Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

О МАССО- И ТЕПЛООБМЕНЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. П. Гупало, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Получено приближенное решение задачи о массо- и теплообмене движущейся твердой сферической частицы при малых конечных значениях чисел Пекле и Рейнольдса. Рассмотрен случай произвольной скорости химической реакции первого порядка на поверхности частицы. Задача решается методом сращивания асимптотических разложений по числу Пекле. Построено поле концентрации и температуры и найден полный поток вещества и тепла на поверхности частицы.

Основным уравнением в задаче является уравнение конвективной диффузии или теплопроводности, в котором поле скоростей вязкого обтекания считается известным из решения соответствующей гидродинамической задачи. Аналогичными уравнениями описывается также перенос мелких аэрозольных частиц, обусловленный броуновским движением.

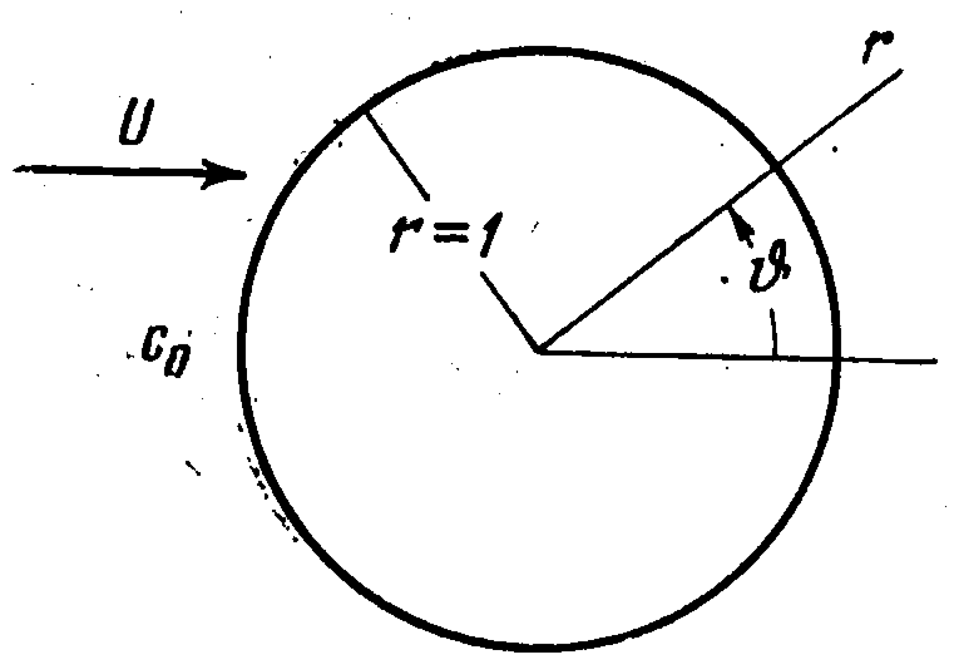
Диффузионный поток на сферическую частицу в условиях стоксова течения, т. е. при числах Рейнольдса $R \to 0$, в приближении диффузионного пограничного слоя рассчитан В. Г. Левичем [1]. В работе [2] вместо стоксова распределения скоростей использовано решение, полученное в [3] методом сращивания асимптотических разложений, и в приближении диффузионного пограничного слоя найдено аналитическое выражение для диффузионного потока на сферу при конечных числах Рейнольдса, при $R \to 0$ совпадающее с результатом работы [1]. Сравнение результатов [2] с численным решением задачи [4] показывает, что аналитическое решение хорошо совпадает с точным решением до $R \approx 10$.

Приближение диффузионного пограничного слоя ограничивает область применимости результатов [1,2,4] числами Пекле $P \gg 1$. Попытки решения задачи при малых конечных числах Пекле предпринимались неоднократно. Однако лишь в [5] было получено решение методом сращивания асимптотических разложений по числу Пекле для стоксова течения. Там же приведены ссылки на более ранние работы, результаты которых оказались ошибочными. В силу принятых допущений полученные в [5] результаты справедливы для чисто диффузионного режима при числах Рейнольдса $R \to 0$.

