Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ И МАСШТАБНОЕ ПОДОБИЕ В СТРУКТУРЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Е. А. Новиков

(Москва)

Перемежаемость — это неравномерность распределения вихревых образований в потоке. Индикатором может служить модуль или квадрат поля вихря, скорость диссипации энергии или родственные величины, квадратичные по градиентам скорости и температуры (концентрации пассивной примеси).

Следует различать перемежаемость в спорадически турбулентном потоке (в частности, вблизи границы между турбулентной и не турбулентной областью) и перемежаемость в развитом турбулентном потоке.

Причина перемежаемости — неустойчивость вихревых образований и связанный с этим случайный характер процесса дробления крупных вихрей на все более мелкие.

Исследование перемежаемости имеет ряд аспектов. Во-первых, статистический анализ полей указанного типа, характеризующих перемежаемость. Особый интерес для общей теории турбулентности представляют статистические характеристики поля вихря [1,2]. В настоящее время вполне осуществимо проведение соответствующих измерений [3].

Другой аспект — это изучение влияния, которое оказывает перемежаемость (в терминах изменчивости диссипации) на структуру полей скорости и температуры), в частности, на спектр энергии. Наличие такого влияния было предсказано в известном замечании Л. Д. Ландау [4], развитом в работах А. М. Обухова [5] и А. Н. Колмогорова [6] (см. также несколько иную постановку задачи в [7]). По-видимому, эффект влияния изменчивости диссипации на спектр энергии наиболее существенен для малоизученной пока области движений с очень большими волновыми числами [7–9]. Универсальную форму спектра в этой области, вообще говоря, можно получить введением геометрически усредненной спектральной плотности [1]: $\widetilde{E}(k) = \exp\{\langle \ln E(k)\rangle\}$, где $E(k)$ — случайная спектральная плотность энергии (при фиксированном значении диссипации), угловые скобки означают усреднение.

Наконец, с изучением перемежаемости связан вопрос о выборе оптимального времени усреднения для различных статистических характеристик потока. Это наиболее существенно для потоков с широким спектром движений, например, для атмосферной турбулентности [5].

При исследовании характеристик перемежаемости важно прежде всего попытаться отыскать универсальные законы, которые не зависели бы от крупномасштабных особенностей потока и, по возможности, от числа Рейнольдса (если оно достаточно велико; ниже речь пойдет о развитом турбулентном потоке).

В описании перемежаемости весьма полезным оказалось понятие коэффициента дробления — отношение значений неотрицательного поля, усредненного по разным масштабам (§ 1). С использованием коэффициента дробления получены спектр и другие характеристики полей типа диссипации энергии [10–13]. В определенном диапазоне масштабов спектр оказался пропорциональным $k^{-1+\mu}$ (k — волновое число, $0 < \mu < 1$), что согласуется с экспериментальными данными [14–20, 24], которые дают значения параметра $\mu \approx 0.4$. Понятие коэффициента дробления было использовано также в работах А. М. Яглома [21] и А. С. Гурвича и А. М. Яглома [24] для обоснования предложенного ранее [5,6] логарифмически нормального закона распределения диссипации энергии и для вывода аналогичного двумерного распределения. Экспериментальные данные [22–25, 17, 18] для величин типа диссипации дают распределения, близкие к логарифмически нормальному, хотя имеются и систематические отклонения, о которых еще будет идти речь в § 5.

В рассматриваемой работе, представляющей собой развитие заметки [13], показано, что универсальные законы имеют место для статистических характеристик коэффициента дробления. Что касается формул для спектра и распределения вероятностей исходных полей, то фактически эти формулы получаются при помощи определенной экстраполяции и потому имеют приближенный и неуниверсальный характер.

Далее показано, что распределение вероятностей для коэффициента дробления стремится к логарифмически нормальному при увеличении отношения масштабов усреднения. Однако это стремление достаточно медленное, определяемое логарифмом отношения масштабов или логарифмом соответствующего числа Рейнольдса. Более того, моменты коэффициента дробления не стремятся к соответствующим выражениям, вытекающим из предельного логарифмически нормального закона (ситуация довольно исключительная для процессов, реализуемых в природе). Последнее обстоятельство имеет место не только для коэффициентов дробления, но и для самих полей типа диссипации энергии, что подтверждается экспериментально (§ 5). Существующий уровень экспериментальных исследований вполне позволяет непосредственно определять статистические характеристики коэффициента дробления и тем самым максимально сблизить теорию и эксперимент.

