Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РАЗМЕРНОСТИ ВОЗДЕЙСТВИЯ, СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО МЕХАНИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ

Л. К. Лилов

(София)

Исследуется задача об определении наименьшего числа управляющих воздействий, стабилизирующих положение равновесия механической системы. Установлены необходимые и достаточные условия, при которых возможна стабилизация положения равновесия минимальным по размерности управлением и определена эта размерность. Для линейного приближения рассматриваемой системы полностью изучено влияние гироскопических и диссипативных сил на размерность стабилизирующего управления. Найдены необходимые условия, при которых возможна стабилизация силами, зависящими только от скоростей.

1. Рассмотрим управляемую консервативную механическую систему с n степенями свободы, движение которой описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i(u_1, \ldots, u_r) \qquad Q_i(0, \ldots, 0) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь q — обобщенные координаты, T и Π — заданные кинетическая и потенциальная энергии соответственно, $u_1, \ldots, u_r$ — управляющие воздействия. Функции, $Q_i(u_1, \ldots, u_r)$ подлежат определению.

Пусть при $u \equiv 0$ система (1.1) имеет положение равновесия $q = q^\circ$. Без ограничения общности можно считать, что $q^\circ = 0$. Ставится задача определить наименьшее число управляющих воздействий, при помощи которых можно стабилизировать до асимптотической устойчивости нулевое решение $q = q^{\circ\cdot} = 0$ системы (1.1) при некотором выборе Q. Если r — это число и $Q_i^\circ(u_1, \ldots, u_r)$ соответствующие функции, то существует r-мерное управление $u = u^\circ(q, q^\cdot)$, стабилизирующее решение $q = q^\cdot = 0$ системы (1.1) при $Q_i = Q_i^\circ$, и нельзя найти функций меньшего, чем r числа переменных — $Q_i(u_1, \ldots, u_{r_1})$ $(r_1 < r)$, при которых возможен выбор управлений $u_1(q, q^\cdot), \ldots, u_{r_1}(q, q^\cdot)$, стабилизирующих положение равновесия $q = q^\cdot = 0$.

В окрестности положения равновесия $q = q^\cdot = 0$ кинетическую и потенциальную энергии можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} q_i^\cdot q_j^\cdot + (**), \qquad a_{ij} = a_{ji} = \text{const}$$

$$\Pi = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} q_i q_j + (**), \qquad c_{ij} = c_{ji} = \text{const}$$

где через (**) обозначена сумма членов третьего и более высоких порядков относительно q_i и $q_i^{\cdot}$ ($i = 1, \ldots, n$).

Первое приближение системы (1.1) запишется в виде

$$Aq^{\cdot\cdot} = Cq + Pu, \quad A = \|a_{ij}\|, \quad C = \|c_{ij}\| \quad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Здесь P — подлежащая определению прямоугольная $n \times r$-матрица. Обозначим через λ_i корни уравнения $\det \| C - \lambda A \| = 0$ и через f_i соответствующие им собственные векторы $Cf_i = \lambda_i A f_i$.

Сделаем замену переменных $q = \Phi y$, $\Phi = \| f_1, \ldots, f_n \|$. Тогда система (1.2) приводится к виду [1]

$$y_i^{\cdot\cdot} = \lambda_i y_i + (\Phi^* P u)_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Здесь и в дальнейшем звездочка означает транспонирование.

Положим

$$y_i = x_{2i}, \quad y_i^{\cdot} = x_{2i-1} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$x^{(1)*} = \|x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}\|, \quad x^{(2)*} = \|x_2, x_4, \ldots, x_{2n}\|, \quad x^* = \|x^{(1)*}, x^{(2)*}\|$$

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix}, \quad L = \begin{Vmatrix} 0 & \Lambda \\ E & 0 \end{Vmatrix}, \quad B^* = \|(\Phi^* P)^*, 0\| \tag{1.3}$$

E — единичная $n \times n$ — матрица.

Тогда система (1.2) примет вид

$$x^{(1)\cdot} = \Lambda x^{(2)} + \Phi^* P u, \quad x^{(2)\cdot} = E x^{(1)}, \quad x^{\cdot} = Lx + Bu \tag{1.4}$$

Пусть дана система общего вида

$$z^{\cdot} = Fz + Gu + f(z) + g(u) \tag{1.5}$$

Здесь z — m-мерный вектор, F, G — матрицы, f, g—вектор-функции, разложения которых начинаются с членов второго порядка малости.