В данной работе задача о диффузии к сферической частице при конечных числах Пекле обобщена на случай конечных чисел Рейнольдса и химической реакции на поверхности частицы. Расширение диапазона чисел Рейнольдса достигнуто использованием для поля скоростей выражений [3], описывающих обтекание сферической частицы при конечных R. Попытка решения задачи в частном случае бесконечно большой скорости химической реакции содержится также в работе [6], однако вследствие ошибки, допущенной автором при сращивании, полученные в ней результаты неверны.

1. Постановка задачи. Метод решения. Рассматривается установившийся процесс диффузии в потоке вязкой несжимаемой жидкости, обтекающей жесткую сферическую частицу радиусом a. На большом расстоянии от сферы скорость потока равна U, концентрация диффундирующей компоненты — c_0.

В окрестности сферы скорость потока и концентрация диффундирующего вещества изменяются: скорость — из-за возмущающего действия сферы, концентрация — из-за поглощения вещества на ее поверхности. Поле скоростей считается известным из решения соответствующей гидродинамической задачи; определение поля концентраций и наиболее важной его характеристики — потока вещества на сферу — является целью данной работы.



Фиг. 1

Запишем уравнение конвективной диффузии применительно к рассматриваемой задаче, воспользовавшись безразмерными переменными и системой координат, показанной на фиг. 1

$$\Delta\xi = \frac{P\partial(\psi, \xi)}{r^2\partial(r, \mu)}, \quad \xi = \frac{c_0 - c}{c_0}, \quad P = \frac{Ua}{D} \quad (\mu = \cos\theta) \tag{1.1}$$

Здесь r — безразмерная радиальная координата, отнесенная к радиусу частицы, θ — угловая координата, Δ — осесимметричный сферический оператор Лапласа, D — коэффициент диффузии, ψ — безразмерная функция тока, c — концентрация диффундирующего вещества. Граничные условия имеют вид:

на бесконечности

$$r \to \infty, \qquad \xi \to 0 \tag{1.2}$$

на поверхности сферы

$$r = 1, \quad \partial\xi \,/\, \partial r = k\,(\xi - 1), \quad k = ak_* D^{-1} \tag{1.3}$$

где k_* — константа скорости химической реакции на поверхности частицы.

При записи условия (1.3) предполагается, что поглощение вещества сферой обусловлено поверхностной химической реакцией первого порядка. При $k \to \infty$ условие (1.3) принимает вид $\xi\,(1) = 0$ и соответствует диффузионному режиму поглощения вещества, осаждению аэрозольных частиц, а также теплообмену потока со сферой, температура которой T_1 поддерживается постоянной (в последнем случае под D следует подразумевать коэффициент температуропроводности, а под ξ — отношение $(T - T_0) \times (T_1 - T_0)^{-1}$, где T — температура потока, T_0 — температура на бесконечности).

Если функция тока $\psi = \psi\,(r, \mu)$ известна, то уравнение (1.1) с условиями (1.2), (1.3) полностью определяет распределение концентрации в потоке. Точное решение задачи (1.1) — (1.3) невозможно, даже если в качестве распределения скоростей вязкого обтекания сферы принять простейшее из известных приближенных решений — решение Стокса. Ниже приближенное аналитическое решение (1.1) — (1.3) будет найдено методом сращивания асимптотических разложений по числу P во внутренней ($1 < r < P^{-1}$) и внешней ($P^{-1} < r < \infty$) зонах течения. Основные особенности метода применительно к ряду задач газо- и гидродинамики описаны в работе [7]. В качестве распределений скоростей во внутренней и внешней зонах будут использоваться решения, полученные в [3] методом сращивания асимптотических разложений (см. также [8]).