Заметим, что в марсельском докладе А. Н. Колмогорова [6] содержались определенные гипотезы подобия, выраженные в терминах отношения разностей скорости. Это отношение может обращаться в бесконечность, что несколько затрудняет теоретическое и экспериментальное исследование. Тем не менее возможно, что универсальные законы существуют только для такого рода относительных характеристик турбулентного потока, к которым принадлежит и коэффициент дробления.

§ 1. Коэффициент дробления. Рассмотрим неотрицательную случайную функцию $y(x)$. Роль $y(x)$ может играть, в частности, одна из величин

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial v_{2,3}}{\partial x}\right)^2, \quad \Omega^2_{1,2,3}, \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 \tag{1.1}$$

рассматриваемая как функция от координаты x вдоль направления средней скорости потока. Это соответствует интерпретации при помощи гипотезы «замороженности» экспериментальных записей во времени. Здесь v_1 и $v_{2,3}$ — продольная и одна из поперечных компонент флуктуаций скорости, $\Omega_{1,2,3}$ — произвольная компонента флуктуаций вихря, θ — флуктуация температуры (концентрации пассивной примеси). С учетом условий несжимаемости и локальной изотропии средние значения величин (1.1) равны соответственно

$$\frac{1}{15}\frac{\langle\varepsilon\rangle}{\nu}, \quad \frac{2}{15}\frac{\langle\varepsilon\rangle}{\nu}, \quad \frac{1}{3}\frac{\langle\varepsilon\rangle}{\nu}, \quad \frac{1}{3}\frac{\langle N\rangle}{\varkappa} \tag{1.2}$$

Здесь $\langle\varepsilon\rangle$ — среднее значение скорости диссипации кинетической энергии, $\langle N\rangle$ — средняя скорость выравнивания флуктуаций температуры (концентрации пассивной примеси), ν и $\varkappa$ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности (диффузии).

Коэффициентом дробления назовем отношение значений функций $y(x)$, усредненной по двум отрезкам

$$q_{r,l}(h, x) = y_r(x')/y_l(x), \qquad r < l \tag{1.3}$$

$$y_l(x) = \frac{1}{l}\int\limits_{x-1/2l}^{x+1/2l} y(x_1)\,dx_1, \qquad -\frac{1}{2} \leqslant h = \frac{x'-x}{l-r} \leqslant \frac{1}{2}$$

Ограничение на h означает, что меньший отрезок предполагается включенным в больший.

В соответствии с экспериментально подтвержденной теорией локально однородной и локально изотропной турбулентности можно считать функции (1.1) однородными и изотропными в масштабах, меньших характерного внешнего масштаба L. Для таких масштабов распределение вероятностей величины $q_{r,\,l}$ не зависит от x, но, вообще говоря, зависит от $|h|$[1]. Эта зависимость определяет неоднородность дробления.

В качестве примера рассмотрим однородную марковскую последовательность неотрицательных величин y_k ($k = \ldots, 1, 2, 3, \ldots$) с плотностью распределения каждой из них $W(y)$ и с переходной вероятностью

$$P(y_{k+1} \mid y_k) = \alpha\delta(y_{k+1} - y_k) + (1-\alpha) W(y_{k+1}) \quad (0 < \alpha < 1) \tag{1.4}$$

($\delta(y)$ — дельта-функция). Нетрудно показать, что $P(y_k \mid y_{k+1})$ получается из (1.4), если поменять местами y_k и y_{k+1}, т. е. последовательность изотропна. Обозначим

$$Q_m \equiv q_{1,3}(h_m, 2) = \frac{3y_m}{y_1 + y_2 + y_3} \qquad (m = 1, 2, 3;\ h_1 = -h_3 = -{}^1/_2,\ h_2 = 0)$$

Очевидно

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3, \qquad \langle Q_1 \rangle = \langle Q_3 \rangle$$

С учетом (1.4) можно подсчитать

$$\langle Q_1 \rangle - \langle Q_2 \rangle = \frac{3}{2}\alpha(1-\alpha)\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(y-y')^2}{(y+2y')(y'+2y)} W(y) W(y')\, dy\, dy' \geqslant 0 \tag{1.5}$$

Отсюда видно, что имеет место неоднородность дробления. Входящий в (1.5) интеграл обращается в нуль только в случае детерминированных y_k, когда $W(y) = \delta(y - a)$. Степень неоднородности дробления, будучи определена по разности (1.5), в данном примере не превышает $^3/_{16}$.

Для величин (1.1) было бы желательно изучить экспериментально неоднородность дробления, в первую очередь зависимость от h среднего значения коэффициента дробления.

