Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ЛИ, ПРИМЫКАЮЩИЕ К ГРУППАМ ГАЛИЛЕЯ И ЕВКЛИДА

Л. М. Мархашов

(Москва)

Произведено расслоение пространства структурных констант трехмерных алгебр Ли на классы эквивалентности по признаку их изоморфизма над полем вещественных чисел, что позволило перечислить локальные группы Ли, близкие (в некотором смысле) к группе Галилея и Евклида, и в «пределе» совпадающие с ними.

Это простейшая из задач об ограничении множества групп Ли, «уточняющих» те группы Ли, которые описывают уже известные физические объекты. (Описание физического объекта группой понимается здесь в смысле физической трактовки Эрлангенской программы Клейна [1]). С аналогичными задачами связана теория деформаций и сжатия колец и алгебр Ли, развиваемая в последние годы [2–5].

1. Постановка задачи. Пусть R — вещественное евклидово пространство тензоров c_{jk}^i $(i, j, k \leqslant n)$ и $\Gamma \subset R$ одно из неприводимых многообразий структурных констант групп Ли G, выделяемое из R условиями Якоби

$$c_{ab}^e c_{ec}^f + c_{bc}^e c_{ea}^f + c_{ca}^e c_{eb}^f = 0, \qquad c_{ec}^f = -c_{ce}^f \tag{1.1}$$

Пространство структурных констант групп G определено как объединение всех Γ.

Локальный изоморфизм групп G, будучи отношением эквивалентности ([6], стр. 18), организует разбиение многообразий Γ на попарно непересекающиеся множества H.

Таким образом, между множествами H и неизоморфными локальными группами Ли (и их алгебрами) возникает взаимно однозначное соответствие.

Пусть A и B — множества пространства R. Здесь и в дальнейшем $\bar{A}$ — замыкание множества A в естественной топологии для евклидовых пространств ([6], стр. 67—68), $\bar{A}_B = \bar{A} \cap B$ — относительное замыкание множества A на множестве B, рассматриваемом как подпространство пространства R. Пусть H' и H'' — два различных множества, принадлежащих одному, либо разичным многообразиям Γ.

Будем говорить, что локальная группа G', соответствующая множеству H', примыкает к локальной группе G'', соответствующей множеству H'', если

$$\bar{H}' \cap H'' \neq \Lambda \qquad (\Lambda \text{ — пустое множество}) \tag{1.2}$$

Очевидно, если группа G' примыкает к группе G'', то существует такая непрерывная последовательность групп $G(\lambda)$, локально изоморфных при $0 < \lambda \leqslant \lambda_0$ группе G', которая при $\lambda \to +0$ сходится к группе $G(0)$, локально изоморфной группе G''.

Предметом предлагаемой работы является алгебраическое описание расслоения многообразий Г для трехпараметрических алгебр и перечисление всех локальных групп, примыкающих к каждой из групп G, в частности, к группам Галилея и Евклида.

2. Методика решения задачи и результат. Пусть AG — алгебра инфинитезимальных операторов группы G и $X_1, \ldots, X_n$ — ее базис.

Вещественная линейная группа $GL(n, R)$ перевыбора базиса алгебры AG

$$X_i' = \alpha_i^j X_j \quad (i, j = 1, \ldots, n), \qquad \det(\alpha_i^j) \neq 0$$

состоит из двух связных листов, соответствующих движениям ($\det(\alpha_i^j) > 0$) и отражениям ($\det(\alpha_i^j) < 0$) и индуцирует в пространстве R представление T. Преобразования группы T

$$c_{ij}^{\delta\prime} = c_{k_1k_2}^{\gamma}\alpha_i^{k_1}\alpha_j^{k_2}\overset{*}{\alpha}{}_{\gamma}^{\delta}, \quad \alpha_\nu^\gamma\overset{*}{\alpha}{}_\gamma^\varepsilon = \delta_\nu^\varepsilon \quad (\delta_\nu^\varepsilon \text{ — тензор Кронекера}) \tag{2.1}$$

сохраняют соотношения (1.1), преобразуя каждое из многообразий Г в себя. Преобразования групп, индуцированных группой T на многообразиях $Г$, исчерпывают все преобразования, сохраняющие локальный изоморфизм групп G, и поэтому реализуют то отношение эквивалентности, по которому производится разбиение многообразий Г. Отсюда следует, что множества H суть орбиты группы T и групп, индуцированных группой T на ее инвариантных многообразиях.

Пусть $\Gamma = \Gamma^0 \supset \Gamma^1 \supset \ldots \supset \Gamma^l$ такая конечная последовательность инвариантных многообразий группы T, что в ней представлены все инвариантные многообразия этой группы, содержащие Γ^l, и на многообразии Γ^l,— если оно не сводится к совокупности изолированных точек,— группа T транзитивна. Тогда каждая орбита T будет компонентой связности одного из множеств

$$\Gamma^0\setminus\Gamma^1, \quad \Gamma^1\setminus\Gamma^2, \ldots, \Gamma^{l-1}\setminus\Gamma^l, \quad \Gamma^l \tag{2.2}$$

либо объединением двух компонент того же множества, если в группе $GL(n, R)$ существует отражение, порождающее гомеоморфизм одной из этих компонент в другую.

Таким образом, для решения поставленной задачи нужно: 1) найти инвариантные многообразия группы T; 2) вычислить ее орбиты; 3) для групп G составить диаграмму примыкания в смысле (1.2). Решение задачи в такой последовательности, изложенное в пп. 3—5, приводит к следующему результату.