Будем искать внутреннее и внешнее разложения соответственно в виде

$$\xi_* = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(P)\,\xi_n(r,\mu) \tag{1.4}$$

$$\xi^* = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{(n)}(P)\,\xi^{(n)}(\rho,\mu) \tag{1.5}$$

Здесь относительно функций α_n (P) и $\alpha^{(n)}(P)$ предполагается лишь, что

$$\frac{\alpha_{n+1}(P)}{\alpha_n(P)} \to 0, \qquad \frac{\alpha^{(n+1)}(P)}{\alpha^{(n)}(P)} \to 0 \quad \text{при} \quad P \to 0$$

Члены разложения (1.4) последовательно определяются путем решения уравнения (1.1) с граничным условием (1.3). При этом поле скоростей в (1.1) задается трехчленным внутренним разложением функции тока [3]

$$\psi_* = \frac{1}{4}(r-1)^2(1-\mu^2)\left[\left(1+\frac{3}{8S}P+\frac{9}{40S^2}P^2\ln P\right)\left(2+\frac{1}{r}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{3}{8S}P\left(2+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\mu\right]+O(P^2)\left(S=\frac{\nu}{D}\right) \tag{1.6}$$

Здесь S — число Шмидта, ν — коэффициент кинематической вязкости,

Внешнее разложение (1.5) определяется из уравнения (1.1), в котором функция тока ψ задается двучленным внешним разложением [3], и условия (1.2). Введя сжатую радиальную координату $\rho = rP$ и $\psi^* = \psi P^2$. запишем (1.1), (1.2) в виде

$$\Delta^*\xi^* = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\psi^*,\xi^*)}{\partial(\rho,\mu)}, \quad \rho\to\infty, \quad \xi^*\to 0$$

$$\psi^* = \frac{1}{2}\rho^2(1-\mu^2) - \frac{3}{2}SP(1+\mu)\left[1-\exp\left(-\frac{\rho}{S}\frac{1-\mu}{2}\right)\right]+O(P^2) \tag{1.7}$$

Здесь Δ^* — осесимметричный сферический оператор Лапласа, получающийся из Δ заменой r на ρ.

Возникающие при решении задач (1.1), (1.3), (1.6) и (1.7) произвольные константы определяются в результате сращивания внутреннего (1.4) и внешнего (1.5) разложений.

2. Нулевое приближение. Построение решения начинается с определения нулевого члена внешнего разложения (1.5). В данном случае, очевидно, задаче (1.7) удовлетворяет решение

$$\xi^{(0)} = 0 \tag{2.1}$$

Найдем нулевой член внутреннего разложения (1.4). Из (1.1), (1.3), (1.6) при $P = 0$ имеем

$$\Delta\xi_0 = 0, \quad r = 1, \quad \partial\xi_0/\partial r = k(\xi_0 - 1) \tag{2.2}$$

Общее решение задачи (2.2) можно представить в виде

$$\xi_0 = \frac{q}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(r^n + \frac{n-k}{n+1+k}\,r^{-n-1}\right)P_n(\mu), \quad q = \frac{k}{k+1} \tag{2.3}$$

Выражение (2.3) содержит произвольные константы a_n, которые должны быть определены сращиванием (2.3) с (2.1). Для сращивания внешнее решение должно быть разложено в ряд по ρ. Затем значение констант устанавливается из требования соответствия поведения членов полученного ряда при $\rho \to 0$ и членов разложения (2.3) при $r \to \infty$. Для нулевых приближений сращивание тривиально; получим $a_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Следовательно

$$\xi_0 = qr^{-1} \tag{2.4}$$

3. Первое приближение. Определим сначала явный вид коэффициента $\alpha^{(1)}(P)$ во внешнем разложении. Для этого в решении (2.4) перейдем к внешней переменной. Тогда из (2.4) следует, что $\alpha^{(1)} = P$, поэтому первое приближение для внешнего разложения следует искать в виде

$$\xi^{*(1)} = P\xi^{(1)} \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (1.7) и удерживая слагаемые порядки P, получим

$$\Lambda\xi^{(1)} = 0, \qquad \Lambda = \Delta^* - \mu\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1-\mu^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\mu}, \qquad \rho \to \infty, \quad \xi^{(1)} \to 0 \tag{3.2}$$