Если однородная случайная функция $y(x)$ удовлетворяет условиям эргодичности (достаточно, чтобы корреляционная функция затухала на бесконечности степенным образом), то

$$y_l(x)_{l\to\infty} \to \langle y \rangle, \quad q_{r,l}(h, x)_{l\to\infty} \to y_r(x')/\langle y \rangle \tag{1.6}$$

Зная статистические характеристики коэффициента дробления, можно при помощи (1.6) осуществить переход к традиционному описанию. В частности

$$\langle y(x+r)\, y(x) \rangle \langle y \rangle^{-2} = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2}[r^2 \langle q_{r,l}^2 \rangle] \tag{1.7}$$

---

[1] Очевидно, что от h зависит совместное распределение вероятностей для величин $y_r(x')$ и $y_l(x)$ и, в частности, корреляция между этими величинами.

В заключение этого параграфа укажем одно простое, но важное неравенство, которое следует из неотрицательности $y(x)$:

$$q_{r,l}(h, x) \leqslant l/r \tag{1.8}$$

§ 2. Масштабное подобие. Наряду с внешним масштабом L для функции $y(x)$ существует некоторый внутренний масштаб l_*, определяемый вязкостью (теплопроводностью, диффузией). Величина l_* может отличаться от колмогоровского внутреннего масштаба $l_\nu = \nu^{3/4} \langle\varepsilon\rangle^{-1/4}$ (или его обобщения на случай пассивной примеси) на некоторую степень числа Рейнольдса [10,12]. Если в интервале между L и l_* нет других характерных масштабов, определяющих поведение случайной функции $y(x)$, то естественно потребовать, чтобы при $L \gg l > r \gg l_*$ распределение вероятностей для коэффициента дробления (1.3) зависело только от отношения масштабов l/r и от $|h|$.

Введем отрезок длины ρ, промежуточной между r и l, с центром в точке $x'' = x + h(l - \rho)$. Имеем

$$q_{r,l}(h, x) = q_{r,\rho}(h, x + h(l - \rho))\, q_{\rho,l}(h, x) \tag{2.1}$$

Все три коэффициента дробления, входящие в (2.1), характеризуются одним и тем же значением h. Потребуем, чтобы в указанном выше интервале масштабов сомножители, стоящие справа в (2.1), были статистически независимы. Аргументы в пользу такого рода требования были приведены еще в [10, 21], где рассматривалась несколько условная схема дискретного дробления больших кубиков на маленькие с одинаковым уменьшением масштабов на каждом этапе в n раз.

Аргументы эти состояли в том, что дробление должно обладать универсальностью до тех пор, пока соответствующее число Рейнольдса (определяемое через диссипацию энергии, усредненную по рассматриваемому объему) достаточно велико и соответственно масштабы велики по сравнению с l_*.

Ниже будет показано, что требование статистической независимости последовательных коэффициентов дробления необходимо и достаточно для того, чтобы моменты имели степенной характер (последнее подтверждается экспериментально). Сформулированные выше два условия (зависимость распределения вероятностей для коэффициента дробления только от отношения масштабов и h и статистическая независимость двух последовательных коэффициентов с одним и тем же h) будем называть условиями масштабного подобия, а соответствующий интервал — интервалом масштабного подобия.

Рассмотрим моменты коэффициента дробления

$$a_p(l/r, h) = \langle q^p_{r,l}(h, x)\rangle \tag{2.2}$$

Здесь p — положительное (не обязательно целое) число. Из условий масштабного подобия с учетом (2.1) имеем

$$a_p(l/r, h) = a_p(\rho/r, h)\, a_p(l/\rho, h)$$

В силу произвольности ρ

$$a_p(l/r, h) = (l/r)^{\mu_p(h)} \tag{2.3}$$

Распределение вероятностей для коэффициента дробления сосредоточено на конечном интервале (1.8), что, как легко видеть, накладывает следующие ограничения:

$$\mu_{p+\delta}(h) - \mu_p(h) \leqslant \delta \qquad (\delta \geqslant 0) \tag{2.4}$$