Введем обозначения

$$c_{23}^1 = u, \quad c_{13}^2 = v, \quad c_{12}^3 = w \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= c_{12}^2 + c_{13}^3, & \theta_1 &= c_{12}^2 - c_{13}^3, & \chi_1 &= 2uf_1 - \theta_3 f_2 + \theta_2 f_3\\
f_2 &= c_{13}^1 + c_{23}^2, & \theta_2 &= c_{13}^1 - c_{23}^2, & \chi_2 &= \theta_3 f_1 - 2wf_2 - \theta_1 f_3\\
f_3 &= c_{12}^1 - c_{23}^3, & \theta_3 &= c_{12}^1 + c_{23}^3, & \chi_3 &= \theta_2 f_1 + \theta_1 f_2 - 2vf_3
\end{aligned}$$

$$\varphi = \theta_1\theta_2\theta_3 + 4uvw + u\theta_1^2 - v\theta_3^2 + w\theta_2^2$$
$$\psi_1 = \theta_1^2 + 4vw, \quad \psi_2 = \theta_2^2 + 4uv, \quad \psi_3 = \theta_3^2 - 4uw$$
$$\psi_4 = \theta_1\theta_3 + 2w\theta_2, \quad \psi_5 = \theta_1\theta_2 - 2v\theta_3, \quad \psi_6 = \theta_2\theta_3 + 2u\theta_1$$
$$\Omega = \psi_i/f_i^2 \quad \text{при } f_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$\dim H$ — размерность орбиты, совпадающая с рангом матрицы (3.5) инфинитезимальных операторов алгебры AT группы T, вычисленным в точках этой орбиты; m — порядковый номер групп G, перечисленных в классификации Г. Шефферса ([7], стр. 571; см. также [8], стр. 167).

В зависимости от того, обращается или не обращается в нуль выражение $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$ имеем два неприводимых многообразия Γ_1 и Γ_2 структурных констант и соответственно — две серии групп G.

Группы G конечной серии $(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 0)$

G^1 Лобачевского [1] $\qquad \dim H = 6; \ m = 1$

$$w\varphi \geqslant 0, \quad \varphi \neq 0; \qquad w\varphi < 0, \quad \psi_1 > 0$$

G^2 сферической геометрии $\qquad \dim H = 6;$

$$w\varphi < 0, \qquad \psi_1 < 0$$

G^3 Лоренца [2]

$\dim H = 5; \quad m = 2$

$$\varphi = 0, \quad \psi_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 \neq 0$$

G^4 Евклида $\qquad \dim H = 5;$

$$\varphi = 0, \quad \psi_i \leqslant 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 \neq 0$$

G^5 Галилея $\qquad \dim H = 3; \ m = 6$

$$\varphi = 0, \quad \psi_i = 0, \quad u^2 + v^2 + w^2 \neq 0$$

G^6 коммутативная $\qquad \dim H = 0; \ m = 7$

$$\varphi = 0, \quad \psi_i = 0, \quad u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

Группы G бесконечной (непрерывной) серии $(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 > 0)$.

G^{c_0} $\qquad \dim H = 5, \ m = 2{,}5$

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0 \quad (\varphi = 0), \qquad \Omega = c_0 \neq 0, \ \infty$$

G^7 $\qquad \dim H = 5; \ m = 4$

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0 \quad (\varphi = 0), \qquad \Omega = 0, \qquad u^2 + v^2 + w^2 \neq 0$$

G^8 $\qquad \dim H = 3; \ m = 3$

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0 \quad (\varphi = 0) \qquad \Omega = 0, \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

---

[1] Группа движений плоскости Лобачевского.

[2] Изоморфна группе преобразований плоскости: геометрическая координата — время.

Группам конечной серии отвечают орбиты группы T, лежащие на многообразии Γ_1, группам бесконечной серии — орбиты T, лежащие на Γ_2.

Через G^{c_0} обозначен континуум групп: каждой паре различных вещественных значений c_0 отвечает пара неизоморфных групп G. При $c_0 \to \infty$ формально получаем группу Лоренца. Для групп типа G^{c_0} Г. Шефферсом указаны следующие коммутационные соотношения:

$$(X_1,\ X_2) = 0, \quad (X_1,\ X_3) = X_1, \quad (X_2,\ X_3) = cX_2 \ (c \neq 0,\ 1) \tag{2.4}$$

