отсутствии их. Справедливость последнего утверждения следует из неотрицательной определенности матрицы

$$z(T, 0)\alpha_0^{-1}z'(T, 0)R\alpha_T^{-1} = z(T, 0)D_0 z'(T, 0) - D_T$$

Теорема 3.1. Предположим, что коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют требованиям § 1. Тогда функция

$$V(t) = z'(T, t)RG^{-1}z'(T, t)^{-1}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

где

$$G = \int_0^T z'(T, s)^{-1} z(T, s)^{-1} ds$$

дает решение задачи 1.

Доказательство. Решение уравнения (2.23) можно записать в виде ([1], стр. 108)

$$\alpha(t) = z'(t, 0)^{-1}\alpha_0 z(t, 0)^{-1} + \int_0^t z'(t, s)^{-1} V(s)\, z(t, s)^{-1} ds$$

Полагая в этом равенстве $t = T$, получаем, что если бы задача 1 имела решение, то имела бы место формула

$$R = \int_0^T \omega(s)\, z(T, s)^{-1}\, ds \tag{3.1}$$

где матрица $\omega(s) = z'(T, s)^{-1} V(s)$.

Значит, для решения задачи 1 достаточно найти матрицу $\omega(s)$ доставляющую при каждом $i = 1, \ldots, l$ минимум выражению

$$\int_0^T \sum_{j=1}^{l} (\omega(s))_{ij}^2\, ds \tag{3.2}$$

и удовлетворяющую равенству (3.1). Расширим теперь класс матриц ω, среди которых ищется решение задачи 1 до множества матриц с элементами, интегрируемыми с квадратом.

Поскольку на основании (3.1)

$$(R)_{ij} = \int_0^T \sum_{k=1}^{l} (\omega(s))_{ik}\, (z(T, s)^{-1})_{kj}\, ds \tag{3.3}$$

то вспомогательная оптимальная задача может быть сформулирована следующим образом: найти l вектор-строк, имеющих интегрируемые с квадратом элементы $(\omega(s))_{ik}$ (целое число i, $1 \leqslant i \leqslant l$ — номер вектора, при каждом i число k пробегает значения от 1 до l), минимизирующих выражения (3.2) и удовлетворяющих соотношениям (3.3).

Пусть i, $1 \leqslant i \leqslant l$ — произвольное, но фиксированное число. Рассмотрим уравнения (3.3) при этом значении i. Обозначим через β вектор-строку с координатами

$$\beta_j = (R)_{ij}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant l \tag{3.4}$$

а через $\varphi_0'(s)$ функцию, равную i-й вектор-строке, доставляющей решение вспомогательной задачи. Вычисляя функцию $\varphi_0(s)$ с помощью метода определенных множителей Лагранжа (см. например, [6], § 18), находим с учетом (3.2), (3.4), что

$$\varphi_0'(s) = \beta G^{-1} z'(T, s)^{-1} \tag{3.5}$$

Напомним, что формула (3.5) получена для произвольного, но фиксированного значения индекса i. Поэтому ввиду произвольности i окончательно получаем из (3.5), что решение $\omega(s)$ вспомогательной оптимальной задачи задается формулой

$$\omega(s) = RG^{-1} z'(T, s)^{-1}, \quad 0 \leqslant s \leqslant T$$

Отсюда и из неотрицательной определенности матрицы

$$V(t) = z'(T, s)\, RG^{-1} z(T, s)\, [z(T, s)^{-1} z'(T, s)^{-1}]$$

следует, что матрица $V(t)$ есть решение задачи 1. Теорема 3.1 доказана.

Пример 3.1. Пусть неизвестный двумерный вектор x_0 имеет априорное гауссовское распределение с параметрами m_0, D_0, а наблюдению доступна величина

$$y(t) = \int_0^t Q(s)\, ds x_0 + \xi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

где $\xi(t)$ — двумерный винеровский процесс. Требуется так выбрать $Q(t)$, чтобы дисперсия разности между неизвестным вектором x_0 и оценкой $m(t)$ этого вектора, полученной по результатам наблюдений, равнялась при $t = T$ заданной матрице D_T такой, что $D_0 - D_T$ неотрицательно определена. Если положить для $0 \leqslant t \leqslant T$

$$x^{\cdot}(t) = 0,\ x(0) = x_0, \qquad y(t) = \int_0^T Q(s)\, x(s)\, ds + \xi(t)$$

то, используя теорему 3.1 (в условиях которой $A(t)$ — нулевая матрица, $z(T, t)$ равняется единичной матрице I, $G = IT$ и $R = D_T^{-1} - D_0^{-1}$) получаем, что матрица $Q(t)$ — постоянна и удовлетворяет с учетом формулы (2.21) уравнению $Q'Q = RT^{-1}$, существование решения которого следует из неотрицательной определенности матрицы R.