Поскольку $\mu_0(h) \equiv 0$, то

$$\mu_p(h) \leqslant p \tag{2.5}$$

Если пренебречь неоднородностью дробления (зависимостью от h), то, как показано в [13]

$$\mu_1 = 0, \quad 0 < \mu_2 \equiv \mu < 1 \tag{2.6}$$

причем экспериментальные данные, интерпретированные в терминах коэффициента дробления при помощи (1.7), дают $\mu \approx 0.4$. Неравенство (2.5) заменяется более сильным

$$\mu_p \leqslant \mu + p - 2 \qquad (p \geqslant 2)$$

Рассмотрим ряд для характеристической функции коэффициента дробления

$$\varphi(s, l/r, h) = \langle \exp\{isq_{r,l}(h, x)\}\rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(is)^p}{p!}\left(\frac{l}{r}\right)^{\mu_p(h)} \tag{2.7}$$

Из неравенства (2.5) следует, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно в любом конечном интервале $|s| \leqslant S$. Простое преобразование ряда (2.7) с учетом (2.1) и (2.3) дает

$$\varphi(s, l/r, h) = \langle \varphi(sq_{r,\rho}, l/\rho, h)\rangle = \langle \varphi(sq_{\rho,l}, \rho/r, h)\rangle$$

Это означает статистическую независимость последовательных коэффициентов дробления. Таким образом, требования масштабного подобия являются не только достаточными, но и необходимыми для того, чтобы моменты имели степенной характер.

Нетрудно проверить, что неравенство (2.5) обеспечивает выполнение условия Карлемана [26]

$$\sum_{p=1}^{\infty} (a_{2p})^{-\frac{1}{2p}} = \infty$$

достаточного для того, чтобы распределение вероятностей однозначно определялось моментами целочисленного порядка. Заметим, что рассмотренное в следующем параграфе предельное логарифмически нормальное распределение не обладает этим свойством [26].

Набор показателей степени $\mu_p(h)$ ($p = 0, 1, 2\ldots$) однозначно фиксирует распределение вероятностей для коэффициента дробления при произвольном значении l/r. Общий вид распределения можно установить, введя характеристическую функцию для логарифма коэффициента дробления:

$$\psi(s, l/r, h) = \langle \exp\{isz_{r,l}(h, x)\}\rangle$$

$$z_{r,l}(h, x) = \ln q_{r,l}(h, x)$$

Условия масштабного подобия с учетом (2.1) дают

$$\psi(s, l/r, h) = \psi(s, \rho/r, h)\,\psi(s, l/\rho, h)$$

В силу произвольности ρ получим

$$\psi(s, l/r, h) = (l/r)^{-\alpha(s, h)} = \exp\{-\alpha(s, h)\ln(l/r)\} \tag{2.8}$$

Функция $\alpha(s, h)$, удовлетворяющая условию нормировки полной вероятности $\alpha(0, h) = 0$, является универсальной. Это утверждение может быть подвергнуто непосредственной экспериментальной проверке путем измерения распределения вероятностей или отдельных моментов для коэффициента дробления при различных значениях l/r. Для показателей степени моментов имеем

$$\mu_p(h) = -\alpha(-ip, h) \tag{2.9}$$

Если эффектом неоднородности дробления окажется возможным пренебречь, то $\alpha(s)$ — универсальная (комплексная) функция от одного аргумента. Определение этой функции представляется важной задачей для дальнейших экспериментальных исследований структуры турбулентного потока.

§ 3. Предельное распределение вероятностей. Ниже для простоты записи будем опускать зависимость всех величин от параметра h. Кумулянты распределения логарифма коэффициента дробления определяются производными от функции $\alpha(s)$ в нуле (если эти производные существуют), причем все кумулянты пропорциональны логарифму отношения масштабов

$$\varkappa_p\left(\frac{l}{r}\right) = (i)^{-p}\,\frac{d^p \ln\psi(s, l/r)}{ds^p}\bigg|_{s=0} = (i)^{2-p}\alpha^{(p)}(0)\ln\frac{l}{r} \tag{3.1}$$

Предполагая существование среднего значения ($\varkappa_1$) и дисперсии ($\varkappa_2$) логарифма коэффициента дробления, введем нормированную величину логарифма коэффициента дробления и соответствующую характеристическую функцию

$$\zeta_{r,l} = [z_{r,l} - \varkappa_1(l/r)]\,\varkappa_2^{-1/2}(l/r), \quad \chi(t, l/r) = \langle \exp\{it\zeta_{r,l}\}\rangle \tag{3.2}$$

Аналогично доказательству интегральной предельной теоремы [27] можно показать, что при $\ln(l/r) \to \infty$

$$\chi(t, l/r) \to \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\} \tag{3.3}$$

равномерно в любом конечном интервале $|t| \leqslant T$[1]. Таким образом, асимптотически при $\ln(l/r) \to \infty$ коэффициент дробления имеет логарифмически нормальное распределение вероятностей.

