Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Ю. С. Осипов

(Свердловск)

В статье для систем с последействием рассматривается игровая задача на минимакс (максимин) времени до встречи с заданным замкнутым множеством. Задача исследуется на основе экстремальных стратегий, построение которых опирается на понятие поглощения цели управляемым процессом, введенное в работе [1] для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Результаты конкретизируются для случая линейных систем в связи с правилом экстремального прицеливания, известного для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [2]. Статья примыкает к исследованиям [1–12].

§ 1. Пусть управляемая система с последействием описывается уравнением

$$dx(t)/dt = f_1(t, x_t(s), u) + f_2(t, x_t(s), v) \qquad (1.1)$$

Здесь x — n-мерный вектор фазовых координат, r_1-мерный вектор u и r_2-мерный вектор v — управляющие воздействия, выбором которых распоряжается первый и второй игроки соответственно и которые стеснены ограничениями

$$u \in P, \qquad v \in Q \qquad (1.2)$$

где P, Q — ограниченные замкнутые множества; функционалы $f_i(t, x(s), w)$ непрерывны и удовлетворяют условиям Липшица по функциям $x(s)$, $-\tau \leqslant s \leqslant 0$. (Подробное описание системы (1.1) (см. в [9, 10]), где определены также встречающиеся ниже понятия и обозначения.)

В работе [10] для системы (1.1) рассмотрена игровая задача наведения движений системы на заданное замкнутое множество M. Ниже, опираясь на результаты [10], изучается игра на минимакс (максимин) времени до встречи системы (1.1) с целью M.

Эта игра состоит в следующем. Задана начальная позиция игры $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$, $(t \in [t_\alpha, t_\beta))$, $x(s) \in C_{[-\tau, 0]}$. Первый игрок выбором стратегии (см. [9]) стремится перевести движения $x[t] = x[t, p_0, U, V_T]$ на множество M за наименьшее возможное время. Второй игрок, напротив, выбором стратегии V стремится не допустить встречу движений $x[t] = x[t, p_0, U_T, V]$ с целью M, или, хотя бы, максимизировать время до такой встречи.

Условимся здесь о следующем обозначении: желая подчеркнуть, что речь идет о некотором движении $x[t]$ системы (1.1), а не о положении $x[t]$

этой системы в момент времени t, будем в этом случае первое обозначать символом $x[\cdot]$. Например, $x[\cdot] = x[\cdot, p_0, U, V_T^*]$ — движение системы (1.1) из позиции p_0, отвечающее стратегиям U, V_T (см. [9]).

Уточним постановку задачи. Результат действий первого игрока в процессе игры будем оценивать величиной

$$\gamma_1(U) = \sup_{x[\cdot]} \nu(x[\cdot]) \tag{1.3}$$

где $x[\cdot] \in \{x[\cdot, p_0, U, V_T]\}$, $\vartheta(x[\cdot])$— первый момент встречи движения $x[\cdot]$ с целью M. (В (1.3) полагаем $\vartheta = \infty$, если такая встреча не происходит.)

Определения (1°). Стратегия U° называется минимаксной, если

$$\gamma_1(U^\circ) = \min_U \gamma_1(U) \tag{1.4}$$

где min берется по всем стратегиям U первого игрока. (2°). Число $\gamma_0 = \gamma_1(U^\circ)$ называется ценой игры, если

$$\gamma_1(U^\circ) = \sup_{\varepsilon>0} \sup_V \inf_{x[\cdot]} \vartheta^\varepsilon(x[\cdot]) \tag{1.5}$$

где $x[\cdot] \in \{x[\cdot, p_0, U_T, V]\}$, $\vartheta^\varepsilon(x[\cdot])$ первый момент попадания движения $x[\cdot]$ в замкнутую ε-окрестность M_ε множества M; $\sup_V$ берется по всем стратегиям V второго игрока. (3°) Последовательность стратегий $\{V_j^\circ\}$, для которой выполняется условие

$$\lim_{j\to\infty} \inf_{x[\cdot]} \vartheta^{\varepsilon_j}(x[\cdot]) = \gamma_0 \tag{1.6}$$

где $x[\cdot] \in \{x[\cdot, p_0, U_T, V_j^\circ]\}$, $\varepsilon_j = \mathrm{const} > 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$ назовем максиминной последовательностью стратегий второго игрока.

В данной статье доказывается существование минимаксной стратегии U° первого игрока и цены игры, а также выясняется строение стратегии U° и максиминной последовательности стратегий V_j°.

§ 2. В этом параграфе выясняются необходимые для дальнейшего свойства множеств позиционного поглощения цели M системой (1.1) к заданному моменту времени (см. [9]). Для удобства напомним соответствующие определения из [9]. Пусть задана некоторая позиция игры $p_* = \{t_*, x_*(s)\}$. Обозначим символом $\rho(x, M)$ расстояние в E_n от x до M.