4. Применение принципа максимума Л. С. Понтрягина [7] позволяет рассмотреть и иные варианты задачи об оптимальном наблюдении и свести их решение к системе трансцендентных уравнений. Поскольку точная формулировка других задач об оптимальном наблюдении и сведение их решения к системе трансцендентных уравнений при $h > 0$ совершенно не отличается от случая $h = 0$, изученного в [1], то, не останавливаясь на этом подробнее, лишь проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 4.1. Пусть дано одномерное уравнение вида (1.1) с постоянным коэффициентом a

$$x^{\cdot}(t) = ax(t) + f(t) \tag{4.1}$$

и начальным условием $x(0) = x_0$. Случайная величина $x(0)$ — гауссовская с известной дисперсией $D_0 > 0$. На отрезке $[0, T]$ наблюдается величина

$$\int_0^t b(s)\, x(s-h)\, ds + \sigma\xi(t)$$

Здесь постоянная $\sigma \neq 0$ и $\xi(t)$ — винеровский процесс, не зависящий от $x(0)$. Требуется выбором кусочно непрерывной слева функции $b(t)$, равной при любом значении t либо нулю, либо постоянной $b \neq 0$ и удовлетворяющей условию

$$\int_0^T b(s)\, ds = bT_0, \qquad T_0 < T \tag{4.2}$$

минимизировать выражение

$$J = \beta_1 D(T) + \beta \int_0^T D(s)\, ds$$

где неотрицательные постоянные β, β_1 таковы, что $\beta + \beta_1 > 0$. Требование (4.2) означает, ввиду определения функции $b(t)$, что задана суммарная длительность процесса наблюдения.

Отметим, что этот пример при $h = 0$, $\beta = 0$, $\beta_1 = 1$ изучался ранее в статье [1]

Уравнение (2.23) с учетом (2.21) имеет вид

$$\alpha^{\cdot}(t) = -2a\alpha(t) + V(t), \qquad 0 < t \leqslant T$$
$$\alpha(0) = D_0^{-1}, \qquad V(t) = \sigma^{-2} b(t) \exp(-2ah)$$

Используя принцип максимума ([7] стр. 75—79) нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} b_0(t) &= b \quad \text{если} \quad \psi(t) + c > 0 \\ b_0(t) &= 0 \quad \text{если} \quad \psi(t) + c < 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

где постоянная c подбирается так, чтобы удовлетворить требованию (4.2), а сопряженная переменная $\psi(t)$ задается соотношениями

$$\psi^{\cdot}(t) = 2a\psi(t) - \beta\alpha^{-2}(t), \qquad 0 < t \leqslant T$$
$$\psi(T) = \beta_1\alpha^{-2}(T) \tag{4.4}$$

Из уравнений (4.4) вытекает, что для $a < 0$ функция $\psi(t)$ монотонно убывает. Поэтому при $a < 0$

$$b_0(t) = b \quad \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant T - T_0$$
$$b_0(t) = 0 \quad \text{если} \quad T - T_0 < t \leqslant T$$

Такой же вид оптимальный закон наблюдения имеет и при $a = 0$, $\beta > 0$. Аналогично при $a > 0$, $\beta = 0$ имеем в виду (4.4)

$$b_0(t) = 0, \ 0 \leqslant t \leqslant T_0 - T; \ b_0(t) = b, \ T_0 - T < t \leqslant T$$

Если же $a = 0$, $\beta = 0$, то значение функционала J не зависит от закона наблюдения. Покажем, наконец, что если $a > 0$, $\beta > 0$ то существует лишь один интервал наблюдения, т. е. найдется такой момент времени $t_1 \leqslant T - T_0$, что $b_0(t) = b$ при

$$t \in (t_1, t_1 + T_0] \text{ и } b_0(t) = 0 \text{ при } t \,\overline{\in}\, (t_1, t_1 + T_0]$$

Для доказательства от противного предположим существование нескольких, не примыкающих друг к другу интервалов $(t_i, s_i]$, где функция $b_0(t)$, определяемая формулами (4.3), отлична от нуля. Исследуем поведение сопряженной переменной $\psi(t)$ при $s_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$. Положим $r(t) = \psi^{\cdot}(t)$. На основании сделанного предположения

$$r(s_i) \leqslant 0 \tag{4.5}$$

Кроме того, в силу (4.4)

$$r^{\cdot}(t) = 2ar(t) + 2\beta\alpha^{\cdot}(t)\,\alpha^{-2}(t)$$

Отсюда и из (4.5), учитывая справедливое при $s_i < t \leqslant t_{i+1}$ неравенство $\alpha^{\cdot}(t) < 0$ получаем, что $\psi(t)$ монотонно убывает на отрезке $[s_i, t_{i+1}]$. Это однако противоречит сделанному выше предположению о том, что $b_0(t) = b$ при $t_{i+j} < t \leqslant s_{i+j}$, $j = 0, 1$. Таким образом при $\beta > 0$, $a > 0$ вопрос о нахождении оптимального закона наблюдения сводится к задаче нахождения минимума скалярной функции одного переменного t_1. Для этого следует найти $\alpha(t)$ при $V(t) = b_0(t)\sigma^{-2}$ и подставить найденную функцию $\alpha(t)$ в функционал J, который после указанной подстановки становится скалярной функцией переменной t_1. В частности, нетрудно вычислить, что для значений $\beta = 0$, $\beta_1 = 1$, $\sigma = 1$