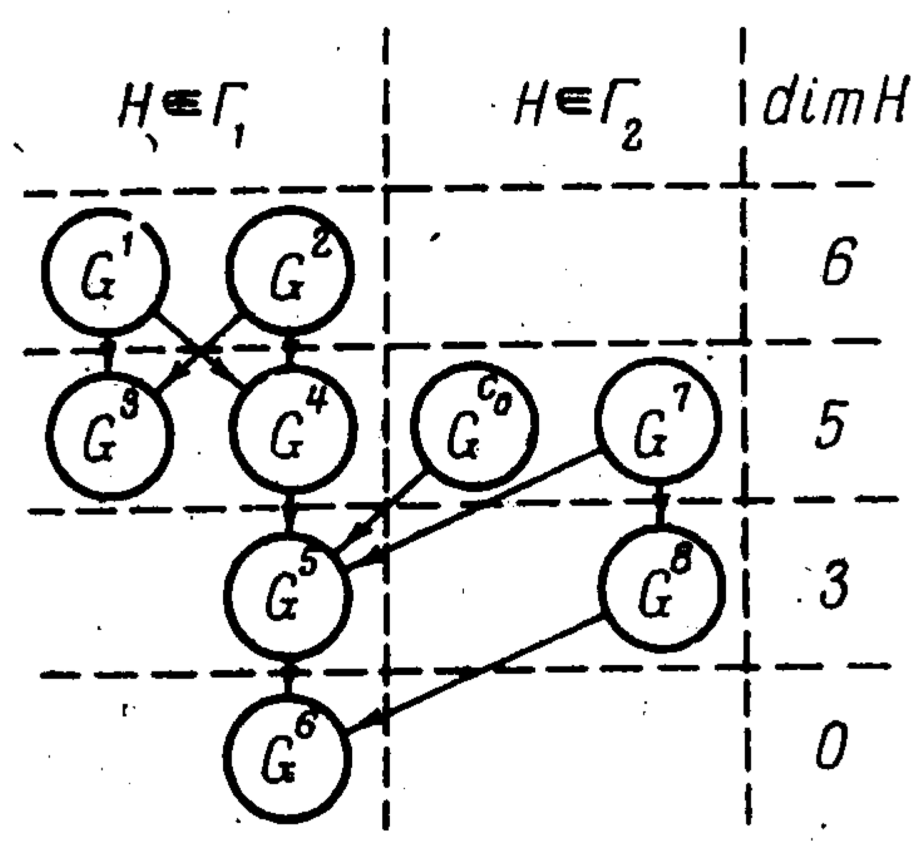
из которых следует

$$\Omega = c_0 = \left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2$$

Группе Лоренца отвечает, таким образом, $c = -1$. Значениям $c' = c$ и $c'' = 1 / c$ соответствует одна и та же группа, так что все алгебры, определяемые соотношениями (2.4), получаются при $-1 \leqslant c \leqslant 1$.

Однако при этом постоянная c_0 будет принимать лишь положительные значения. Для получения $c_0 < 0$ следовало бы положить $c = e^{i\varphi}\ (0 < \varphi < \pi)$.

Диаграмма примыкания групп G показана на фигуре. На одной вертикали размещены группы, для которых орбиты H принадлежат одному и тому же многообразию Г. На одной горизонтали — группы, соответствующие орбиты которых имеют одинаковую размерность.



Фиг. 1

Примыкания показаны стрелками. Диаграмма транзитивна: если группа G' примыкает к группе G'', а G'' — к группе G''', то G' примыкает к G'''.

Все группы, кроме групп G^1 и G^2, разрешимы. Группы $G^1, \ldots, G^5$ конечной серии описывают пять из девяти геометрий Кэли — Клейна ([8], стр. 210). Из диаграммы видно, что к группе Евклида примыкает группа Лобачевского и группа локальной сферической геометрии — факт установленный Риманом в геометрических терминах ([8], стр. 155—156). Таким образом, никаких иных геометрий, кроме упомянутых, уточняющих геометрию Евклида на плоскости, не существует. Все три группы могут быть реализованы как группы движений двухмерного риманова пространства постоянной кривизны ([9], стр. 273). К группе Галилея непосредственно примыкают группы Лоренца и Евклида. Этот факт также хорошо известен. Он установлен Пуанкаре и Эйнштейном в связи с исследованием фундаментальных свойств физического пространства-времени. К группе Галилея примыкает, сверх того, бесконечная серия групп G^{c_0}. Поскольку группа Лоренца, как сказано, формально относится к их числу, то может иметь смысл вопрос, почему из всех групп G^{c_0} именно группа Лоренца в действительности уточняет свойства Галилеева пространства-времени?

Как известно ([6], стр. 396), группа Ли преобразований может быть восстановлена по своим структурным константам лишь с точностью до подобия (иначе — с точностью до выбора системы координат, арифметизирующей преобразуемое пространство).

Поэтому знание групп, примыкающих к заданной, еще не исчерпывает вопроса о воможных уточнениях теории, описываемой этой группой.

Приведем некоторые реализации алгебр AG для групп G преобразований.

Группа G^1. В полярных координатах u, v

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial v}, \qquad X_2 = \sin v \frac{\partial}{\partial u} + \frac{G'(u)}{2G(u)} \cos v \frac{\partial}{\partial v}$$

$$X_3 = \cos v \frac{\partial}{\partial u} - \frac{G'(u)}{2G(u)} \sin v \frac{\partial}{\partial v}, \qquad G(u) = \left(\frac{\operatorname{sh} \sigma u}{\sigma}\right)^2$$

Коммутационные соотношения

$$(X_1, X_2) = X_3, \ (X_1, X_3) = -X_2, \ (X_2, X_3) = -\sigma^2 X_1$$

Преобразования группы сохраняют метрику ([10], стр. 89)

$$ds^2 = du^2 + G(u)\, dv^2$$

Группа G^2 получается из группы G^1 преобразованием

$$\sigma \to i\sigma$$

Группа G^3 (x — геометрическая координата, t — время)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \mu^2 x \frac{\partial}{\partial t}$$

Коммутационные соотношения

$$(X_1, X_2) = 0, \qquad (X_1, X_3) = \mu^2 X_2, \qquad (X_2, X_3) = X_1$$

Преобразования группы сохраняют метрику

$$ds^2 = -\mu^2 dx^2 + dt^2$$

Группа G^4 (x, y — декартовы координаты)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

Коммутационные соотношения

$$(X_1, X_2) = 0, \qquad (X_1, X_3) = -X_2, \qquad (X_2, X_3) = X_1$$

Преобразования группы сохраняют метрику

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

(группа G^4 получается также из группы G^3 преобразованием $\mu \to i\mu$).