Определения (4°). Система (1.1) поглощает цель M из позиции p_* к моменту ϑ позиционно, если

$$\sup_V \inf_{x[\cdot]} \min_{t_*\leqslant t\leqslant\vartheta} \rho(x[t], M) = 0 \tag{2.1}$$

где $x[\cdot] \in \{x[\cdot, p_0, U_T, V]\}$, sup берется по всем стратегиям V второго игрока. (5°) Совокупность всех функций $x(s) \in C_{[-\tau, 0]}$ таких, что из позиции $p = \{t, x(s)\}$ система (1.1) поглощает M позиционно к моменту ϑ называется множеством позиционного поглощения цели M к моменту ϑ и обозначается символом $W(t, \vartheta)$.

Лемма 2.1. В пространстве $C_{[-\tau,0]}$ множество $W(t_*, \vartheta)$ замкнуто.

Доказательство. Предположим от противного, что существует последовательность $\{x^{(k)}(s)\}$ элементов $x^{(k)}(s) \in W(t_*, \vartheta)$, сходящаяся в $C_{[-\tau,0]}$ к элементу $x_*(s) \notin W(t_*, \vartheta)$. Обозначим символами $M(t', t'')$, $X(p, t'', U_T, V)$ множества из пространства $E_{n+1}\{y\}$ вида:

$$M(t', t'') = \{y = (t_1, z) \mid t_1 \in [t', t''], z \in M\}$$

$$X(p, t'', U_T, V) = \{y = (t_1, x[t_1]) \mid t_1 \in [t', t'']$$

$$x[t_1] \in \{x[t_1, p, U_T, V]\}, p = \{t', x_*(s)\}\}$$

Из замкнутости множества M в E_n и множества $\{x[\cdot] = x[\cdot, p, U_T, V]\}$ в $C_{[t',t'']}$ (последняя вытекает непосредственно из определения движений $x[\cdot, p, U_T, V]$) следует замкнутость множеств $M(t', t'')$, $X(p, t'', U_T, V)$ в E_{n+1}.

Так как $x_*(s) \notin W(t_*, \vartheta)$, то по определению (5°) существует стратегия V_0 второго игрока такая, что замкнутое множество $X(p_*, \vartheta, U_T, V_0)$, $(p_* = \{t_*, x_*(s)\})$, не пересекается с замкнутым множеством $M(t_*, \vartheta)$. Следовательно, не пересекается с $M(t_*, \vartheta)$ и некоторая замкнутая α — окрестность $(\alpha > 0)$ $X_\alpha(p_*, \vartheta, U_T, V_0)$ множества $X(p_*, \vartheta, U_T, V_0)$.

Рассмотрим теперь на промежутке $[t_*, \vartheta]$ систему множеств $Y_t \subset C_{[-\tau,0]}$ вида

$$Y_t = \{x(s) = x[t+s] \mid x[t+s] \in \{x[t+s, p_*, U_T, V_0]\}\}$$

Покажем, что эта система множеств сильно v-стабильна (см. [9]). Пусть t_1 — произвольный момент из $[t_*, \vartheta]$, $x_1(s)$ — произвольный элемент Y_{t_1}, U_u — произвольная стратегия первого игрока. Нам достаточно, очевидно, показать, что в пространстве $C_{[t_1,\vartheta]}$ пересечение множеств $Q_1 = \{x[t, p_1, U_u, V_T]\}$ и $Q_2 = \{x[t, p_1, U_T, V_0]\}$, где $p_1 = \{t_1, x_1(s)\}$, не пусто. Рассмотрим в $C_{[t_1,\vartheta]}$ последовательность функций $\{x[t]_{\Delta j}\}$ $\{\delta_j\} \to 0$ такую, что $x(t_1+s]_{\Delta_j} = x_1(s)$ и почти при всех $t \in [t_1, \vartheta]$

$$dx[t]_{\Delta_j}/dt = f_1(t, x_t[s]_{\Delta_j}, u(t)) + f_2(t, x_t[s]_{\Delta_j}, v_j[t]).$$

Здесь $u(t)$ — программное управление, порождающее стратегию U_u; $v_j[t] = v_j[\tau_i] \in V_0(\tau_i, x_{\tau i}[s]_{\Delta_j})$, $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$ $(\tau_i = \tau_i(j))$; $V_0(t, x(s))$ — множество, определяющее стратегию V_0. Обозначим символом $F_i(t, x(s))$ $(i = 1, 2)$ выпуклую оболочку множества векторов $\{f_i(t, x(s), w_i) \mid w_i \in W_i\}$ $(W_1 = P, W_2 = Q)$. В силу бикомпактности множества решений уравнения в контингенциях

$$dx(s) / dt \in f_1(t, x_t(s), u(t)) + F_2(t, x_t(s)) \qquad (2.2)$$

можем (выбирая, если нужно, подпоследовательность) считать, что последовательность $\{x[t]_{\Delta_j}\}$ сходится, причем к некоторому решению $x^*[t]$ уравнения (2.3). (Доказательство бикомпактности совокупности решений уравнения (2.2) проводится аналогично доказательству бикомпактности в $C_{[t_*, t^*]}$ множества решений уравнения (2.3) (см. стр. 303).) По построению функции $x^\circ[t]$ и по определению движений $x[\tau, p, U_T, V]$ имеем нужное нам соотношение: $x^\circ[t] \in Q_1 \cap Q_2$.