Общее решение задачи (3.2) имеет вид

$$\xi^{(1)} = \exp\frac{\rho\mu}{2}\left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} A_n K_{n+1/2}({}^1/_2\rho)\, P_n(\mu)$$
$$K_{n+1/2}({}^1/_2\rho) = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{1/2}\exp\frac{-\rho}{2}\sum_{m=0}^{n}\frac{(n+m)!}{(n-m)!\, m!\rho^m} \tag{3.3}$$

Здесь $K_{n+1/2}$ — функция Макдональда. Константы A_n должны быть определены в результате сращивания, которое в данном случае заключается в сравнении поведения функции (3.1) при $\rho \to 0$ и функции (2.4) при $r \to \infty$. Нетрудно установить, что $A_0 = q\pi^{-1}$, $A_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Следовательно

$$\xi^{(1)} = q\rho^{-1}\exp\left[{}^1/_2\rho\,(\mu - 1)\right] \tag{3.4}$$

Найдем первое приближение для внутреннего разложения. Для этого перейдем в выражении для функции $\xi^{*(1)}$ к внутренней переменной r и представим $\xi^{*(1)}$ в виде ряда по P. Тогда из (3.1) и (3.4) найдем, что $\alpha_1(P) = P$. Следовательно, первое приближение для внутреннего разложения следует искать в виде

$$\xi_{*1} = \xi_0 + P\xi_1 \tag{3.5}$$

Подставив (3.5) в (1.1) и (1.3) с учетом (1.6) и сохранив члены порядка P, получим уравнение и граничное условие для ξ_1

$$\Delta\xi_1 = -\frac{q}{r^2}\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right)\mu \tag{3.6}$$

$$r = 1, \qquad \partial\xi_1 / \partial r = k\xi_1 \tag{3.7}$$

Решение уравнения (3.6) может быть представлено в виде

$$\xi_1 = q\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4r} - \frac{1}{8r^3}\right)\mu + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n-1}) P_n(\mu) \tag{3.8}$$

Граничное условие (3.7) позволяет установить линейные соотношения между постоянными a_n и b_n

$$\begin{gathered}(1-k)\,a_1 + {}^3/_8 q\,(k+3) = (2+k)\,b_1\\ (n-k)\,a_n = (n+1+k)\,b_n \qquad (n=0,2,3,\ldots)\end{gathered} \tag{3.9}$$

Для определения явного выражения коэффициентов в (3.8) произведем сращивание выражений (3.5) при $r \to \infty$ и (3.1) при $\rho \to 0$. Используя (3.4), (3.8) и (3.9), получим

$$\begin{gathered}a_0 = -{}^1/_2 q, \quad b_0 = {}^1/_2 q^2, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = {}^3/_8\,(k+3)\,(k+2)^{-1} q\\ a_n = b_n = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots)\end{gathered}$$

Следовательно

$$\xi_1 = -\frac{q}{2} + \frac{q^2}{2r} + q\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4r} + \frac{3}{8}\,\frac{k+3}{k+2}\,\frac{1}{r^2} - \frac{1}{8r^3}\right)\mu \tag{3.10}$$

4. Второе приближение для внешнего разложения. Двучленное внутреннее разложение ξ_{*1} во внешних переменных на основании (3.5), (2.4) и (3.10) имеет вид

$$\xi_{*1} = P\frac{q}{\rho} - Pq\frac{1-\mu}{2} + P^2\frac{q}{4\rho}(2q - 3\mu) + \ldots \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует, что $\alpha^{(2)}(P) = P^2$. Подставляя трехчленное внешнее разложение

$$\xi^{*(2)} = \xi^{(0)} + P\xi^{(1)} + P^2\xi^{(2)},$$

где $\xi^{(0)}$ и $\xi^{(1)}$ определяются формулами (2.1) и (3.4), в (1.7), получим для $\xi^{(2)}$

$$\begin{gathered}\Lambda\xi^{(2)} = \frac{3}{4}\frac{qS}{\rho^3}\left(\frac{S+1}{S} + \frac{2}{\rho} - \frac{S-1}{S}\mu\right)\exp\left(\rho\frac{S+1}{S}\frac{\mu-1}{2}\right) - \\ - \frac{3}{4}\frac{qS}{\rho^3}\left(1 + \frac{2}{\rho} - \mu\right)\exp\left(\rho\frac{\mu-1}{2}\right)\\ \rho \to \infty, \qquad \xi^{(2)} \to 0\end{gathered} \tag{4.2}$$