Группа G^5 (x — геометрическая координата, t — время)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x}$$

Коммутационные соотношения

$$(X_1, X_2) = 0, \qquad (X_1, X_3) = 0, \qquad (X_2, X_3) = X_1$$

Метрики, сохраняемые преобразованиями группы, не существует.

Группы G^{c_0}

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_3 = (t + c_0 x)\frac{\partial}{\partial t} + (t + x)\frac{\partial}{\partial x}$$

Коммутационные соотношения

$$(X_1, X_2) = 0 \qquad (X_1, X_3) = X_1 + c_0 X_2, \qquad (X_2, X_3) = X_1 + X_2$$

Метрику, сохраняемую преобразованиями групп, если она существует, можно найти, проинтегрировав уравнения Киллинга ([9], стр. 251).

3. Инварианты и инвариантные многообразия группы *T*. Вычислим компоненты $\zeta_{\beta ij}^{\alpha\delta}$ инфинитезимальных операторов

$$Y_\beta{}^\alpha = \zeta_{\beta ij}^{\alpha\delta}\frac{\partial}{\partial c_{ij}^{\delta}} \ (i < j)$$

алгебры AT группы T.

Дифференцируя соотношения (2.1) по α_α^β, получим

$$\frac{\partial c_{ij}{}^{\delta}}{\partial \alpha_\alpha^\beta} = c_{\beta k_2}{}^{\gamma}\delta_i^\alpha \alpha_j^{k_2} \alpha_\gamma^{*\delta} + c_{k_1\beta}{}^{\gamma}\alpha_i^{k_1}\delta_j^\alpha \alpha_\gamma^{*\delta} + \alpha_i^{k_1}\frac{\partial \alpha_\gamma^{*\delta}}{\partial \alpha_\alpha^\beta} c_{k_1 k_2}{}^{\gamma}\alpha_j^{k_2}$$

$$\frac{\partial \alpha_\varepsilon^{*\delta}}{\partial \alpha_\alpha^\beta} = -\frac{\partial \alpha_\nu^\alpha}{\partial \alpha_\alpha^\beta}\alpha_\gamma^{*\delta}\alpha_\varepsilon^{*\nu} = -\delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\nu \alpha_\gamma^{*\delta}\alpha_\varepsilon^{*\nu} = -\alpha_\beta^{*\delta}\alpha_\varepsilon^{*\alpha}$$

В качестве $\zeta_{\beta ij}^{\alpha\delta}$ возьмем производные $\partial c_{ij}^{\delta'}/\partial \alpha_\alpha^\beta$ при значениях $\alpha_\alpha^\beta = \alpha_\alpha^{*\beta} = \delta_\alpha^\beta$, отвечающих единице группы $GL(n, R)$

$$\zeta_{\beta ij}^{\alpha\delta} = \delta_i^\alpha c_{\beta j}^{\delta} + \delta_j^\alpha c_{\beta i}^{\delta} - \delta_\beta^\delta c_{ij}^\alpha \tag{3.1}$$

Коммутационные соотношения в полученном таким образом базисе алгебры AT имеют вид

$$(Y_\beta^\alpha, Y_{\beta'}^{\alpha'}) = \delta_{\beta'}^\alpha Y_\beta^{\alpha'} - \delta_\beta^{\alpha'} Y_{\beta'}^\alpha$$

Использование обозначений (2.3) позволяет равенства Якоби (1.1) записать так:

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0 \tag{3.2}$$

Отсюда следует, либо

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 0 \tag{3.3}$$

либо $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 > 0$, и тогда

$$2\varphi = \begin{vmatrix} 2u & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & -2w & -\theta_1 \\ \theta_2 & \theta_1 & -2v \end{vmatrix} = 2(\theta_1\theta_2\theta_3 + 4uvw + u\theta_1^2 + w\theta_2^2 - v\theta_3^2) = 0 \tag{3.4}$$

Можно проверить, что равенство (3.4) совпадает с условием Картана разрешимости групп G.

Матрица инфинитезимальных операторов алгебры AT в переменных u, v, w, f_i, θ_i $(i = 1, 2, 3)$ получает вид

	ζ_u	ζ_v	ζ_w	ζ_{θ_1}	ζ_{θ_2}	ζ_{θ_3}	ζ_{f_1}	ζ_{f_2}	ζ_{f_3}
$Y_1{}^1$	$-u$	v	w	θ_1	0	0	f_1	0	0
$Y_1{}^2$	θ_2	0	0	0	$-2v$	$-\theta_1$	0	0	$-f_1$
$Y_1{}^3$	$-\theta_3$	0	0	0	θ_1	$-2w$	0	$-f_1$	0
$Y_2{}^1$	0	$-\theta_2$	0	$-\theta_3$	$2u$	0	$-f_3$	0	0
$Y_2{}^2$	u	$-v$	w	0	0	θ_3	0	0	f_3
$Y_2{}^3$	0	θ_1	0	$-2w$	θ_3	0	0	f_3	0
$Y_3{}^1$	0	0	$-\theta_3$	θ_2	0	$-2u$	$-f_2$	0	0
$Y_3{}^2$	0	0	$-\theta_1$	$2v$	0	θ_2	0	0	f_2
$Y_3{}^3$	u	v	$-w$	0	θ_2	0	0	f_2	0