Справедливо [2] следующее утверждение. Чтобы решение $z = 0$ линейного приближения системы (1.5) возможно было стабилизировать до асимптотической устойчивости r-мерным управлением при некотором выборе матрицы G и нельзя стабилизировать $(r - 1)$-мерным ни при каком выборе G, необходимо и достаточно, чтобы все корни наибольшего общего делителя $D_{m-r}(\lambda)$ миноров $(m - r)$ порядка матрицы $\| F - \lambda E \|$ имели отрицательные вещественные части, либо $D_{m-r}(\lambda) \equiv 1$, а $D_{m-r+1}(\lambda)$ имел корень с неотрицательной вещественной частью. Условие отрицательности вещественных частей всех корней $D_{m-r}(\lambda)$ или $D_{m-r}(\lambda) \equiv 1$ является досточным для выбора r-мерного управления u для полной системы (1.5) при некоторой матрице G и $g \equiv 0$.

Если предположить, что у $D_{m-r+1}(\lambda)$ имеется корень с положительной вещественной частью, в то время когда у $D_{m-r}(\lambda)$ все корни расположены левее мнимой оси, либо $D_{m-r}(\lambda) \equiv 1$, то не существует никаких G и $g(u)$, при которых можно выбрать r_1-мерное $(r_1 < r)$ управление, стабилизирующее до асимптотической устойчивости решение $z = 0$ системы (1.5), т. е. в этом случае r является минимальной возможной размерностью управления.

Если через $\psi_1(\lambda), \ldots, \psi_t(\lambda)$ обозначим инвариантные многочлены матрицы F, то как известно [1] m-мерное евклидово пространство R_m всегда можно расщепить на циклические относительно данного линейного оператора F подпространства $I_1, \ldots, I_t$ с минимальными многочленами $\psi_1(\lambda), \ldots, \psi_t(\lambda)$. Тогда, если у $D_{m-r}(\lambda)$ все корни имеют отрицательные вещественные части, либо $D_{m-r}(\lambda) \equiv 1$, в качестве матрицы G можно взять матрицу $\| g_1, \ldots, g_r \|$, где g_i — порождающий вектор I_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Применим эти результаты к рассматриваемой консервативной системе (1.1) и к ее линейному приближению (1.2) или (1.4).

Предположим, что между корнями λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ имеются p разных. Положим

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{s_1}, \quad \lambda_{s_1+1} = \lambda_{s_1+2} = \ldots = \lambda_{s_1+s_2}, \ldots$$
$$\ldots, \lambda_{s_1+\ldots+s_{p-1}+1} = \ldots = \lambda_{s_1+\ldots+s_p} \quad (s_1 + \ldots + s_p = n,$$
$$\lambda_{s_1} \neq \lambda_{s_1+s_2} \neq \ldots \neq \lambda_{s_1+\ldots+s_p}) \tag{1.6}$$

Без ограничения общности можно считать

$$1 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_p \leqslant n \tag{1.7}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. Пусть $\lambda_{s_1+\ldots+s_p}$ есть корень наибольшей кратности s_p уравнения $\det \| C - \lambda A \| = 0$. Нулевое решение $q = q^{\cdot} = 0$ систем (1.1) и (1.2) всегда можно сделать асимптотически устойчивым при помощи s_p управляющих воздействий $u = \| u_1, \ldots, u_{s_p} \|$. Для линейной системы (1.2) число s_p будет минимально возможным. Если $s_p = s_{p-1} = \ldots = s_k$ $(k \leqslant p)$ и хотя бы одно из чисел $\lambda_{s_1+\ldots+s_p}, \lambda_{s_1+\ldots+s_{p-1}}, \ldots, \lambda_{s_1+\ldots+s_k}$ положительно, то число s_p будет минимально возможным и для полной системы (1.1).

Доказательство. При помощи элементарных преобразований характеристическая матрица $\|L - \lambda E_{2n}\|$ (E_{2n} — единичная $2n \times 2n$ матрица) системы (1.4) может быть приведена к эквивалентной диагональной матрице $\|l_{ij}\|$ $(i, j = 1, \ldots, 2n)$

$$l_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \qquad l_{11} = l_{22} = \ldots = l_{2n-s_p,\, 2n-s_p} = 1$$
$$l_{2n-s_p+1, 2n-s_p+1} = \ldots = l_{2n-s_{p-1},\, 2n-s_{p-1}} = \lambda^2 - \lambda_{s_1+\ldots+s_p}$$
$$l_{2n-s_{p-1}+1,\, 2n-s_{p-1}+1} = \ldots = l_{2n-s_{p-2},\, 2n-s_{p-2}} = (\lambda^2 - \lambda_{s_1+\ldots+s_{p-1}})(\lambda^2 - \lambda_{s_1+\ldots+s_p})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l_{2n-s_1+1,\, 2n-s_1+1} = \ldots = l_{2n,\, 2n} = (\lambda^2 - \lambda_{s_1})(\lambda^2 - \lambda_{s_1+s_2}) \ldots (\lambda^2 - \lambda_{s_1+\ldots+s_p})$$