$$D(T) = e^{2aT}\left[D_0^{-1} + e^{-2ah}b^{-1}\frac{1}{2a}\left(e^{2aT} - e^{2a(T-T_0)}\right)\right]^{-1}, \qquad a > 0$$

$$D(T) = e^{2aT}\left[D_0^{-1} + e^{-2ah}(2ab)^{-1}\left(e^{2aT_0} - 1\right)\right]^{-1}, \qquad a < 0$$

При $a = 0$ значение $D(T)$, не зависящее от закона наблюдения, равняется

$$D(T) = [D_0^{-1} + b^{-1}T_0]^{-1}, \qquad a = 0$$

Пример 4.2. Наряду со случаем непрерывного проведения наблюдений, рассмотренным выше, можно осуществлять наблюдения и в дискретные моменты, в связи с чем возникает задача об оптимальном выборе моментов измерения. Рассмотрим снова уравнение (4.1) и пусть на интервале $[0, T]$ в дискретные моменты $t_1, \ldots, t_r$ наблюдается величина

$$x(t - h) + \zeta(t), \qquad h \geqslant 0 \tag{4.6}$$

где $\zeta(t)$ — пр цесс белого шума постоянной интенсивности $b > 0$.

Требуется так выбрать числа t_i, чтобы минимизировать условную дисперсию $Dx(T)$. На основании (2.23) нетрудно получить, что величина $Dx(T)$ в данном случае равна

$$e^{2aT}\left[D_0^{-1} + e^{-2ah}b^{-1}\sum_{i=1}^{r} e^{2at_i}\right]^{-1} \tag{4.7}$$

Отсюда вытекает, что при $a > 0$ следует положить все $t_j = T$, а при $a < 0$ числа $t_i = 0$, $i = 1, \ldots, r$.

Рассмотренные примеры 4.1, 4.2 позволяют заключить, что при постоянной интенсивности шума наличие в канале наблюдения запаздывания может привести к увеличению условной дисперсии при $a > 0$, т. е. к ухудшению знаний о положении неизвестного объекта по сравнению со случаем $h = 0$. Если же $a < 0$ то, наоборот, наличие запаздывания может привести к уменьшению условной дисперсии.

Замечание. В постановке рассмотренной выше задачи о наблюдении предполагалось, что априорное распределение решения $x(t)$ уравнения (1.1) известно при $t = 0$, причем в результате наблюдений на отрезке $[0, T]$ может быть получена в силу (1.2) информация о предыстории $x(t)$ для $-h \leqslant t \leqslant 0$. Такое предположение оправдано, если движение неизвестного объекта при всех t определяется уравнением (1.1). Если же дополнительно известно, что движение этого объекта описывается уравнением (1.1), начиная лишь с $t = 0$, то необходимо изменить постановку задачи о наблюдении следующим образом: априорное распределение функции $x(t)$ задано по-прежнему при $t = 0$, но наблюдение проводится при $t \geqslant h$. Поскольку уравнение (1.1) — детерминированное, то эта задача легко сводится к ранее рассмотренной, для чего достаточно принять в качестве начальной точку $t_0 = h$ и вычислить, используя (1.1), априорное распределение величины $x(h)$. При этом, однако, время наблюдения уменьшается по сравнению со случаем $h = 0$ на величину h. Кроме того уже не будет выигрыша в информации за счет предыстории процесса $x(t)$, которой в примерах 4.1, 4.2 обязано уменьшение дисперсии при $a < 0$. Нетрудно вычислить, что если в примере 4.2 величина (4.6) наблюдается в дискретные моменты времени t_i, $h \leqslant t_i \leqslant T$, то при $a > 0$ следует положить все $t_i = T$, а при $a < 0$ все $t_i = h$. Иными словами, на основании (4.7) условная дисперсия увеличивается для $a > 0$, а при $a < 0$ остается такой же, как и в случае $h = 0$.

Автор выражает благодарность Ф. Л. Черноусько за ценное обсуждение полученных результатов.

Поступила 9 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. Об оптимизации процесса наблюдения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
2. Солянин А. И., Черноусько Ф. Л. Оптимизация процесса наблюдения при случайных возмущениях. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
3. Яшин А. И. О выборе оптимального процесса наблюдения. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1969, № 2.
4. Kalman R. E., Bucy R. C., New results in linear filtering and prediction theory. Trans. ASME, ser. D., J. basic engng., 1961, vol. 83, No. 1, pp. 95—108.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, изд. 2. М., «Наука», 1966.
6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
7. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов, изд. 2. М., «Наука», 1969.