(3.5)

Нетрудно убедиться, что системы уравнений (3.3) и (3.2) вместе с (3.4) определяют инвариантные многообразия группы T. Совокупность всех инвариантных многообразий группы, индуцированной группой T на первом из них — Γ_1, образует последовательность

$$\Gamma_1 \supset \Gamma_1^1 \supset \Gamma_1^2 \supset \Gamma_1^3$$

Группа, индуцированная группой T на втором из этих многообразий — Γ_2, интранзитивна. Ее преобразования оставляют на месте континуальное множество поверхностей $\Gamma_2{}^{c_0} \subset \Gamma_2$, соответствующих инвариантам группы T, при различных вещественных значениях c_0, заполняющих все многообразие Γ_2. На поверхностях $\Gamma_2{}^{c_0}$ группа T действует локально транзитивно во всех точках общего положения, и при $c_0 = 0$ допускает инвариантные многообразия $\Gamma_2{}^1$ и $\Gamma_2{}^2 \subset \Gamma_2{}^1$.

Пользуясь стандартной методикой вычисления инвариантов и инвариантных многообразий ([9], стр. 84—89), найдем

$$\Gamma_1 = \{f_1 = f_2 = f_3 = 0\}; \qquad \Gamma_1{}^1 = \{f_1 = f_2 = f_3 = 0, \quad \varphi = 0\}$$

$$\Gamma_1{}^2 = \{f_1 = f_2 = f_3 = 0, \ \varphi = 0, \ \psi_i = 0\} \quad {\scriptstyle (i=1,\ldots,6)}$$

$$\Gamma_1{}^3 = \{f_1 = f_2 = f_3 = 0, \ \varphi = 0, \ \psi_i = 0, \ u = v = w = 0\}$$

$$\Gamma_2 = \{\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0\}, \qquad \Gamma_2{}^{c_0} = \{\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0, \ \varphi = 0, \ \Omega = c_0\}$$

$$\Gamma_2{}^1 \, (\Gamma_2{}^{c_0} \text{ при } c_0 = 0) = \{\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0, \ \varphi = 0, \ \Omega = 0\} \quad (c_0 \neq 0)$$

$$\Gamma_2{}^2 = \{\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0, \ \varphi = 0, \ \Omega = 0, \ u = v = w = 0\}$$

Отметим, что тензорный характер структурных констант указывает в соответствии с общей теорией алгебраических инвариантов [11] на возможность вычисления инвариантов и инвариантных многообразий группы T путем применения тензорной свертки и альтернирования.

4. Орбиты группы T. В этом пункте будем пользоваться следующими простыми утверждениями, первое из которых очевидно.

4.1°. Пусть множество A пространства R определяется совместной системой алгебраических неравенств

$$\varphi_i(y_1, \ldots, y_m;\ x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \quad \sum_{j=1}^{k} \omega_j^2(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$$

левые части которых таковы, что а) непустое множество B, определяемое условиями $\omega_j > 0$ ($j = 1, \ldots, k$) связно; б) система уравнений $\varphi_i = 0$ ($i = 1, \ldots, m$) однозначно разрешима относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$ в любой точке множества B. Тогда множество $A \cap B$, определяемое неравенствами $\varphi_1 \geqslant 0, \ldots, \varphi_m \geqslant 0$, $\omega_1 > 0, \ldots, \omega_k > 0$ связно.

4.2°. Пусть C и D множества пространства R, рассматриваемые как подпространства, и одно из отображений

$$g_1: c_{12}^{1'} = -c_{12}^{1},\ c_{23}^{3'} = -c_{23}^{3},\ c_{13}^{1'} = c_{13}^{1},\ c_{23}^{2'} = c_{23}^{2},\ c_{12}^{2'} = c_{12}^{2},\ c_{13}^{3'} = c_{13}^{3}$$
$$g_2: c_{12}^{1'} = c_{12}^{1},\ c_{23}^{3'} = c_{23}^{3},\ c_{13}^{1'} = -c_{13}^{1},\ c_{23}^{2'} = -c_{23}^{2},\ c_{12}^{2'} = c_{12}^{2},\ c_{13}^{3'} = c_{13}^{3}$$
$$g_3: c_{12}^{1'} = c_{12}^{1},\ c_{23}^{3'} = c_{23}^{3},\ c_{13}^{1'} = c_{13}^{1},\ c_{23}^{2'} = c_{23}^{2},\ c_{12}^{2'} = -c_{12}^{2},\ c_{13}^{3'} = -c_{13}^{3}$$

(при $u' = -u$, $v' = -v$, $w' = -w$ во всех трех отображениях) есть гомеоморфизм множества C на множество D. Тогда множества C и D соответствуют одной и той же локальной группе G. В этом случае будем говорить, что множества C и D соединимы отражением и считать их несущественно различными.

Доказательство. Из коммутационных соотношений в алгебре AG

$$(X_i, X_j) = c_{ij}^k X_k \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

непосредственно видно, что отображения g_1, g_2 и g_3 порождаются соответственно отражениями $X_2' = -X_2$, $X_3' = -X_3$, $X_1' = -X_1$.