Величины, относящиеся к предельному логарифмически нормальному распределению, будем отмечать звездочкой вверху. Из (3.2), (3.3) имеем

$$\alpha^*(s) = \alpha^{(1)}(0)s + {}^1/_2\alpha^{(2)}(0)s^2 \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (2.9) с учетом (3.1) получим

$$\overset{*}{\mu}_p = {}^1/_2 p\,[(p-1)(\overset{*}{\mu}_2 - 2\overset{*}{\mu}_1) + 2\overset{*}{\mu}_1] \tag{3.5}$$

$$2\mu_1{}^*\ln(l/r) = 2\varkappa_1 + \varkappa_2, \quad \mu_2{}^*\ln(l/r) = 2(\varkappa_1 + \varkappa_2) \tag{3.6}$$

Из (3.6) видно, что $\mu_2{}^* - 2\mu_1{}^* > 0$, поскольку $\varkappa_2 > 0$. Таким образом, (3.5) дает квадратичную зависимость показателя степени от номера момента, что противоречит условию (2.5), по крайней мере, для достаточно больших p. Это означает, что хотя распределение для коэффициента дробления стремится к логарифмически нормальному, но моменты не стремятся к тем выражениям, которые вытекают из предельного распределения.

Ниже для простоты рассмотрим случай, когда можно пренебречь неоднородностью дробления. В этом случае среднее значение коэффициента дробления равно единице, $\mu_1 = 0$ (2.6). Вместе с тем первая из формул (3.6) в общем случае дает $\mu_1{}^* \neq 0$, поскольку для допредельного распределения не обязано выполняться условие $2\varkappa_1 + \varkappa_2 = 0$.

Таким образом, даже среднее значение коэффициента дробления, рассчитанное по предельному логарифмически нормальному закону, не обязано совпадать с истинным средним. Аналогично, в общем случае, $\mu_2{}^* \neq \mu_2 \equiv \mu$.

Эмпирические данные, приведенные в § 5, показывают, что отклонения от логарифмически нормального закона начинаются уже с момента первого порядка. Однако интерпретация этих данных в терминах коэффициента дробления носит приближенный характер, как объяснено в § 5.

Рассмотрим случай, когда допредельное распределение таково, что $\mu_1{}^* = 0$, $\mu_2{}^* = \mu$. Формула (3.5) при этом дает

$$\overset{*}{\mu}_p = \frac{1}{2}\mu p(p-1), \qquad \overset{*}{\mu}_{p+1} - \overset{*}{\mu}_p = \mu p \tag{3.7}$$

Учитывая значение $\mu \approx 0.4$, видим, что противоречие с ограничением (2.4) возникает, по крайней мере, при $p \geqslant 3$. Указанные здесь обстоя-

[1] Чтобы пояснить доказательство, допустим, что функция $\alpha(s)$ имеет все производные в нуле и разложим эту функцию в ряд. С учетом (2.8), (3.1) и (3.2) имеем

$$\chi(t, l/r) = \exp\{-it\varkappa_1\varkappa_2^{-1/2} - \alpha(t\varkappa_2^{-1/2})\ln(l/r)\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2 - (\ln(l/r))^{-1/2}\sum_{p=3}^{\infty}\frac{\alpha^{(p)}(0)}{p!}t^p(\alpha^{(2)}(0))^{-1/2p}(\ln(l/r))^{1/2(3-p)}\right\} \to$$

$$\xrightarrow[\ln(l/r)\to\infty]{} \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\}$$

На самом деле для доказательства достаточно существования первых двух моментов для логарифма коэффициента дробления.

тельства нужно иметь в виду при учете влияния перемежаемости на структуру поля скорости в рамках идеологии [5, 6, 21], а также в постановке задачи, предложенной в [7,9].

В недавней работе [28] высказано опасение, что известная цепочка уравнений для моментов поля скорости, вытекающая из уравнений гидродинамики, не может служить основой для построения теории турбулентности, поскольку логарифмически нормальное распределение не определяется своими моментами.

Однако проведенное выше рассмотрение показывает (необходимое ограничение (2.5) было получено в [13]), что с уравнениями Фридмана — Келлера все в порядке, хотя здесь и возникает своеобразная ситуация. Истинное распределение однозначно определяется своими моментами, а по предельному логарифмически нормальному распределению нельзя подсчитывать моменты (по крайней мере моменты достаточно высокого порядка).