При решении задачи (4.2) используется замена

$$\xi^{(2)}(\rho, \mu) = \exp({}^1/_2\rho\mu)\,\xi'^{(2)}(\rho, \mu)$$

В результате уравнение (4.2) сводится к неоднородному уравнению Гельмгольца. Правая часть этого уравнения разлагается в ряд по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$ и решение его отыскивается также в виде ряда по $P_n(\mu)$.

После вычислений получим

$$\xi^{(2)}(\rho,\mu)=q\rho^{-1/2}\exp\left(\frac{\rho\mu}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n(\rho)P_n(\mu)$$

$$\eta_n(\rho)=K_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right)\int_{\rho}^{c_n}I_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right)L_n(\rho)\,d\rho-I_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right)\int_{\rho}^{\infty}K_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right)L_n(\rho)\,d\rho$$

$$L_n(\rho)=-\frac{3}{2}S\rho^{-5/2}\exp\left(-\frac{\rho}{2}\right)\left[\left(1+\frac{\rho}{2}\right)\delta_{n0}-\frac{\rho}{2}\delta_{n1}\right]+ \tag{4.3}$$

$$+\frac{3(2n+1)}{2}\pi^{1/2}S^{3/2}\rho^{-3}\exp\left(-\rho\frac{S+1}{2S}\right)\left[\left(1+\rho\frac{S+1}{2S}-nS+n\right)I_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2S}\right)-\right.$$

$$\left.-\rho\frac{S-1}{2S}I_{n+3/2}\left(\frac{\rho}{2S}\right)\right]$$

$$\delta_{ni}=\begin{cases}0, & n\neq i\\ 1, & n=i\end{cases}$$

Здесь $I_{n+1/2}$ — модифицированная функция Бесселя.

Постоянные C_n определяются путем сращивания решения $\xi^{*(2)}(\rho,\mu)$ с (4.1). Для этого необходимо разложить функцию $\xi^{(2)}(\rho,\mu)$ ь ряд по малым ρ. При записи ряда используется разложение функции $\eta_n(\rho)$ в ряд по ρ, которое имеет вид

$$\eta_n(\rho)=A_nK_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right)+\rho^{1/2}\sum_{i=0}^{2}\delta_{ni}R_i(\rho)+O(\rho^{3/2})$$

$$R_0(\rho)=\frac{f(S)}{\rho}-\frac{\ln\rho}{2}+\frac{f(S)}{2}+\frac{\ln S}{2}+\frac{7}{6}-\frac{\gamma}{2} \tag{4.4}$$

$$R_1(\rho)=-\frac{3}{4\rho}+\frac{3}{16S}-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{20S}-\frac{1}{40S^2}\right)\rho\ln\rho$$

$$R_2(\rho)={}^1/_{24}-{}^1/_{16}\,S^{-1}$$

$$f(S)=-{}^1/_4S^2+{}^1/_8S+{}^1/_4(S+1)^2(S-2)\ln(1+S^{-1})-{}^1/_2\ln S$$

Здесь A_n—новые постоянные, однозначным образом связанные с C_n, $\gamma=0{,}577215\ldots$ — постоянная Эйлера. Ряд (4.4) можно неограниченно продолжить; однако выписанных выше членов достаточно для проведения сращивания.