Из вида матрицы l_{ij} очевидно, что наибольший общий делитель миноров $(2n - s_p)$ порядка — $D_{2n-s_p}(\lambda) \equiv 1$, а

$$D_{2n-s_p+1}(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda_{s_1+\ldots+s_p})$$

т. е. $D_{2n-s_p+1}(\lambda)$ имеет корень с неотрицательной вещественной частью. Согласно [2], это необходимо и достаточно, чтобы решение $x = 0$ системы (1.4) можно было стабилизировать до асимптотической устойчивости s_p-мерным управлением при некотором выборе матрицы B и нельзя стабилизировать асимптотически k-мерным $(k < s_p)$ ни при каком выборе B. Для доказательства этого утверждения и для системы (1.2) нужно показать только, что матрицу B в (1.4) можно взять в виде (1.3).

В самом деле, пусть $\psi_i(\lambda)$ есть i-й многочлен матрицы L. Так как в $\psi_i(\lambda)\lambda$ содержится только в виде λ^2 и аргумент

$$L^2 = \begin{Vmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{Vmatrix}$$

то

$$\psi_i(L) = \begin{Vmatrix} \psi_i^{(1)}(\Lambda) & 0 \\ 0 & \psi_i^{(1)}(\Lambda) \end{Vmatrix} \tag{1.8}$$

Здесь $\psi_i^{(1)}(\lambda)$ — i-й инвариантный многочлен матрицы Λ, очевидно, равняющийся

$$\psi_i^{(1)}(\lambda) \doteq \psi_i(\sqrt{\lambda})$$

Если m_i есть степень многочлена $\psi_i(\lambda)$, то очевидно степень $\psi_i^{(1)}(\lambda)$ будет $^1/_2\, m_i$. Обозначим через I_i циклическое подпространство $2n$-мерного евклидова пространства R_{2n} с характеристическим многочленом $\psi_i(\lambda)$ и через $I_i^{(1)}$ циклическое подпространство n-мерного евклидова пространства R_n с характеристическим многочленом $\psi_i^{(1)}(\lambda)$. Пусть $b_i^{(1)}$ — порождающий вектор $I_i^{(1)}$. Тогда по определению порождающего вектора

$$\psi_i^{(1)}(\Lambda)\, b_i^{(1)} = 0, \quad \det \| b_i^{(1)},\ \Lambda b_i^{(1)}, \ldots, \Lambda^{^1/_2 m_i - 1} b_i^{(1)} \| \neq 0 \tag{1.9}$$

Покажем, что в качестве порождающего вектора I_i можно взять $2n$-мерный вектор b_i, $b_i^* \doteq \| b_i^{(1)*},\ 0 \|$.

Действительно, из (1.8), (1.9) следует

$$(\psi_i(L)\, b_i)^* = \| [\psi_i^{(1)}(\Lambda)\, b_i^{(1)}]^*,\ \ 0 \| = \| 0, 0 \|$$

С другой стороны, векторы b_i, Lb_i, ..., $L^{m_i - 1}\, b_i$ линейно независимы, что очевидно из (1.9) и вида матрицы

$$\| b_i,\ Lb_i, \ldots, L^{m_i - 1} b_i \|$$

отличающейся только порядком столбцов от матрицы

$$\begin{Vmatrix} b_i^{(1)} & \Lambda b_i^{(1)} & \ldots & \Lambda^{^1/_2 m_i - 1} b_i^{(1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_i^{(1)} & \Lambda b_i^{(1)} & \ldots & \Lambda^{^1/_2 m_i - 1} b_i^{(1)} \end{Vmatrix}$$

После нахождения матрицы $B^{(1)} = \| b_1^{(1)}, \ldots, b_r^{(1)} \|$ матрица P в (1.2) определяется по формуле $P = (\Phi^*)^{-1} B^{(1)}$.