Итак, система множеств Y_t, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$, сильно v-стабильна. Выбирая теперь k достаточно большим и опираясь на лемму 2.4 [10], можем утверждать, что экстремальная к этой системе множеств стратегия V^e второго игрока обеспечивает включение

$$X(p_k, \vartheta, U_T, V^e) \subset X_\alpha(p_*, \vartheta, U_T, V_0)$$

где $p_k = \{t_*\, x^{(k)}(s)\}$. Последнее в силу условия непересечения множеств $X_\alpha(p_*, \vartheta, U_T, V_0)$, $M(t_*, \vartheta)$ противоречит определению (5°) множества $W(t_*, \vartheta)$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Система множеств $W(t, \vartheta)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, u-стабильна.

Доказательство. Предположим от противного (см. [9]), что существуют моменты t_*, t^* из $[t_0, \vartheta]$, $(t^* > t_*)$, элемент $x_*(s) \in W(t_*, \vartheta)$ и стратегия V_v такие, что одновременно выполняются условия: (1) не пересекаются множества Q^* и $W(t^*, \vartheta)$; (2) не пересекаются множества $X(p_*, \vartheta, U_T, V_v)$ и $M(t_*, t^*)$.

Здесь $Q^* = \{q(s) = x[t^* + s] \mid x[t^* + s] \in \{x[t^* + s, p_*, U_T, V_v]\}\} \subset C_{[-\tau,0]}$; $X(p_*, \vartheta, U_T, V_v)$ — определяется аналогично определению множеств $X(p_*, \vartheta, U_T, V)$ (см. стр. 302); $p_* = \{t_*, x_*(s)\}$.

Нам важно, что множество Q^* является бикомпактом в пространстве $C_{[-\tau,0]}$. В самом деле, опираясь на непрерывность функционалов $f_i(t, x(s), w)$ из (1.1), условие Липшица для этих функционалов по $x(s)$, свойства множеств P, Q из (1.2) обычным путем (см. [13]) получаем, что множество $\{x[t]\} = \{x[t, p_*, U_T, V_v]\}$ решений уравнения

$$dx[t] / dt \in F_1(t, x_t[s]) + f_2(t, x_t[s], v(t))$$

$$x[t_* + s] = x_*(s) \tag{2.3}$$

равноограниченно и равностепенно непрерывно на $[t_*, t^*]$. Покажем, что оно замкнуто в $C_{[t_*, t^*]}$ ([9]).

Пусть $x[t]$ — произвольная сходящаяся последовательность элементов из $\{x[t, p_*, U_T, V_v]\}$ и $x^\circ[t]$ — ее предел. Так как абсолютно непрерывные функции $x^{(k)}[t]$ равностепенно удовлетворяют на отрезке $[t_*, t^*]$ условию Липшица, то этому же условию удовлетворяет и предельная функция $x^\circ[t]$, которая, следовательно, является функцией абсолютно непрерывной на $[t_*, t^*]$.

В силу замкнутости в E_n множества $\psi(t, x(s)) = F_1(t, x(s)) + f_2(t, x(s), v(t))$ (являющейся следствием непрерывности f_1 и замкнутости P) достаточно теперь проверить, что почти при всех $t \in [t_*, t^*]$ вектор $dx^\circ[t] / dt$ принадлежит произвольной замкнутой α-окрестности $\psi_\alpha(t, x_t^\circ[s])$ множества $\psi(t, x_t^\circ[s])$.

Пусть $\varkappa \in [t_*, t^*]$ — произвольная точка, где $dx^\circ[t] / dt$ существует. При этом в силу суммируемости $v(t)$ на $[t_*, t^*]$ можно считать, что точка $\varkappa$

является точкой Лебега функции $v(t)$. Из определения производной, равномерной сходимости $\{x^{(k)}[t]\}$ к $x^\circ[t]$, непрерывности функционалов $f_i(t, x(s), w)$ и условия Липшица для них по $x(s)$ вытекает, что для любого числа $\alpha > 0$ можно указать положительные числа $\Delta_0 (\Delta_0 \leqslant t - \varkappa)$, k_1 такие, что при $k > k_1$, $\Delta \leqslant \Delta_0$

$$\frac{dx^c[\varkappa]}{dt} = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\varkappa}^{\varkappa+\Delta} [\varphi_k(\xi) + f_2(\xi, x_\xi^0[s], v(\xi))] d\xi + w_1(\Delta) + w_2(\Delta, k_1) \quad (2.4)$$

где $\varphi_k(\xi) \in F_1(\xi, x_\xi^{(k)}[s])$ — суммируемая функция, $\|w_1(\Delta\| \leqslant \alpha / 3$, $w_2(\Delta, k_1)\| \leqslant \alpha / 3.$

Учитывая, что множество $F_1(\xi, x(s))$ полунепрерывно сверху относительно включения по $x(s)$, последовательность $\{x^{(k)}[t]\}$ равномерно сходится к $x^\circ[t]$, $\varkappa$ — точка Лебега функции $v(t)$, заключаем, что для числа $\alpha / 3$ можно указать такие числа $\Delta_1 > 0$, $k_2 \geqslant k_1$, что вектор, определяемый первым слагаемым в правой части (2.4), содержится во множестве $\Psi_{\alpha/3}(\varkappa, \overset{\circ}{x}_\varkappa[s])$, если только $\Delta \leqslant \Delta_1$, $k \geqslant k_2$.