§ 4. Модель. Чтобы проиллюстрировать сказанное в предыдущих параграфах и дать некоторую ориентировку для сравнения с экспериментальными данными, рассмотрим простейший модельный пример. Именно предположим, что распределение вероятностей для коэффициента дробления, соответствующее изменению масштабов в два раза ($l = 2r$), имеет постоянную плотность

$$W(q, 2) = {}^1/_2\,\theta(q)\,\theta(2-q) \tag{4.1}$$

где $\theta(x)$ — единичная функция, равная нулю при $x < 0$ и единице при $x > 0$ (неоднородность дробления не рассматривается).

Изменение масштаба в два раза выбрано не случайно. Уравнения гидродинамики обладают квадратичной нелинейностью и в спектральном представлении содержат свертку фурье-компонент поля скорости. Благодаря такому виду уравнений энергия, как известно, имеет тенденцию передаваться по спектру каскадным образом с уменьшением масштабов в два раза на каждом этапе, причем в статистически стационарном случае приток и диссипация энергии сбалансированы.

Таким образом, рассматриваемую модель можно интерпретировать как предположение о том, что в элементарном акте каскадного процесса энергия с равной вероятностью дробится на произвольные части. Модель не содержит никаких подгоночных параметров.

Прежде всего подсчитаем для (4.1) величины μ_p в соответствии с определением (2.3)

$$\mu_p = \log_2\left(\frac{1}{2}\int_0^2 q^p dq\right) = p - \log_2(p+1) \tag{4.2}$$

Заметим сразу, что получается значение $\mu_2 \approx 0.41$, соответствующее экспериментальным данным. Далее с учетом (3.5), (3.6) простое вычисление дает

$$\varkappa_1 = \ln 2 - 1, \quad \varkappa_2 = 1, \quad \mu_1^* \approx 0.28, \quad \mu_2^* = 2$$

$$\mu_p^* = \frac{p}{2\ln 2}(p + 2\ln 2 - 2) \tag{4.3}$$

Таким образом, в согласии с тем, что было сказано в конце § 3, моменты предельного логарифмически нормального распределения весьма далеки от истинных моментов (см. таблицу).

Подсчитаем теперь плотность распределения коэффициента дробления $W(q, l/r)$, соответствующую произвольному отношению масштабов l/r. Для этого вначале вычислим характеристическую функцию логарифма коэффициента дробления при $l = 2r$

$$\psi(s, 2) = \frac{1}{2}\int_0^2 \exp\{is \ln q\}\, dq = 2^{is}(1 + is)^{-1}$$

Далее с учетом (2.8) имеем

$$\alpha(s) = -is + \log_2(1 + is)$$

$$\psi(s, l/r) = (1 + is)^{-\log_2(l/r)} \exp[is \ln(l/r)] \qquad (4.4)$$

Заметим, что предельный переход к логарифмически нормальному закону (3.3) в данной модели нетрудно провести непосредственно без ссылок на предельную теорему. Вычисляя преобразование Фурье от (4.4), получим плотность распределения логарифма коэффициента дробления $Q(z, l/r)$, которая связана с искомой плотностью распределения для коэффициента дробления очевидным соотношением $qW(q) = Q(\ln q)$. Окончательно получим

$$W(q, l/r) = \frac{(\ln l/rq)^{\log_2(l/r)-1}}{(l/r)\,\Gamma(\log_2(l/r))}\,\theta(q)\,\theta(l/r - q) \qquad (4.5)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Плотность распределения (4.5) при $l > 2r$ далека от равномерной

$$W(0, l/r) = \infty, \qquad W(l/r, l/r) = 0$$

§ 5. **Сравнение с экспериментальными данными.** Существующий экспериментальный материал по перемежаемости [14–20, 22–25, 29] относится к исследованию самих величин вида (1.1), а не коэффициентов дробления, для которых можно ожидать универсальных законов. При интерпретации этих данных в терминах коэффициента дробления можно использовать предельный переход (1.6), однако при этом, вообще говоря, выйдем за интервал масштабного подобия, так что сравнение с теорией носит ориентировочный характер. Наименее чувствительны к указанной экстраполяции, по-видимому, такие характеристики, как показатели степени моментов различного порядка.

Источник	[14–16, 24]	[17]	[18]	[19]	[20, 29]	(4.2)	(4.3)
μ_2	~0.4	0.35±0.07	0.35	0.51, 0.44	0.5	0.41	2
μ_3	—	1.05±0.21	0.93×	—	—	1	5.2
μ_4	—	2.1±0.42	1.68×	—	—	1.68	9.8

В таблице приведены имеющиеся в настоящее время сведения об этих показателях. Данные в [16–20, 29] относятся к первой из величин (1.1), в [14–15] ко второй и в [24] к последней [1]. Для сравнения указаны значения, даваемые в рассмотренной выше модели (4.2) и соответствующие предельные значения (4.3), отвечающие логарифмически нормальному закону.