Совершенно аналогично можно показать, что, если между характеристическими числами λ_i ($i = 1, \ldots, n$) отсутствуют нулевые значения, тривиальное решение системы (1.2) можно стабилизировать до асимптотической устойчивости силами, зависящими только от скоростей $q^{\cdot}$ и ускорений $q^{\cdot\cdot}$. Для этого достаточно взять матрицу B в (1.4) в виде $B^* = \| 0, B^{(1)*} \|$, определить стабилизирующее управление $u = Mx$ (M — некоторая $r \times 2n$ матрица) и перейти от системы (1.4) к системе (1.2).

Остальные утверждения теоремы 1.1 очевидным образом следуют из приведенных выше результатов [2].

Из теоремы 1.1 следует, что решение $q = q^{\cdot} = 0$ системы (1.2) стабилизируется асимптотически одним воздействием тогда и только тогда, когда $s_p = 1$. Согласно (1.7) это условие эквивалентно условиям

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n \tag{1.10}$$

Если предположить дополнительно, что управляющие воздействия влияют определенным способом, т. е. если наложить ограничения на вектор p, к которому сводится матрица P из (1.2) в рассматриваемом случае, тогда для стабилизируемости нулевого решения системы (1.2) кроме условий (1.10) требуется некоторые другие условия. Например, если $p^* = \| 1, 0, \ldots, 0 \|$, то, как показано в [3], кроме выполнения (1.10) необходимо еще, чтобы все элементы первого столбца матрицы Φ^* были отличны от нуля.

2. Управление $u = \| u_1, \ldots, u_r \|$, стабилизирующее до асимптотической устойчивости нулевое решение системы (1.1), в общем случае зависит как от скоростей, так и от координат. Исследуем условия, при которых возможно выбрать управляющие воздействия в функции только от скоростей. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. Если положение равновесия $q = q^{\cdot} = 0$ системы (1.2) можно сделать асимптотически устойчивым одномерным управлением, зависящим линейно только от скоростей при некотором выборе матрицы P, то это положение равновесия необходимо устойчиво и все корни уравнения $\det \| C - \lambda A \| = 0$ отрицательны.

Доказательство. Согласно теореме 1.1, поскольку решение $q = q^{\cdot} = 0$ системы (1.2), или, все равно, решение $x^{(1)} = x^{(2)} = 0$ системы (1.4) стабилизируется одним управлением, необходимо выполняются условия (1.10) и существует вектор $b^* = \| b^{(1)*}, 0 \|$, при котором возможен выбор стабилизирующего управления в (1.4) в виде $u = u(x^1)$. Векторы $b^{(1)}, \Lambda b^{(1)}, \ldots, \Lambda^{n-1} b^{(1)}$ линейно независимы, в противном случае невозможна асимптотическая стабилизация одним управлением.

Обозначим через M_1 матрицу

$$M_1 = \| b^{(1)}, \; \Lambda b^{(1)}, \ldots, \Lambda^{n-1} b^{(1)} \|$$

и сделаем в (1.4) замену переменных

$$x = Mz, \quad M = \left\| \begin{matrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{matrix} \right\|$$

Тогда (1,4) запишется в виде

$$z^{(1)\cdot} = M_1^{-1} \Lambda M_1 z^{(2)} + eu$$

$$z^{(2)\cdot} = E z^{(1)}, \qquad z^{\cdot} = M^{-1} L M z + M^{-1} b u \tag{2.1}$$

Здесь

$$z^{(1)} = M_1^{-1} x^{(1)}, \qquad z^{(2)} = M_1^{-1} x^{(2)}$$

$$e^* = \| 1, 0, \ldots, 0 \|, \qquad z^* = \| z^{(1)*}, \quad z^{(2)*} \|$$

Так как по предположению управление

$$u = \mu^* z^{(1)}, \qquad \mu^* = \| \mu_1, \ldots, \mu_n \|$$

стабилизирует асимптотически систему (2.1), то характеристическое уравнение системы (2.1) при $u = \mu^* z^{(1)}$ должно иметь все корни с отрицательными вещественными частями. Это характеристическое уравнение, как легко видеть, приводится к виду

$$(-1)^n \det \| \Lambda - \lambda^2 E \| + \chi(\lambda) = 0 \tag{2.2}$$

Здесь $\chi(\lambda)$ есть определитель матрицы, которая получается из матрицы $\| M_1^{-1} \Lambda M_1 - \lambda^2 E \|$ заменой первой строки на строку

$$\| \mu_1 \lambda, \; \mu_2 \lambda, \ldots, \mu_n \lambda \|$$

Многочлен (2.2) — гурвицев по предположению и поэтому необходимо чтобы все его коэффициенты были положительны [1]. Но $\chi(\lambda)$ содержит только нечетные степени λ и, следовательно, все коэффициенты многочлена $(-1)^n \det \| \Lambda - \lambda^2 E \|$ положительны. Это возможно, однако, только если $\lambda_i < 0$, $(i = 1, \ldots, n)$.