Отсюда в силу выпуклости и замкнутости множества $\psi(t, x(s))$ и произвольности $\varkappa$ следует нужное нам включение: почти при всех $t \in [t_*, t^*]$ вектор $dx^\circ[t] / dt \in \Psi(t, x_t^\circ[s])$.

Из доказанной бикомпактности в $C_{[t_*, t^*]}$ множества решений $\{x[t, p^*, U_T, V_v]\}$ и определения элемента $q(s) = x[t_* + s, p_*, U_T, V_v]$ следует бикомпактность в $C_{[-\tau, 0]}$ множества Q^*.

Возьмем произвольный элемент $q_k(s) \in Q^*$. По определению множества $W(t, \vartheta)$ при условии (1) существует стратегия $V = V(q_k)$ второго игрока такая, что множество $M(t^*, \vartheta)$ не пересекается с множеством $X(p_k, \vartheta, U_T, V(q_k))$, где $p_k = \{t^*, q_k(s)\}$.

Рассмотрим на промежутке $[t^*, \vartheta]$ систему множеств

$$\Gamma_t = \{x(s) = x[t+s] \mid x[t+s] \in \{x[t+s, p_k, U_T, V(q_k)]\}\}$$

Рассуждениями, аналогичными рассуждениям на стр. 302, можно проверить, что эта система множеств сильно v-стабильна. Но тогда, опираясь на лемму 2.4 [10] и учитывая замкнутость множеств $X(p_k, \vartheta, U_T, V(q_k))$, $W(t, \vartheta)$, $M(t^*, \vartheta)$, можно утверждать, что существуют такие положительные числа α_k, β_k, что множество

$$Z_k = \bigcup_{q \in S(\beta_k)} X(p, \vartheta, U_T, V^e(q_k))$$

не пересекается с замкнутой α_k-окрестностью множества $M(t^*, \vartheta)$.

Здесь $V^e(q_k)$ — экстремальная (см. [9, 10]) к системе множеств Γ_t, — $t^* \leqslant t \leqslant \vartheta$ стратегия второго игрока, $p = \{t^*, q(s)\}$, $q(s) \in Q^*$; $S(\beta_k)$ — окрестность радиуса β_k в $C_{[-\tau, 0]}$ элемента $q_k(s)$.

В силу доказанной бикомпактности множества Q^* все это множество можно покрыть конечной системой таких окрестностей $S(\beta_k)$, $k = 1, \ldots, N$.

Но тогда из сказанного выше вытекает, что множество Z, являющееся объединением множеств Z_k, $k = 1, \ldots, N$, не пересекается с замкнутой α-окрестностью $M_\alpha(t^*, \vartheta)$ множества $M(t^*, \vartheta)$, где $\alpha = \min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$.

Рассмотрим теперь на отрезке $[t_*, \vartheta]$ систему множеств из пространства $C_{[-\tau, 0]}$ вида

при $t \in [t_*, t^*]$

$$B_t = \{x(s) = x[t+s] \mid x[t+s] \in \{x[t+s, p_*, U_T, V_v]\}\}$$

при $t \in [t^*, \vartheta]$

$$B_t = \{x(s) = x[t+s] \mid x[t+s] \in \{x[t+s, p, U_T, V^e(q_k)]\}\}$$

где

$$p = \{t^*, q(s)\}, \ q(s) \in Q^*; \ \{x[\cdot, p, U_T, V^e(q_k)]\}$$

означает здесь совокупность всех движений системы (1.1), порождающих построенное выше множество Z. Из определения системы множеств B_t следует, что эта система множеств сильно v-стабильна (см. рассуждения на стр. 302). Так как $x_*(s) \in B_{t_*}$, то, согласно лемме 2.3 [10], экстремальная к множествам B_t, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$, стратегия V^e второго игрока удовлетворяет условию

$$\inf_{x(s) \in B_t} \max_{-\tau \leqslant s \leqslant 0} \|x_t[s] - x(s)\| = 0, \qquad t_* \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{2.5}$$

где $x[t]$ — любое движение $x[t, p_*, U_T, V^e]$.

Так как множества Z и $M(t^*, \vartheta)$ не пересекаются, и имеют место условие (2) и включение $x_*(s) \in W(t_*, \vartheta)$, то равенство (2.5) противоречит определению множества позиционного поглощения $W(t_*, \vartheta)$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. Множество $W(t_0, \vartheta)$ полунепрерывно сверху относительно включения по ϑ.

Доказательство. Пусть $\vartheta = \vartheta_*$ — произвольный момент времени, больший t_0. Нужно показать, что как бы мало ни было положительное число $\alpha > 0$, можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\alpha)$, что для всех ϑ, удовлетворяющих неравенству $|\vartheta_* - \vartheta| \leqslant \delta$ $(\vartheta \geqslant t_0)$ будет выполняться включение: $W(t_0, \vartheta) \subset W_\alpha(t_0, \vartheta_*)$.

Здесь $W_\alpha(t_0, \vartheta_*)$ — α-окрестность в $C_{[-\tau, 0]}$ множества $W(t_0, \vartheta_*)$, т. е. совокупность элементов $y(s) \in C_{[-\tau, 0]}$ вида: $y(s) = x(s) + z(s)$, где $x(s) \in W(t_0, \vartheta_*)$, $\|z(s)\|_\tau = \max_s \|z(s)\| < \alpha$.