После сращивания $\xi^{*(2)}(\rho,\mu)$ с $\xi_{*1}(r,\mu)$ найдем постоянные A_n

$$A_0=\pi^{-1/2}[{}^1/_2q-f(s)],\qquad A_n=0\quad(n\geqslant 1) \tag{4.5}$$

При этих значениях A_n внешнее асимптотическое разложение сращивается с внутренним с точностью до членов порядка P^2. Явное выражение для асимптотики функции $\xi^{(2)}(\rho,\mu)$ имеет вид

$$\xi^{(2)}(\rho,\mu)=\frac{q}{2\rho}\left(q-\frac{3}{2}\mu\right)-\frac{q}{2}\ln q+q\zeta(q,S)+ \tag{4.6}$$

$$+\frac{q}{4}\left[1+\frac{3}{4S}-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5S}-\frac{1}{10S^2}\right)\rho\ln\rho\right]\mu-\frac{5q}{24}\left(1+\frac{3}{10S}\right)\frac{3\mu^2-1}{2}+O(\rho)$$

$$\zeta(q,S)=-{}^1/_4S^2+{}^1/_8S+{}^{25}/_{24}-{}^1/_4q-{}^1/_2\gamma+{}^1/_4(S+1)^2(S-2)\ln(1+S^{-1})$$

5. Второе и третье приближения для внутреннего разложения. Из формулы (4.6) видно, что во втором приближении для внешнего разложения наряду со степенной особенностью появляется логарифмическая. Это расщепление особенностей имеет место и в гидродинамической задаче об обтекании тела. Каждая из особенностей порождает соответствующий член во внутреннем разложении. При этом оказывается возможным определить сразу два последовательных приближения для внутреннего разложения. Ниже будет видно, что расщепление особенностей сохраняется и на последующих этапах решения. Переходя в (4.6) к внутренней переменной, определим коэффициент $\alpha_2(P)$ во внутреннем разложении (1.4), получим

$$\alpha_2(P) = P^2 \ln P \tag{5.1}$$

Из (1.1), (1.3) найдем, что функция $\xi_2(r, \mu)$ удовлетворяет уравнению Лапласа с однородным граничным условием

$$\Delta\xi_2 = 0, \quad r = 1, \quad \partial\xi_2 / \partial r = k\xi_2 \tag{5.2}$$

Общее решение задачи (5.2) имеет вид

$$\xi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(r^n + \frac{n-k}{n+1+k} \frac{1}{r^{n+1}}\right) P_n(\mu)$$

Постоянные a_n определяются путем сращивания $\xi_{*2}(r, \mu)$ при $r \to \infty$ с $\xi^{*(2)}(\rho, \mu)$ при $\rho \to 0$. Находим

$$a_0 = -{}^1/_2 q, \qquad a_r = 0 \qquad (n \geqslant 1)$$

Таким образом

$$\xi_2 = {}^1/_2 q\,(qr^{-1} - 1) \tag{5.3}$$

Как следует из (4.6), третье приближение для внутреннего разложения должно иметь порядок

$$\alpha_3(P) = P^2 \tag{5.4}$$

Функция $\xi_3(r, \mu)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\xi_3 = q \sum_{n=0}^{2} Z_n(r) P_n(\mu)$$

$$Z_0(r) = \frac{1}{3r} - \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{48} \frac{23+7k}{2+k} \frac{1}{r^4} + \frac{1}{8r^5} - \frac{3}{16} \frac{3+k}{2+k} \frac{1}{r^6} + \frac{1}{12r^7}$$

$$Z_1(r) = \left(\frac{q}{4} + \frac{3}{16S}\right)\left(-\frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} - \frac{1}{r^5}\right)$$

$$Z_2(r) = -\frac{1}{3r} + \frac{5}{4r^2} - \frac{3}{8} \frac{12+5k}{2+k} \frac{1}{r^3} + \frac{5}{48} \frac{35+13k}{2+k} \frac{1}{r^4} - \frac{5}{16r^5} - \frac{3}{16} \times$$

$$\times \frac{3+k}{2+k} \frac{1}{r^6} + \frac{5}{48r^7} + \frac{3}{16S}\left(\frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^5} + \frac{1}{r^6}\right) \tag{5.5}$$