Необходимость условий $\lambda_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ для возможности стабилизации решения $q = q^{\cdot} = 0$ системы (1.2) силами, зависящими только от скоростей, доказана в [5] при предположении, что минимальное значение изучаемого там квадратичного оптимизирующего функционала $J - J_0 = \min J$, рассматриваемое как функция от начального состояния системы q_0, $q_0^{\cdot}$, представляется в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит лишь от координат q_0, а другое — лишь от скоростей $q_0^{\cdot}$. Это предположение, как видно из теоремы 2.1, не является необходимым.

Условия $\lambda_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ являются не только необходимыми, но и достаточными для асимптотической стабилизации решения $q = q^{\cdot} = 0$ системы (1.1) и (1.2) силами, зависящими только от скоростей. При этом оказывается, что в качестве таких сил всегда можно взять диссипативные силы [5, 6].

3. Предположим, что на систему (1.1) можно наложить дополнительно диссипативные или гироскопические силы. Вопрос о влиянии диссипативных и гироскопических сил на управляемость системы (1.2) изучался в работах [5, 7, 8]. В этом и следующем пунктах это влияние рассматривается с другой точки зрения, а именно: насколько, добавляя диссипативные или гироскопические силы к системе (1.2), удастся понизить размерность управляющего воздействия, достаточного для асимптотической стабилизации нулевого решения (1.2).

Теорема 3.1. 1°. Если среди корней (1.6) уравнения $\det \| C - \lambda A \| = 0$ имеется нулевой $\lambda_{s_1 + \ldots + s_k} = 0$ кратности s_k, то, добавляя к системе (1.2) подходяще выбранные диссипативные силы, всегда можно добиться асимптотической устойчивости решения $q = q^{\cdot} = 0$ системы (1.2) s_k-мерным управлением при подходящем выборе матрицы P. Число s_k является минимально возможным, т. е. при любых диссипативных силах, добавляемых к системе (1.2), нельзя найти r-мерное управление $(r < s_k)$, стабилизирующее асимптотически решение $q = q^{\cdot} = 0$ системы (1.2) ни при каком выборе $n \times r$ матрицы P.

2°. Если между корней (1.6) уравнения $\det \| C - \lambda A \| = 0$ нет нулевых, то, добавляя к системе (1.2) подходяще выбранные диссипативные силы, всегда можно добиться асимптотической устойчивости решения $q = q^{\cdot} = 0$ системы (1.2) одномерным управлением при подходящем выборе $n \times 1$ матрицы P.

3°. Если выполнены условия 2° и все корни уравнения $\det \| C - \lambda A \| = 0$ отрицательны, то добавлением диссипативных сил можно сделать решение $q = q^{\cdot} = 0$ системы (1.2) асимптотически устойчивым [4].

Если нулевой корень $\lambda_{s_1 + \ldots + s_k} = 0$ есть корень наибольшей кратности, т. е. $s_k = s_p$, то, как следует из теорем 1.1 и 3.1.— 1° добавление диссипативных сил не снижает размерность стабилизирующего управления.

Доказательство. Рассмотрим сначала влияние диссипативных сил. Пусть $D = \|d_{ij}\|$, $d_{ij} = d_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ — положительно определенная матрица. Рассмотрим систему

$$x^{(1)\cdot} = -Dx^{(1)} + \Lambda x^{(2)} + B^{(1)}u, \qquad x^{(2)\cdot} = Ex^{(1)} \tag{3.1}$$

Система (3.1) отличается от системы (1.4) наличием диссипативных сил с функцией Рэлея

$$\frac{1}{2}\sum_{i,\, j=1}^{n} d_{ij}x_{2i-1}x_{2j-1}$$

Характеристическую матрицу системы (3.1) при $u \equiv 0$ элементарными преобразованиями можно привести к виду

$$\left\| \begin{matrix} E & 0 \\ 0 & \lambda^2 E + \lambda D - \Lambda \end{matrix} \right\| \tag{3.2}$$

Здесь E — единичная матрица.