Предположим от противного, что существует такая α_0-окрестность множества $W(t_0, \vartheta_*)$, что, как бы близок к ϑ_* ни был момент времени ϑ, во множестве $W(t_0, \vartheta)$ есть элемент $x_*(s)$, не содержащийся в $W_\alpha(t_0, \vartheta_*)$. При этом в силу включения $W(t, \vartheta) \subset W(t, \vartheta_*)$ для $\vartheta \leqslant \vartheta_*$, вытекающего из определения множества позиционного поглощения, возможен лишь случай $\vartheta > \vartheta_*$. Так как $x_*(s) \notin W(t_0, \vartheta_*)$, то второй игрок располагает такой стратегией V_0, что замкнутое множество $D(\vartheta_*) = X(p_*, \vartheta_*, U_T, V_0)$, где $p_* = \{t_0, x_*(s)\}$, не пересекается с замкнутым множеством $M(t_0, \vartheta_*)$

(см. стр. 302). Но тогда некоторая замкнутая ε-окрестность $D_\varepsilon(\vartheta_*)$ множества $D(\vartheta_*)$ не пересекается с множеством $M(t_0, \vartheta_* + \varepsilon)$. Далее, опираясь на определения движений $x[t, p_0, U_T, V]$ (см. [9]) и множества $D(\vartheta_*)$ непосредственно проверяется, что каковы бы ни были положительное число ε и момент $\vartheta^* \geqslant t_0$, можно указать такое число $\beta_0' > 0$, что при $\beta \leqslant \beta_0$ справедливо включение $D(\vartheta^* + \beta) \subset D_\varepsilon(\vartheta^*)$. Полагая здесь $\vartheta^* = \vartheta_*$, $\varepsilon \leqslant \vartheta$, выбирая достаточно малое число β так, что $\vartheta_* + \beta = \vartheta$, и учитывая, что множества $D_\varepsilon(\vartheta_*)$ и $M(t_0, \vartheta_* + \varepsilon)$ не пересекаются, получаем, что не пересекается с $M(t_0, \vartheta_*, + \varepsilon)$ и множество $D(\vartheta)$. Это противоречит условию $x_*(s) \in W(t_0, \vartheta)$.

§ 3. Рассмотрим теперь игру на минимакс (максимин) времени до встречи системы (1.1) с целью M.

Пусть начальная позиция игры $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$ такова, что

$$x_0(s) \in W(t_0, \vartheta) \tag{3.1}$$

при некотором конечном ϑ. Тогда существует наименьший момент позиционного поглощения цели M системой (1.1) из позиции p_0, т. е. наименьшее из чисел ϑ, удовлетворяющих условию (3.1). В самом деле, обозначим символом $\vartheta_0 = \vartheta_0(p_0)$ точную нижнюю грань этого множества чисел $\{\vartheta\}$. Предположив, что ϑ_0 не содержится в $\{\vartheta\}$, заключаем, что $x_0(s)$ не содержится во множестве $W(t_0, \vartheta_0)$. Последнее невозможно в силу леммы 2.3 и условия (3.1).

Пусть теперь $\{\alpha_j\}$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\vartheta_j = \vartheta_0 - \alpha_j$. Тогда $x_0(s) \in W(t, \vartheta_j)$ и, следовательно, по определению множеств $W(t, \vartheta)$ существует стратегия V_j второго игрока, гарантирующая непопадание движений $x[t, p_0, U_T, V_0]$ системы (1.1) ни при каком $t \in [t_0, \vartheta_j]$ внутрь некоторой замкнутой ε_j-окрестности множества M.

Учитывая сказанное и опираясь на теорему 2.2 [10], лемму 2.2 и определения (1°) и (3°), получаем утверждение.

Теорема 3.1. Пусть начальная позиция игры $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$ удовлетворяет включению (3.1) по крайней мере при одном $\vartheta < \infty$. Тогда существует наименьший момент ϑ_0 позиционного поглощения цели M системой (1.1). Экстремальная к системе множеств $W(t, \vartheta_0)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta_0$, стратегия U^e первого игрока обеспечивает условие

$$\gamma_1(U^e) \leqslant \vartheta_0$$

Стратегия U^e — минимаксная, ϑ_0 — цена игры, последовательность стратегий $\{V_j\}$ — максиминная.

Примечание 3.1. Максиминную последовательность стратегий $\{V_j^\circ\}$ удобно иногда строить следующим образом (см. [3]). Пусть $\Gamma(t_*, \vartheta_j)$ — множество функций $x(s) \in C_{[-\tau, 0]}$, таких, что для движений $x[\cdot] = x[\cdot, p, U, V_T]$ системы (1.1) из позиции $p = \{t_*, x(s)\}$ выполняется условие

$$\inf_U \sup \min_{t_* \leqslant t \leqslant \vartheta_j} \rho(x[t], M) \geqslant \varepsilon_j \tag{3.2}$$

где inf берется по всем стратегиям U первого игрока, ε_j — достаточно мало, $x[\cdot] \in \{x[\cdot, p, U, V_T]\}$.