---

[1] Вторая из цифр, указанных в [19] для μ_2, получена косвенным путем.

Как видно из таблицы, значение μ_2 можно считать заключенным в пределах $0.35 \div 0.5$, причем даваемое моделью значение 0.41 лежит посредине этого интервала. Заметим, что для разных полей (1.1) параметры μ_p, вообще говоря, могут быть различными.

Высшие моменты ($p = 3{,}4$) величин $y_r(x)$ (1.3) определялись только в работе [17], причем эти данные имеют предварительный характер, поскольку, как указано в [17], записи были короткие ($15 \div 20$ *сек*) и начало записи выбиралось в момент появления больших сигналов. Тем не менее работа [17] является первым свидетельством того, что высшие моменты имеют степенной характер. В таблице приведен диапазон значений μ_p, указанный в [17] и соответствующий трем разным записям.

В работе [18] определялась величина μ_2 обычным образом по спектру и, кроме того, определялись величины $\langle y^p \rangle$ при $p = 1, 2, 3, 4$. В таблице приведены значения μ_3 и μ_4, оцененные следующим образом (что отмечено крестиком):

$$\mu_p = \mu_2 \frac{\ln a_p}{\ln a_2} \; (p = 3, 4), \; a_p \approx \langle y^p \rangle \langle y \rangle^{-p} \tag{5.1}$$

Роль r и l в выражении для моментов (2.3) здесь играют внутренний и внешний масштабы турбулентности. Эти оценки близки к значениям, даваемым моделью.

В [18] подсчитаны также величины $\langle y^p \rangle$ по логарифмически нормальному закону, наиболее близкому (в среднеквадратичном) к эмпирическому распределению. Подставляя эти значения в числитель второй из формул (5.1), получим оценку моментов коэффициента дробления a_p^*, подсчитанных по логарифмически нормальному закону

$$\begin{array}{rcccc} p = 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_p^*/a_p = 1.24 & 2.05 & 5.84 & 35.4 \end{array}$$

Видим, что эти отношения возрастают с увеличением номера момента в согласии с рассмотрением в § 3. Приведенный в [18] эмпирический график обнаруживает существенную кривизну в тех координатах, в которых логарифмически нормальный закон изображается прямой. Аналогичное обстоятельство имеет место и в работах [1] [17, 20, 25, 29].

Кривизну в области малых значений аргумента некоторые экспериментаторы склонны объяснять наличием шумов в аппаратуре. Однако можно думать, что это отклонение от асимптотики существует и помимо шумов. Трудно представить, чтобы плотность распределения угловой скорости вращения жидкой частицы в нуле обращалась в нуль и рядом имела резкий максимум, как это следует из логарифмически нормального закона.

[1] В работе [29] график распределения приведен для случая умеренных чисел Рейнольдса, при этом аномально большим оказалось значение $\mu_2 \approx 0.85$. В таблице приведено значение μ_2, полученное в этой же работе при больших числах Рейнольдса.

Тем более, что условное среднее значение углового ускорения при фиксированной угловой скорости равно нулю [1].

Заметим, что модельная плотность распределения (4.5) в нуле обращается в бесконечность, что не мешает ей стремиться к логарифмически нормальному закону (в интегральном смысле). Что касается области больших значений аргумента, то допредельное распределение обязано здесь отклоняться от логарифмически нормальной асимптотики, в силу ограничения (1.8).

В заключение подсчитаем поправки к законам подобия для структурных функций поля скорости, используя модельное распределение. Согласно [5, 6, 21]

$$\langle [v_r(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - v_r(\mathbf{x})]^p \rangle \sim \langle \varepsilon_r^{1/3p} \rangle r^{1/3p} \sim r^{1/3p - \mu_{1/3p}}$$

где индекс r означает проекцию скорости на направление $\mathbf{r}$. Формула (4.2) дает, в частности

$$\mu_{2/3} \approx -0.07, \qquad \mu_{4/3} \approx 0.11 \tag{5.2}$$

Эти значения можно сравнить с теми, которые получаются из формулы для логарифмически нормального распределения (3.7) (если формально принять, что $\mu_1^* = 0$, $\mu_2^* = \mu$)

$$\mu_{2/3} = -{}^1/_9\mu, \; \mu_{4/3} = {}^2/_9\mu \tag{5.3}$$

Первая из оценок (5.3) была сделана в [21], где при $\mu = 0.4$ получено значение $\mu_{2/3} \approx -0.04$. Поправки к закону ${}^2/_3$ оказываются малыми в обоих случаях. В [20] приведены результаты измерений структурной функции четвертого порядка и обнаружена поправка, совпадающая как с (5.3) (при полученном в [20] значении $\mu \approx 0.5$), так и с (5.2).