Граничное условие

$$r = 1, \quad \partial\xi_3 / \partial r = k\xi_3 \tag{5.6}$$

Общее решение уравнения (5.5) имеет вид

$$\xi_3 = q\sum_{n=0}^{\infty}[\xi_{3,n}(r) + a_n r^n + b_n r^{-n-1}]\,P_n(\mu)$$

$$\xi_{3,0}(r) = \frac{r}{6} - \frac{\ln r}{2} + \frac{7k+23}{k+2}\frac{1}{96r^2} + \frac{1}{48r^3} - \frac{k+3}{k+2}\frac{1}{64r^4} + \frac{1}{240r^5}$$

$$\xi_{3,1}(r) = \left(q + \frac{3}{4S}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8r} - \frac{1}{16r^3}\right)$$

$$\xi_{3,2}(r) = \frac{r}{12} - \frac{5}{24} + \frac{5k+12}{k+2}\frac{1}{16r} - \frac{13k+35}{k+2}\frac{5}{192r^2} + \frac{\ln r}{16r^3} - \frac{k+3}{k+2}\times$$

$$\times\frac{1}{32r^4} + \frac{5}{672r^5} + \frac{3}{16S}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2r} - \frac{1}{4r^2} + \frac{\ln r}{5r^3} + \frac{1}{6r^4}\right)$$

$$\xi_{3,n}(r) \equiv 0, \qquad n \geqslant 3 \tag{5.7}$$

В силу граничного условия (5.6) постоянные a_n и b_n связаны линейной зависимостью

$$(n-k)\,a_n + \xi_{3,n}'(1) - k\xi_{3,n}(1) = (n+1+k)\,b_n \tag{5.8}$$

Для определения a_n и b_n необходимо провести сращивание внутреннего и внешнего асимптотических разложений. Для этого перейдем в (5.7) к внешней переменной. Учитывая (1.4), (4.1), (5.1), (5.3), (5.4), (5.7), (5.8), получим

$$\xi_{*3} = q\sum_{n=2}^{\infty} a_n\rho^n P_n(\mu)\,P^{-n+2} + q\left[\rho^{-1} - {}^1/_2 + \frac{\rho}{6} + ({}^1/_2 + a_1\rho)\,P_1(\mu) + {}^1/_{12}\rho P_2\times\right.$$

$$\left.\times(\mu)\right]P + q\left[\frac{q}{2\rho} - \frac{\ln\rho}{2} + a_0 + \frac{1}{4}\left(q + \frac{3}{4S}\right)P_1(\mu) - \left(\frac{5}{24} + \frac{1}{16S}\right)P_2(\mu)\right]\times$$

$$\times P^2 + \frac{q^2}{2\rho}P^3\ln P + O(P^3) \tag{5.9}$$

Из (5.9) видно, что внутреннее разложение ξ_{*3} сращивается с точностью до членов порядка P^2 с внешним разложением $\xi^{*(2)}$, определяемым формулами (1.5), (3.1), (3.4), (4.3), если константы a_n равны

$$a_0 = \zeta(q, S), \quad a_1 = -{}^1/_4, \quad a_n = 0 \qquad (n \geqslant 2) \tag{5.10}$$

Постоянные b_n найдем при помощи соотношений (5.7), (5.8), (5.10); получим

$$b_0 = -q\zeta(q, S) - \frac{239}{960} - \frac{79}{240}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{32}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$b_1 = \frac{7}{16} + \frac{9}{64S}\left(1 + \frac{1}{k+2}\right) - \frac{3}{4}\frac{1}{k+2} - \frac{3}{8}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$b_2 = \frac{235}{1344} - \frac{1}{64S}\left(1 + \frac{13}{5}\frac{1}{k+3}\right) + \frac{3}{14}\frac{1}{k+3} + \frac{3}{16}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$b_n = 0 \qquad (n \geqslant 3) \tag{5.11}$$

Функция $\xi_3(r, \mu)$ полностью определяется формулами (5.7), (5.10), (5.11).