Рассуждениями, аналогичными рассуждениям из доказательства лемм 2.1, 2.2, проверяется справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.1. При любом $t \in [t_0, \vartheta_j]$ множества $\Gamma(t, \vartheta_j)$ замкнуты. Система множеств $\Gamma(t, \vartheta_j)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta_j$, сильно v-стабильна.

Из лемм 2.3 [10] и 3.1 вытекает, что экстремальная к системе множеств $\Gamma(t, \vartheta_j)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta_j$, стратегия V_j° второго игрока обеспечивает условие

$$\inf_{x(s)\in\Gamma(t,\vartheta_j)} \max_{-\tau\leqslant s\leqslant 0} \|x_t[s] - x(s)\| = 0$$

где $x[t]$ — любое движение $x[t, p_0, U_T, V_j^e]$.

Последовательность стратегий $\{V_j^e\}$ является, очевидно, максиминной.

Примечание 3.1. Результаты, изложенные в § 2, 3 сохраняют силу и в случае, когда множество M непрерывно меняется со временем: $M = M(t)$.

§ 4. Применение к конкретным нелинейным системам изложенного выше метода построения минимаксной стратегии U° первого игрока и максиминной последовательности стратегий $\{V_j^\circ\}$ второго наталкивается на трудности, связанные с построением множеств $W(t, \vartheta)$ и определением момента поглощения ϑ_0.

Однако для линейной системы (1.1), следуя идеям монографии [2], можно, как и в случае систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [8], указать эффективные условия поглощения цели M управляемым движением, а также условия уклонения от этой цели. При этом вместо указанной выше общей процедуры построения стратегий U°, V_j° можно воспользоваться правилом экстремального прицеливания [1, 2]. Ниже кратко излагаются основные результаты, которые получаются таким путем.

Пусть система (1.1) имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^{0} dA(t, s)\, x_t(s) + B(t)u - C(t)v \tag{4.1}$$

Здесь компоненты матрицы $A(t, s)$ при фиксированном t суть функции с ограниченными изменениями на $[-\tau, 0]$ и при фиксированном s непрерывны по t; $B(t)$, $C(t)$ — непрерывные матрицы; интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Будем считать, что множества P, Q из (1.2) выпуклы, причем непрерывно зависят от t: $P = P(t)$, $Q = Q(t)$; множество M описывается условием: $\{x\}_m \in M^0$, где M^0 — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество (символ $\{K\}_m$ означает матрицу, составленную из первых m строк матрицы K). Стратегии U, V считаем допустимыми, т. е. потребуем, чтобы определяющие их множества $U(t, x(s))$, $V(t, x(s))$ были выпуклыми, замкнутыми и полунепрерывны сверху по включению относительно t, $x(s)$. Движения систем (1.1) формализуются теперь в рамках дифференциальных уравнений в контингенциях с последействием. Именно под движением системы (1.1) из позиции $p_0 = \{t_0\, x_0(s)\}$, порожденной парой стратегий U, V, понимаем теперь всякую абсолютно непрерывную при $t \geqslant t_0$ функцию $x[t] = x[t, p_0, U, V]$, удовлетворяющую условию $x[t_0 + s] = x_0(s)$ и почти при всех $t \geqslant t_0$ включению

$$\frac{dx[x]}{dt} \in \int_{-\tau}^{0} dA(t,s)\,x_t[s] + B(t)\,U(t, x_t[s]) - C(t)\,V(t, x_t[s]) \tag{4.2}$$

(существование таких решений системы (4.2) проверяется предельным переходом от ломаных Эйлера [7]).

Обозначим символом $\varepsilon_0(t, \sigma, x(s))$ ($\sigma \geqslant t$, $x(s) \in C_{[-\tau, 0]}$ величину

$$\varepsilon_0(t, \sigma, x(s)) = \max_{\|l\|=1} \Big[\int_t^{\sigma} \{\mu_2(\xi, \sigma, l) - \mu_1(\xi, \sigma, l)\}\,d\xi +$$

$$+ \rho_0(l) - l\Big\{ S(\sigma, t)\,x(0) + \int_{-\tau}^{0} dS_1(t, \sigma, s)\,x(s) \Big\}_m \tag{4.3}$$

если правая часть (4.3) неотрицательна. Здесь l — m-мерный вектор; $\mu_1(\xi, \sigma, x(s)) = \max_u l\,\{S(\sigma, \xi)B(\xi)_m u,\ u \in P(\xi)$

$$\mu_2(\xi, \sigma, l) = \max_v l\,\{S(\sigma, \xi)C(\xi)\}_m v,\ v \in Q(\xi);\ \rho_0(l) = \min_y ly$$

$$y \in M^\circ;\ dS(\sigma, t)\,/\,dt = -\int_{-\tau}^{0} S(\sigma, t-s)\,dA(t, s),\ t < \sigma;\ S(t, t) = E$$

$$S(\sigma, t) = 0,\ t > \sigma;\ S_1(t, \sigma, s) = \int_0^{\tau} S(\sigma, t+\xi)\,A(t+\xi, s-\xi)\,d\xi$$

(функцию $A(t, s)$ при каждом t доопределяем для значений $s < -\tau$ согласно равенству: $A(t, s) = A(t, -\tau)$ (см. [14, 15])).