4.3°. При $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 0$ в силу (2.3) имеют место тождества

$$\varphi c_{12}^1 = \psi_4\psi_6 + \psi_3\psi_5, \quad \varphi c_{13}^1 = \psi_2\psi_4 + \psi_5\psi_6, \quad \varphi c_{12}^2 = \psi_4\psi_5 + \psi_1\psi_6$$
$$\varphi u = \psi_6^2 - \psi_2\psi_3, \quad \varphi v = \psi_1\psi_2 - \psi_5^2, \quad \varphi w = \psi_4^2 - \psi_1\psi_3$$
$$\varphi^2 = \psi_1\psi_6^2 + \psi_2\psi_4^2 + \psi_3\psi_5^2 + 2\psi_4\psi_5\psi_6 - \psi_1\psi_2\psi_3$$

В справедливости этих тождеств можно убедиться непосредственной проверкой.

Орбиты группы T найдем последовательно для всех множеств $\Gamma^{\alpha-1} \setminus \Gamma^{\alpha}$ (см. п. 2).

Множество $\Gamma_1 \setminus \Gamma_1^1$. Если задан знак функции φ, то переменные c_{12}^1, c_{13}^1, c_{12}^2, $c_{23}^1 = u$, $c_{13}^2 = v$, $c_{12}^3 = w$ выражаются, согласно 4.3°, однозначно через величины ψ_i как параметры. При этом последние стеснены единственным ограничением

$$\psi_1\psi_6^2 + \psi_2\psi_4^2 + \psi_3\psi_5^2 + 2\psi_4\psi_5\psi_6 - \psi_1\psi_2\psi_3 > 0$$

Обозначим

$$p = -\frac{q}{\psi_4^2 - \psi_1\psi_3} = -\frac{\psi_1\psi_6^2 + \psi_3\psi_5^2 + 2\psi_4\psi_5\psi_6}{\psi_4^2 - \psi_1\psi_3}$$

В силу 4.1° и 4.2° каждое из перечисленных ниже множеств состоит из двух связных частей, соединимых отражением

$$\varphi \neq 0, \quad \psi_4^2 - \psi_1\psi_3 > 0, \quad (\text{отсюда } \psi_2 > p) \tag{4.1}$$

$$\varphi \neq 0, \quad \psi_4^2 - \psi_1\psi_3 < 0, \ \psi_1 > 0 \quad (\text{отсюда } \psi_3 > 0, \ \psi_2 < p) \tag{4.2}$$

$$\varphi \neq 0, \quad \psi_4^2 - \psi_1\psi_3 < 0, \quad \psi_1 < 0 \ (\text{отсюда } \psi_3 < 0, \ \psi_2 < p) \tag{4.3}$$

При $\psi_4^2 - \psi_1\psi_3 < 0$, $\psi_1 > 0$ функция q, рассматриваемая как однородная квадратичная форма от ψ_5, ψ_6, определенно положительна. Поскольку $q \to \infty$ при $\psi_4^2 - \psi_1\psi_3 \to -0$ (в противном случае $\varphi \to 0$), то $p \to \infty$. Так как $\psi_2 < p$, то существует непрерывный переход из множества (4.2) в любую из двух связных частей множества

$$\varphi \neq 0, \quad \psi_4^2 - \psi_1\psi_3 = 0, \quad \psi_1 > 0 \tag{4.4}$$

С другой стороны, при $\psi_4^2 - \psi_1\psi_3 > 0$ форма q знакопеременна и, следовательно, переменные можно выбрать так, чтобы было $q > 0$ без нарушения прочих условий. Тогда $p \to -\infty$ при $\psi_4^2 - \psi_1\psi_3 \to 0$ и из $\psi_2 > p$ следует возможность непрерывного перехода из множества (4.1) в множество (4.4).

Таким образом, объединение M_1 множеств (4.1), (4.2) и (4.4) принадлежит одной орбите. Она может быть определена, согласно 4.3°, как объединение двух непересекающихся множеств, задаваемых неравенствами

$$M_1 = \{w\varphi \geqslant 0, \ \varphi \neq 0; \ w\varphi < 0, \ \psi_1 > 0\}$$

Если обозначить через M_2 множество, описываемое неравенствами (4.3) (в силу 4.3° его можно определить также неравенствами $w\varphi < 0$, $\psi_1 < 0$), то, очевидно, $M_1 \cup M_2 = \Gamma_1 \setminus \Gamma_1^1$. Покажем, что каждое из множеств M_1 и M_2 есть орбита многообразия Γ_1. Для этого достаточно установить, что граница $\overline{M}_2 \setminus M_2$ множества M_2 недостижима изнутри этого множества. Действительно, при $\psi_4^2 - \psi_1\psi_3 < 0$, $\psi_1 < 0$ форма q определенно отрицательна, так что $p \to -\infty$ при $\psi_4^2 - \psi_1\psi_3 \to 0$. Тогда условие $\psi_2 < p$ свидетельствует о нарушении связности при переходе от множества M_2 к его замыканию $\overline{M}_2$.