Поступила 22 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков Е. А. О спектре энергии турбулентного потока несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 2.
2. Новиков Е. А. Кинетические уравнения для поля вихря. Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 2.
3. Бовшеверов В. М., Гурвич А. С., Зубковский С. Л. Измерение циркуляции в турбулентной атмосфере акустическим методом. Изв. СО АН СССР. Сер. техн. н., 1969, № 13, вып. 3.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, изд. 2. М., Гостехиздат, 1953, стр. 157.
5. Oboukhov A. M. Some specific features of atmospheric turbulence. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, pt. 1.
6. Kolmogorov A. N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds mumber J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, pt. 1.
7. Новиков Е. А. Изменчивость диссипации энергии в турбулентном потоке и распределение энергии по спектру. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
8. Kraichnan R. H. Small — scale structure of a scalar field convected by turbulence. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 5.
9. Келлер Б. С., Яглом А. М. О влиянии флуктуаций диссипации энергии на форму спектра турбулентности в крайней коротковолновой области. Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 3.

[1] О статистическом описании турбулентного поля вихря см. докторскую диссертацию автора «Статистические модели в теории турбулентности». М., 1969.

10. Новиков Е. А., Стюарт Р. У. Перемежаемость турбулентности и спектр флуктуаций диссипации энергии. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1964, № 3.
11. Новиков Е. А. О корреляционных связях высокого порядка в турбулентном потоке. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 8.
12. Новиков Е. А. Математическая модель перемежаемости турбулентного потока. Докл. АН СССР, 1966, т. 168, № 6.
13. Новиков Е. А. Масштабное подобие для случайных полей. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 5.
14. Гурвич А. С., Зубковский С. Л. Об экспериментальной оценке флуктуаций диссипации энергии турбулентности. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963, № 12.
15. Гурвич А. С., Зубковский С. Л. Измерение четвертых и шестых корреляционных моментов градиента скорости. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 8.
16. Понд С., Стюарт Р. У. Измерения статистических характеристик мелкомасштабных турбулентных движений. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 9.
17. Холмянский М. З. Исследование микропульсаций производной скорости ветра в приземном слое атмосферы. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1970, т. 6, № 4.
18. Steward R. W., Wilson J. R., Burling R. W. Some statistical properties of small scale turbulence in an atmospheric boundary layer. J. Fluid Mech., 1970. vol. 41, pt 1.
19. Gibson C. H., Stegen G. R., McConnell S. Measurements of the universal constant in Kolmogoroff's third hypothesis for high Reynolds number turbulence. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 10.
20. Van Atta C. W., Chen W. Y. Structure functions of turbulence in the atmospheric boundary layer over the ocean. J. Fluid Mech., 1970, vol. 44, pt 1.
21. Яглом А. М. О влиянии флуктуаций диссипации энергии на форму характеристик турбулентности в инерционном интервале. Докл. АН СССР, 1966, т. 166, № 1.
22. Гурвич А. С. О распределении вероятностей квадрата разности скоростей в турбулентном потоке. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1966, т. 2, № 10.
23. Гурвич А. С. О распределении вероятностей квадрата разности температур в двух точках турбулентного потока. Докл. АН СССР, 1967, т. 172, № 3.
24. Gurvich A. S., Yaglom A. M. Breakdown of eddies and probability distributions for small — scale turbulence. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 9, pt 2.
25. Gibson C. H., Stegen G. R., Williams R. B. Statistics of the fine structure of turbulent velocity and temperature fields measured at high Reynolds number. J. Fluids. Mech., 1970, vol. 41, pt 1.
26. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М., «Наука», 1967.
27. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей, изд. 3. М., Физматгиз, 1961.
28. Orszag S. A. Indeterminacy of the moment problem for intermittent turbulence. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 9.
29. Wyngaard J. C., Tennekes H. Measurements of the small — scale structure of turbulence at moderate Reynolds numbers. Phys. Fluids, vol. 13, No. 8, 1970.