Обозначим через $\sigma = \vartheta^\circ$ наименьший корень уравнения

$$\varepsilon_0(t_0, \sigma, x_0(s)) = 0, \qquad \sigma \geqslant t_0 \tag{4.4}$$

если это уравнение имеет решение. В противном случае под ϑ° будем понимать сколь угодно большое положительное число, большее t_0.

Предположим теперь, что существует выпуклое множество $D(\sigma, t)$ такое, что при любых $t \in [t_0, \vartheta_0]$, $\sigma \in [t, \vartheta^\circ]$ выполняются условия: 1) $\{S(\sigma, t)\,B(t)\}_m\,P(t) = \{S(\sigma, t)C(t)\}_m Q(t) + D(t, \sigma)$; 2) для любого $u \in P(t)$ можно указать $v \in Q(t)$ такое, что $\{S(\sigma, t)B(t)\}_m u - \{S(\sigma, t)C(t)\}_m v \in D(\sigma, t)$. (Эти условия отвечают здесь тем условиям, которые фигурируют при исследовании задачи о минимаксе и максимине быстродействия в случае обыкновенных систем [2, 8].)

Определим множества $U^*(t, x(s))$, $V_j^*(t, x(s))$ следующим образом:

$$U^*(t, x(s)) = \{u^e \,|\, q(t, \vartheta^\circ, x(s))\,u^e = \max_{u \in P(t)} q(t, \vartheta^\circ, x(s))\,u\} \tag{4.5}$$

если $\varepsilon_0(t, \vartheta^\circ, x(s)) > 0$; $\qquad U^*(t, x(s)) = P(t))$, $\qquad$ если $\varepsilon_0(t, \vartheta^\circ, x(s)) = 0$

$$V_j^*(t, x(s)) = \{v_j^e \mid q_j(t, \vartheta^\circ, x(s))\, v_j^e = \max_{v \in Q(t)} q_j(t, \vartheta^\circ, x(s))\, v\} \tag{4.6}$$

если $p = \{t, x(s))\} \in G_j$; $\qquad V_j^*(t; x(s)) = Q(t)$, $\qquad$ если $p \notin G_j$

Здесь $q(t, \vartheta^\circ, x(s)) = l^\circ(t, \vartheta^\circ, x(s)) \cdot \{S(\vartheta^\circ, t)\, B(t)\}_m$, $l^\circ(t, \sigma, x(s))$ — вектор, доставляющий максимум в (4.3) (в силу условия 1) он единственный

$$q_j(t, \vartheta^\circ, x(s)) = \int_t^{\vartheta^\circ - \alpha_j} [\varepsilon_0(t, \sigma, x(s))]^{-2}\, l^\circ(t, \sigma, x(s))\, \{S(\sigma, t)\, C(t)\}_m\, d\sigma$$

$$\alpha_j > 0, \qquad \{\alpha_j\} \to 0$$

множество $G_j = \{\{t, \ x(s)\} \mid \min_\sigma \varepsilon_0(t, \sigma, x(s)) > 0, \ \ t_0 \leqslant \sigma \leqslant \vartheta^\circ - \alpha_j\}$.

Теорема 4.1. Пусть для системы 4.1 выполняются условия 1), 2). Если уравнение (4.4) имеет решение, то последовательность стратегий $\{V_j^*\}$, определяемых множествами (4.6), является максиминной; ϑ° — цена игры. Если уравнение (4.4) не имеет решений, то стратегия V_j^* второго игрока гарантирует уклонение движений системы (1.1) о цели M до любого сколь угодно большого момента времени ϑ_j.

Доказательство теоремы проводится по тому же плану, что и доказательство соответствующих утверждений работы [8]. При этом основным моментом доказательства оптимальности стратегий V_j^* является оценка правого верхнего производного числа $\limsup\limits_{\Delta t \to +0} (\Delta L_j \,/\, \Delta t)$ функционала

$$L_j(t, x(s)) = \int_t^{\vartheta^\circ - \alpha_j} [\varepsilon_0(t, \sigma, x(s))]^{-1}\, d\sigma$$

вдоль движений системы (1.1), равного

$$\limsup_{\Delta t \to +0} \left(\frac{\Delta L_j}{\Delta t}\right)_{(1.1)} = [\varepsilon_0(t, t, x_t[s])]^{-1} + \int_t^{\vartheta^\circ - \alpha_j} [\varepsilon_0(t, \sigma, x_t[s])]^{-2}\, l^\circ(t, \sigma, x_t[s]) \times$$
$$\times [\{S(\sigma, t)\, B(t)\}_m\, u[t] - \{S(\sigma, t)\, C(t)\}_m\, v_j^e[t] + \mu_2(t, \sigma, l^\circ(t, \sigma, x_t[s])) -$$
$$- \mu_1(t, \sigma, l^\circ(t, \sigma, x_t[s]))]\, d\sigma$$

Здесь $u[t]$ — реализация управления первого игрока, диктуемого стратегией U; $v_j^e[t]$ — реализация управления второго игрока, диктуемого стратегией V_j^*. При условиях 1), 2) управление $v_j^e[t]$ в области G_j обеспечивает неравенство

$$\limsup_{\Delta t \to +0} (\Delta L_j / \Delta t) \leqslant 0$$

какова бы ни была стратегия U первого игрока. Отсюда выводится, что стратегия V_j^* гарантирует уклонение движений $x[t]$ системы (4.1) от цели M по крайней мере до момента $\vartheta_j = \vartheta^\circ - \alpha_j$.