Множество $\Gamma_1^1 \setminus \Gamma_1^2$. Это множество определяется условиями $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 0$, $\varphi = 0$, $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 \neq 0$ (если $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$, то из 4.3° следуют равенства $\psi_i = 0$ ($i = 1, \ldots, 6$), определяющие множество Γ_1^2). Из 4.1° следует, что перечисленные ниже подмножества множества $\Gamma_1^1 \setminus \Gamma_1^2$ связны

$$K_1 = \{\varphi = 0, \ \psi_1 > 0\}, \quad L_1 = \{\varphi = 0, \ \psi_1 < 0, \ w > 0\}$$
$$N_1 = \{\varphi = 0, \ \psi_1 < 0, \ w < 0\}$$
$$K_2 = \{\varphi = 0, \ \psi_2 > 0\}, \quad L_2 = \{\varphi = 0, \ \psi_2 < 0, \ v > 0\}$$
$$N_2 = \{\varphi = 0, \ \psi_2 < 0, \ v < 0\}$$
$$K_3 = \{\varphi = 0, \ \psi_3 > 0\}, \quad L_3 = \{\varphi = 0, \ \psi_3 < 0, \ w > 0\}$$
$$N_3 = \{\varphi = 0, \ \psi_3 < 0, \ w < 0\}$$

Согласно 4.2°, множества L_i и N_k при $i = k$ соединимы отражением. В силу 4.3° при $\varphi = 0$ функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 не могут одновременно принимать противоположных знаков. Поэтому множества K_i и $L_i \cup N_i$ следует определять неравенствами

$K_1 = \{\varphi = 0,\ \psi_1 > 0,\ \ \psi_2 \geqslant 0,\ \ \psi_3 \geqslant 0\}$, $L_1 \cup N_1 = \{\varphi = 0,\ \psi_1 < 0$
$\psi_2 \leqslant 0,\ \varphi_3 \leqslant 0\}$

$K_2 = \{\varphi = 0,\ \psi_1 \geqslant 0,\ \ \psi_2 > 0,\ \psi_3 \geqslant 0\}$, $L_2 \cup N_2 = \{\varphi = 0,\ \psi_1 \leqslant 0$
$\psi_2 < 0,\ \psi_3 \leqslant 0\}$

$K_3 = \{\varphi = 0,\ \psi_1 \geqslant 0,\ \ \psi_2 \geqslant 0,\ \psi_3 > 0\}$, $L_3 \cup N_3 = \{\varphi = 0,\ \psi_1 \leqslant 0$
$\psi_2 \leqslant 0,\ \psi_3 < 0\}$

Отсюда видно, что $K_1 \cap K_2 \cap K_3 \neq \Lambda$, так что множество $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ связно и определяется условиями (4.5)

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 0, \quad \varphi = 0,\ \psi_1 \geqslant 0,\ \psi_2 \geqslant 0,\ \psi_3 \geqslant 0,\ \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 \neq 0$$

Пересечение всех множеств $L_i \cup N_i$ также непусто. Значит, объединение их связно и определяется условиями (4.6)

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 0,\ \ \varphi = 0,\ \ \psi_1 \leqslant 0,\ \ \psi_2 \leqslant 0,\ \ \psi_3 \leqslant 0,\ \ \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 \neq 0$$

Очевидно, что всякая непрерывная кривая, соединяющая точки множеств (4.5) и (4.6), пересекает множество Γ_1^2. Значит, каждое из множеств (4.5), (4.6) образует орбиту, лежащую на Γ_1.

Множество $\Gamma_1^2 \setminus \Gamma_1^3$. Покажем, что это множество распадается на две компоненты связности, соединимые отражением и потому образует одну орбиту множества Γ_1

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 0, \quad \varphi = 0, \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0, \ \ u^2 + v^2 + w^2 \neq 0$$

Действительно, согласно 4.1°, каждое из множеств

$$\begin{array}{ll} f_i = \psi_i = \varphi = 0, \quad u > 0; & f_i = \psi_i = \varphi = 0, \quad u < 0 \\ f_i = \psi_i = \varphi = 0, \quad v < 0; & f_i = \psi_i = \varphi = 0, \quad v > 0 \\ f_i = \psi_i = \varphi = 0, \quad w > 0; & f_i = \psi_i = \varphi = 0, \quad w < 0 \end{array}$$

связно. При выполнении условий $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ возможны лишь следующие комбинации знаков:

$$u \geqslant 0,\quad v \leqslant 0,\quad w \geqslant 0,\quad u^2 + v^2 + w^2 \neq 0$$

либо

$$u \leqslant 0,\quad v \geqslant 0,\quad w \leqslant 0,\quad u^2 + v^2 + w^2 \neq 0$$

Отсюда следует, что множество $\Gamma_1^2 \setminus \Gamma_1^3$ распадается на два связных множества

$$f_i = \psi_i = \varphi = 0,\quad u \geqslant 0,\quad v \leqslant 0,\quad w \geqslant 0,\quad u^2 + v^2 + w^2 \neq 0$$
$$f_i = \psi_i = \varphi = 0,\quad u \leqslant 0,\quad v \geqslant 0,\quad w \leqslant 0,\quad u^2 + v^2 + w^2 \neq 0$$

соединимых отражением.

Множество Γ_1^3 образует единственную орбиту, поскольку состоит из одной точки.

Множество $\Gamma_2^{c_0}$ $(c_0 \neq 0)$. Будем различать случаи $c_0 < 0$, $c_0 > 0$.

1) При $c_0 < 0$ будет $w \neq 0$, и тогда уравнения

$$\varphi = 0, \qquad \theta_1^2 + 4vw = c_0 f_1^2$$

однозначно разрешимы относительно u и v

$$u = -\frac{-v\theta_3^2 + w\theta_2^2 + \theta_1\theta_2\theta_3}{c_0} f_1^2, \qquad v = \frac{c_0 f_1^2 - \theta_1^2}{w}$$

Согласно 4.1°, 4.2°, имеем два связные множества, соответственно определяемые на множестве $\Gamma_2^{c_0}$ условиями $w > 0$ и $w < 0$. Они соединимы отражением.