В дальнейшем будем предполагать, что $d_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда, очевидно, матрица (3.2) диагональна. Любому корню $\lambda_{s_1+\ldots+s_q}$ из (1.6) отвечают s_q элементов в (3.2)

$$\lambda^2 + d_{ii}\lambda - \lambda_{s_1+\ldots+s_q} \qquad (i = s_1 + \ldots + s_{q-1} + 1, \ldots, s_1 + \ldots + s_q) \tag{3.3}$$

Потребуем, чтобы многочлены (3.3) были взаимно простыми. Если $\lambda_{s_1+\ldots+s_q} \neq 0$, очевидно, этого всегда можно добиться за счет подходящего выбора $d_{ii} > 0$. Достаточно потребовать, чтобы

$$d_{ii} \neq d_{jj} \qquad (i \neq j) \qquad (i = s_1 + \ldots + s_{q-1} + 1, \ldots, s_1 + \ldots + s_q) \tag{3.4}$$

Если $\lambda_{s_1+\ldots+s_q} = 0$, то многочлены (3.3) содержат общий множитель λ при произвольных значениях d_{ii} и не могут быть взаимно простыми.

Любые два многочлена (3.3), отвечающие разным корням, можно подходящим выбором коэффициентов d сделать взаимно простыми. Предположим для примера, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и рассмотрим многочлены

$$\lambda^2 + d_{11}\lambda - \lambda_1, \quad \lambda^2 + d_{22}\lambda - \lambda_2$$

Они будут взаимно простыми, если их результат [9]

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (d_{11} - d_{22})(\lambda_1 d_{22} - \lambda_2 d_{11}) \neq 0 \tag{3.5}$$

чего всегда можно добиться.

Пусть один из корней (1.6) — нулевой, например пусть $\lambda_{s_1+\ldots+s_k} = 0$. Тогда, согласно сказанному выше, выбирая $d_{ii} > 0$ таким образом, чтобы выполнялись условия (3.4) и (3.5), можно привести матрицу (3.2) к эквивалентной диагональной матрице

$$\|l_{ij}\| \qquad (i, j = 1, \ldots, 2n)$$

$$l_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \qquad l_{11} = l_{22} = \ldots = l_{2n-s_k,\, 2n-s_k} = 1$$

$$l_{2n-s_k+1,\, 2n-s_k+1} = (\lambda^2 + d_{\sigma_k+1,\, \sigma_k+1}\lambda) \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq k}}^{p} \prod_{i=\sigma_\alpha+1}^{\sigma_\alpha+s_\alpha} (\lambda^2 + d_{ii}\lambda - \lambda_{s_1+\ldots+s_\alpha})$$

. . . .

$$l_{2n,\, 2n} = (\lambda^2 + d_{\sigma_k+s_k,\, \sigma_k+s_k}\lambda) \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq k}}^{p} \prod_{i=\sigma_\alpha+1}^{\sigma_\alpha+s_\alpha} (\lambda^2 + d_{ii}\lambda - \lambda_{s_1+\ldots+s_\alpha})$$

$$\sigma_k = s_1 + \ldots + s_{k-1}$$

Очевидно, $D_{2n-s_k}(\lambda) \equiv 1$ и нулевое решение системы (3.1), согласно [2], можно стабилизировать s_k-мерным воздействием при подходящем выборе матрицы $B^{(1)}$.

Таким образом, добавление диссипативных сил частного вида $(d_{ij} = 0,\ i \neq j)$ к системе (1.4) или, что все равно, к системе (1.2) позволяет уменьшить число управляющих воздействий от s_p до s_k, где согласно (1.7) $s_k \leqslant s_p$.

С другой стороны, какими бы ни были силы, зависящие линейно только от скоростей, добавляемые к (1.2), невозможна стабилизация r-мерным управлением $(r < s_k)$. Допустим противное, что существует $n \times r$-матрица P, при которой возможна стабилизация r-мерным управлением. Рассмотрим группу уравнений из (1.2), отвечающих нулевому корню $\lambda_{s_1+\ldots+s_k} = 0$. Так как число s_k уравнений группы больше, чем число r управляющих воздействий $u_1, \ldots, u_r$, то последние всегда можно исключить и, какими бы ни были добавленные силы, зависящие линейно только от скоростей, получить, по крайней мере, один интеграл вида $f(q, q^{\cdot}) = \text{const}$, не зависящий от u. Но наличие этого интеграла означает, что решение $q = q^{\cdot} = 0$ (1.2) не стабилизируемо никаким воздействием $u = \| u_1, \ldots, u_r \|$.