Примечание 4.1. Из теоремы 4.1 вытекает, что множество $W_t(\vartheta)$ программного поглощения цели M системой 4.1 в момент ϑ (см. [9]), состоящее из тех и только тех $x(s) \in C_{[-\tau,0]}$, которые при любом векторе l удовлетворяют неравенству

$$\int_t^\vartheta \{\mu_1(\xi, \vartheta, l) - \mu_2(\xi, \vartheta, l)\} d\xi - \rho_0(l) + \\ + l\{S(\vartheta, t)x(o) + \int_{-\tau}^0 dS_1(t, \vartheta, s)x(s)\}_m \geqslant 0 \tag{4.7}$$

совпадает при условиях 1), 2) с множеством позиционного поглощения $W(t, \vartheta)$, играющим основную роль выше в основном тексте (§§ 2, 3) данной работы. Заметим также, что из (4.7) следует, что множества $W_t(\vartheta)$ являются выпуклыми и замкнутыми в $C_{[-\tau,0]}$.

Примечание 4.2. В частном случае, когда множество $M°$ есть точка $\{x\}_m = 0$, множество M есть $(n - m)$-мерное линейное подпространство, и тогда условия 1), 2) при отсутствии последействия переходят в условия фигурирующие в работе [12], где, однако, задача уклонения решается при дополнительном предположении о дискриминации противника.

В связи с условием 1), 2) обсудим также совсем кратко условия регуляризируемости задачи сближения с множеством (см. [2], § 21) здесь уже в случае системы с последействием 4.1. Задача сближения состоит в построении стратегии U_0 первого игрока, обеспечивающей попадание всех движений $x[t] = x[t, p_0, U_0, V_T]$ системы (4.1) в заданный момент времени ϑ в наименьшую возможную $\varepsilon°$-окрестность множества M.

Если при любых $t \in [t_0, \vartheta)$, $x(s) \in C_{[-\tau,0]}$, удовлетворяющих условию $\varepsilon_0(t, \vartheta, x(s)) > 0$ (см. 4.3)), максимум в (4.3) достигается на единственном векторе $l°(t, \vartheta, x(s))$ (для этого достаточно, чтобы выполнялось условие 1)), то, как и в случае обыкновенных систем [12], задача решается, опираясь на правило экстремального прицеливания [2]: искомая стратегия $U_0 = U^*$, где U^* определяется множествами (4.5) (в (4.5) следует положить $\vartheta° = \vartheta$, $\sigma = \vartheta$), причем $\varepsilon° = \varepsilon_0(t_0, \vartheta, x_0(s))$ (см. также [11]). Такой случай задачи называется регулярным [2].

Для нерегулярных случаев задачи сближения, когда система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями в монографии [2] указаны так называемые условия регуляризируемости, при выполнении которых задача сближения также решается при помощи правила обобщенного экстремального прицеливания. Оказывается, что в аналогичной форме эти условия регуляризируемости могут быть сформулированы и в случае системы с последействием (4.1).

Эти условия состоят в следующем: для любого $t \in [t_0, \vartheta]$ существует выпуклое множество $R(t)$ такое, что: а) $\{S(\sigma, t)C(t)\}_m Q(t) = \{S(\sigma, t)B(t)\}_m P(t) + R(t)$; б) для любого $v \in Q(t)$ можно указать $u \in P(t)$ такое, что $\{S(\sigma, t)C(t)\}_m v - \{S(\sigma, t)B(t)\}_m u \in R(t)$.

При условиях а), б) существует стратегия U, гарантирующая первому игроку результат, сколь угодно близкий к наилучшему, равному $\varepsilon°$.

Доказательство этого утверждения проводится по плану, указанному в § 21 [2], опираясь на рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательства теоремы 4.1.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за ценные советы и замечания.

Поступила 22 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Об одной задаче преследования. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
2. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. О структуре дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 3.
4. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. I, Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 6.
5. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого. Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 4.
6. Пшеничный Б. Н. Структура дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
7. Красовский Н. Н. Лекции по теории управления, вып. 3 (Общая схема дифференциальной игры. Примеры). Свердловск, 1970.
8. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Об оптимальных стратегиях в линейной дифференциальной игре. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
9. Осипов Ю. С. Дифференциальные игры систем с последействием. Докл. АН СССР, 1971, т. 194, № 6.
10. Осипов Ю. С. Дифференциальная игра наведения для систем с последействием. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
11. Куржанский А. Б. Дифференциальные игры сближения при ограниченных фазовых координатах. Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 3.
12. Гусятников П. Б., Никольский М. С. Об оптимальности времени преследования. Докл. АН СССР, 1959, т. 184, № 3.
13. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестн. МГУ. Сер. матем. и механ., 1959, № 2.
14. Banks H. T. Representations for solutions of linear functional equations. Jechn. Report, 1968, 2.
15. Halanay A. Differential equations. New York — London, Acad. Press, 1966.