2) При $c_0 > 0$ имеем $\theta_1^2 + 4vw > 0$.

Поскольку $f_1\sqrt{c_0} = \pm\sqrt{\theta_1^2 + 4vw}$ и множество $\theta_1^2 + 4vw > 0$ связно, то множество $\Gamma_2^{c_0}$ при $c_0 > 0$ распадается на два связных множества (соответствующих условиям $f_1 > 0$ и $f_1 < 0$), соединимых отражением.

Таким образом, множество $\Gamma_2^{c_0}$ $(c_0 \neq 0)$ при каждом вещественном значении постоянной c_0 определяет орбиту, принадлежащую многообразию Γ_2.

Множество $\Gamma_2^1 \setminus \Gamma_2^2$ определяется условиями

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0, \quad \varphi = 0, \ \Omega = 0, \quad u^2 + v^2 + w^2 \neq 0, \ \psi_i = 0$$

и образует единственную орбиту многообразия Γ_2. Этот факт доказывается вполне аналогично тому, как это сделано для множества $\Gamma_1^2 \setminus \Gamma_1^3$.

Множество Γ_2^2, определяемое условиями $u = v = w = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$, очевидно, связно, и потому определяет единственную орбиту многообразия Γ_2.

5. Диаграмма примыкания. Пусть $P^\alpha = \Gamma_j^{\alpha-1} \setminus \Gamma_j^\alpha$ и H — компонента связности подпространства P^α в R. Тогда H замкнуто на P^α. Имеем

$$H = \overline{H}_{P^\alpha} = \overline{H} \cap (\Gamma_j^{\alpha-1} \setminus \Gamma_j^\alpha) = (\overline{H} \setminus \Gamma_j^\alpha) \cap \Gamma_j^{\alpha-1} = \overline{H} \setminus \Gamma_j^\alpha$$

Отсюда $\overline{H} \setminus H \subset \Gamma^\alpha$. Следовательно, группа G, соответствующая орбите $H \subset P^\alpha \subset \Gamma_j^{\alpha-1}$, примыкает к группам, орбиты которых принадлежат инвариантному многообразию Γ_j^α. Этим фактом определяется примыкание в группах $G^1, \ldots, G^6$ и частично в группах непрерывной серии.

Кроме того, орбиты, отвечающие группам непрерывной серии, имеют участки границы, определяемой в R пересечением

$$\Gamma_1 \cap \overline{\Gamma}_2 = \{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 0, \ \varphi = 0\}$$

Это обстоятельство обуславливает примыкание групп непрерывной серии к группам G^5 и G^6 конечной серии.

В п. 4 все орбиты описаны при помощи алгебраических неравенств. Проверим, например, замкнутость орбиты $M_2 \subset \Gamma_1 \diagdown \Gamma_1^1$ на подпространстве $\Gamma_1 \diagdown \Gamma_1^1$, исходя из ее определения неравенствами (4.3)

$$\psi_4^2 - \psi_1\psi_3 < 0, \ \psi_1 < 0, \ \psi_3 < 0, \ \varphi^2 > 0$$

(замкнутость остальных орбит очевидна). Для этого достаточно показать, что ни одно из этих неравенств не может обратиться в равенство при сохранении остальных.

Пусть $\psi_1 = 0$. Тогда $\psi_4^2 - \psi_1\psi_3 \geqslant 0$. Если $\psi_4^2 - \psi_1\psi_3 = 0$, $\varphi \neq 0$, то согласно 4.3° $w = 0$ и $\psi_1 \geqslant 0$. Следовательно, равенства $\psi_1 = 0$, $\psi_4^2 - \psi_1\psi_3 = 0$ должны выполняться одновременно. Но тогда из $\varphi^2 = \psi_3\psi_5^2 > 0$ следует $\psi_3 > 0$. Следовательно, равенства $\psi_1 = \psi_3 = \psi_4^2 - \psi_1\psi_3 = 0$ необходимо выполняются одновременно. Из них следует равенство $\varphi = 0$, определяющее инвариантное многообразие Γ_1^1.

Автор благодарит Э. Э. Шноля, участников семинара, руководимого Д. П. Желобенко и А. И. Штерном, за обсуждение результатов работы. Ф. А. Березина, А. А. Кириллова за критические замечания.

Поступила 17 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований. Сб. «Об основаниях геометрии», М., Гостехиздат, 1956.
2. Saletan E. J. Contraction of Lie groups. J. Math. Phys., 1961, vol. 2, No. 1.
3. Gerstenhaber M. On the deformation of rings and algebras. Ann. Math., 1964, vol. 79, No. 1.
4. Levy-Nahas M. Deformation and contraction of Lie algebras. J. Math. Phys., 1967, vol. 8, No 6.
5. Levy-Nahas M. Deformations du groupe de Poincaré. Collog. internat. Centre nat. rech. scient., 1968, No. 159.
6. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы, изд. 2. М., Гостехиздат, 1954.
7. Lie S. Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und andere Anwendungen. Leipzig, B. G. Teubner, 1893.
8. Каган В. Ф. Основания геометрии, ч. 2, М., Гостехиздат, 1956.
9. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
10. Погорелов А. В. Основания геометрии, изд. 3. М., «Наука», 1968.
11. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М.—Л., Гостехиздат, 1948.