Если между корнями (1.6) нет нулевых, тогда матрицу (3.2) можно привести к матрице

$$\| l_{ij} \| \quad (i, j = 1, \ldots, 2n)$$

$$l_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \qquad (l_{11} = l_{22} = \ldots = l_{2n-1,\, 2n-1} = 1$$

$$l_{2n,\, 2n} = \prod_{\alpha=1}^{p} \prod_{i=s'}^{s''} (\lambda^2 + d_{ii}\lambda - \lambda_{s_1 \ldots + s_\alpha}) \qquad \begin{pmatrix} s'' = s_1 + \cdots + s_\alpha \\ s' = s_1 + \cdots + s_{\alpha-1} + 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, $D_{2n-1}(\lambda) \equiv 1$ и в этом случае система (3.1) может быть сделана асимптотически устойчивой одним управлением или уже является асимптотически устойчивой, если все $\lambda_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Действительно, в последнем случае все корни характеристического многочлена

$$D_{2n}(\lambda) = \prod_{\alpha=1}^{p} \prod_{i=s'}^{s''} (\lambda^2 + d_{ii}\lambda - \lambda_{s_1 + \cdots + s_\alpha}) \qquad \begin{pmatrix} s'' = s_1 + \cdots + s_\alpha) \\ s' = s_1 + \cdots + s_{\alpha-1} + 1 \end{pmatrix}$$

матрицы (3.2) имеют отрицательные вещественные части. Другими словами, в этом частном случае получаем известный [4] результат, что изолированное и устойчивое положение равновесия системы (1.2) можно диссипативными силами сделать асимптотически устойчивым.

Таким образом доказана справедливость теоремы 3.1.

4. Предположим теперь, что к системе (1.2) добавляются гироскопические силы.

Теорема 4.1. 1°. Если среди корней (1.6) уравнения $\det \| C - \lambda A \| = 0$ имеется нулевой $\lambda_{s_1+\ldots+s_k} = 0$ кратности s_k, то, добавляя к системе (1.2) подходяще выбранные гироскопические силы, всегда можно добиться асимптотической устойчивости решения $q = q^{\cdot} = 0$ системы (1.2) s_k-мерным управлением $u = u(q, q^{\cdot})$ при подходящем выборе матрицы P. Число s_k является минимально возможным, т. е. при любых гироскопических силах, добавляемых к системе (1.2), нельзя найти r-мерное управление $(r < s_k)$, стабилизирующее асимптотически решение $q = q^{\cdot} = 0$ системы (1.2) ни при каком выборе матрицы P.

2°. Если среди корней (1.6) уравнения $\det \| C - \lambda A \| = 0$ нет нулевых, то, добавляя к системе (1.2) подходяще выбранные гироскопические силы, всегда можно добиться асимптотической устойчивости решения $q = q^{\cdot} = 0$ системы (1.2) одномерным управлением при подходящем выборе ($n \times 1$) матрицы P.

Доказательство. Пусть $H = \| h_{ij} \|$, $h_{ij} = -h_{ji}$ ($i, j = 1, \ldots, n$) — некоторая матрица. Рассмотрим систему, получающуюся из системы (1.4) добавлением гироскопических сил

$$x^{(1)\cdot} = -Hx^{(1)} + \Lambda x^{(2)} + B^{(1)}u, \qquad x^{(2)\cdot} = Ex^{(1)} \tag{4.1}$$

Характеристическая матрица системы (4.1) приводится к эквивалентной матрице

$$\left\| \begin{matrix} E & 0 \\ 0 & \lambda^2 E + \lambda H - \Lambda \end{matrix} \right\|, \quad E \text{ — единичная матрица} \tag{4.2}$$

Будем считать, что

$$h_{i, i+1} \neq 0, \quad h_{ik} = 0 \qquad (k = i+2, \ldots, n \quad i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.3}$$

Тогда матрица $\lambda^2 E + \lambda H - \Lambda$ имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} \lambda^2 - \lambda_1 & h_{12}\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ -h_{12}\lambda & \lambda^2 - \lambda_2 & h_{23}\lambda & \ldots & 0 \\ 0 & -h_{23}\lambda & \lambda^2 - \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^2 - \lambda_n \end{matrix} \right\| \tag{4.4}$$

Между корнями λ_i ($i = 1, \ldots, n$) имеются p разных (1.6). Если один из них нулевой, без ограничения общности можно предполагать, что соответствующая ему группа элементов расположена в нижнем правом углу матрицы (4.4).

Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Умножим второй столбец матрицы (4.4) на $-\lambda / h_{12}$ ($h_{12} \neq 0$ согласно (4.3)), и добавим к первому. Первый столбец полученной новой матрицы умножим на $h_{12}\lambda / \lambda_1$ и добавим ко второму. Дальше, вычитая первую строку новой матрицы, умноженную на подходящий полином, из второй и третьей строки, придем к матрице

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & \varphi_1(\lambda) - \lambda_2 & h_{23}\lambda & \ldots 0 \\ 0 & \varphi_2(\lambda) & \lambda^2 - \lambda_3 & \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

Здесь $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)$ — некоторые полиномы и $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$.

Если $\lambda_2 \neq 0$, указаную процедуру можно продолжить и т. д.

Таким образом, если один из корней (1.6) — $\lambda_{s_1 + \ldots + s_k}$, кратности s_k, нулевой, то матрицу (4.2) можно привести к эквивалентной матрице

$$\| l_{ij} \| \quad (i, j = 1, \ldots, 2n)$$

$$l_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (i, j = 1, \ldots, 2n - s_k)$$

$$l_{11} = l_{22} = \cdots = l_{2n-s_k, 2n-s_k} = 1$$

$$l_{ij} = \varphi_{ij}(\lambda) \quad (i, j = 2n - s_k + 1, \ldots, 2n)$$

Здесь $\varphi_{ij}(\lambda)$ — некоторые многочлены, $\varphi_{ij}(0) = 0$. Очевидно, в этом случае

$$D_{2n-s_k}(\lambda) \equiv 1$$

Если между корнями (1.6) нет нулевых, тогда матрица (4.2) приводится к матрице

$$\| l_{ij} \| \quad (i, j = 1, \ldots, 2n)$$

$$l_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \qquad l_{11} = l_{22} = \cdots = l_{2n-1,\, 2n-1} = 1, \qquad l_{2n,\, 2n} = \varphi(\lambda)$$

Здесь $\varphi(\lambda)$ — некоторый многочлен, $\varphi(0) = 0$.

В этом случае

$$D_{2n-1}(\lambda) \equiv 1$$

Из показанного выше, таким же путем, как и в п. 3, устанавливается теорема 4.1.

Так же, как и в п. 3, можно показать, что если нулевой корень $\lambda_{s_1+\ldots+s_k} = 0$ есть корень наибольшей кратности, т. е. $s_k = s_p$, то добавление гироскопических сил не позволяет снизить размерность стабилизирующего управления.

Примечание. Добавлением диссипативных или гироскопических сил можно понизить размерность управляющего воздействия, стабилизирующего до асимптотической устойчивости нулевое решение системы (1.1) с s_p до m (m — одно из чисел 0, 1, s_k). Это утверждение очевидно из теорем 3.1, 4.1 и известного факта, что из асимптотической устойчивости тривиального решения линейного приближения (1.2) следует асимптотическая устойчивость тривиального решения полной системы (1.1) [10].

Сравнение теорем 3.1 и 4.1 показывает, что гироскопические и диссипативные силы почти одинаковым образом могут понижать размерность стабилизирующего управления. Единственный случай, когда диссипативными силами можно добиться большего, есть частный случай $\lambda_i < 0$ ($i = 1, \ldots, n$), в котором добавлением диссипативных сил к системе (1.2) можно упрочить устойчивое положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ до асимптотической устойчивости. Однако в ряде случаев добавление гироскопических сил для понижения размерности управляющего воздействия может оказаться предпочтительным, поскольку добавление гироскопических сил не требует дополнительной траты энергии на движения системы.

Автор благодарит В. В. Румянцева за обсуждение работы и полезные замечания.

Поступила 9 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, изд. 2. М., «Наука», 1966.
2. Лилов Л. К. Об определении наименьшего числа управлений, стабилизирующих положения равновесия. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
3. Габриелян М. С. О стабилизации неустойчивых движений механических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения, изд. 2. М., Гостехиздат, 1955.
5. Габриелян М. С., Красовский Н. Н. К задаче о стабилизации механической системы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
6. Румянцев В. В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
7. Красовский Н. Н. Об одном свойстве гироскопической стабилизируемости управляемой консервативной механической системы. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 5.
8. Габриелян М. С. О влиянии диссипативных гироскопических сил на управляемость и наблюдаемость механических систем. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
9. Курош А. Г. Курс высшей алгебры, изд. 3. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
10. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л., Гостехиздат, 1950.