6. Приближения высшего порядка. Из (5.9) следует, что

$$\alpha^{(3)} = P^3 \ln P \tag{6.1}$$

Подстановка ряда (1.5) в соотношения (1.7) с учетом формул (2.1) и (6.1) приводит к выводу, что искомая функция $\xi^{(3)}(\rho, \mu)$ удовлетворяет тому же уравнению и граничному условию (3.2), что и функция $\xi^{(1)}(\rho, \mu)$. Следовательно, эти функции совпадают с точностью до множителя, величина которого определяется сращиванием $\xi^{*(3)}(\rho, \mu)$ с (5.9). Используя формулу (3.4), после сращивания получим

$$\xi^{(3)} = \frac{q^2}{2\rho} e^{1/2\rho(\mu-1)} \tag{6.2}$$

Из (6.1) и (6.2) следует, что

$$\alpha_4 = P^3 \ln P \tag{6.3}$$

После подстановки ряда (1.4) в (1.1), (1.3) с учетом (1.6) получим уравнение и граничное условие для ξ_4

$$\Delta\xi_4 = -\left(\frac{q}{2} + \frac{9}{40S^2}\right)\frac{q}{r^2}\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right)\mu \tag{6.4}$$

$$r = 1, \quad \partial\xi_4 / \partial r = k\xi_4 \tag{6.5}$$

Уравнение (6.4) отличается от (3.6) лишь множителем в правой части, а граничные условия (6.5) и (3.7) совпадают. Поэтому, используя (3.8), (3.9), для ξ_4 найдем

$$\xi_4 = a_0 - \frac{qa_0}{r} + \left[a_1 r + \frac{q}{2}\left(\frac{q}{2} + \frac{9}{40S^2}\right)\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{3}{4}\frac{k+3}{k+2}\frac{1}{r^2} - \frac{1}{4r^3}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{k}{k+2}\frac{a_1}{r^2}\right]\mu + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(r^n + \frac{n-k}{n+1+k} r^{-n-1}\right) P_n(\mu) \tag{6.6}$$

Постоянные a_n определяются сращиванием разложений ξ_{*4} и $\xi^{*(3)}$. Переходя в (6.6) к внешней переменной, после сращивания получим

$$a_0 = -{}^1/_4 q^2, \quad a_n = 0 \quad (n \geqslant 1) \tag{6.7}$$

Из изложенного выше видно, что нахождение третьего приближения для функции $\xi^*(\rho, \mu)$ и четвертого для $\xi_*(r, \mu)$ не связано с громоздкими выкладками благодаря появлению логарифмической особенности. Очевидно, что отыскание приближений более высокого порядка будет сопряжено с большими по объему вычислениями. При этом задача осложнится необходимостью предварительного определения высших членов внутреннего и внешнего асимптотических разложений функции тока, что представляет собой самостоятельную проблему. Ограничимся здесь лишь указанием на то, что, как вытекает из (1.6), (1.7), (5.9), (6.2), (6.3), (6.6), следующие приближения для $\xi^*(\rho, \mu)$ и $\xi_*(r, \mu)$ должны иметь порядок

$$\alpha^{(4)}(P) = \alpha_5(P) = P^3 \tag{6.8}$$

Кроме того, как видно из (6.2) и (6.6), функция $\xi_5(r, \mu)$ будет содержать члены вида $^9/_{80}\,\mu q S^{-2}\ln r$, что приведет к полному сращиванию $\xi_{*5}(r, \mu)$ с $\xi^{*(4)}(\rho, \mu)$.

7. Поле концентраций (температур). Поток вещества (тепла) на поверхность частицы. Резюмируя полученные выше результаты, запишем выражения для распределения концентрации (температуры) в потоке, обтекающем сферу.

Вдали от сферы (внешнее асимптотическое разложение) имеем

$$\xi^* = \frac{q}{\rho} e^{1/2\rho(\mu-1)}\left(P + \frac{q}{2}P^3\ln P\right) + \xi^{(2)}P^2 + O(P^3) \qquad (7.1)$$

Здесь функция $\xi^{(2)} = \xi^{(2)}(\rho, \mu)$ определяется формулой (4.6).

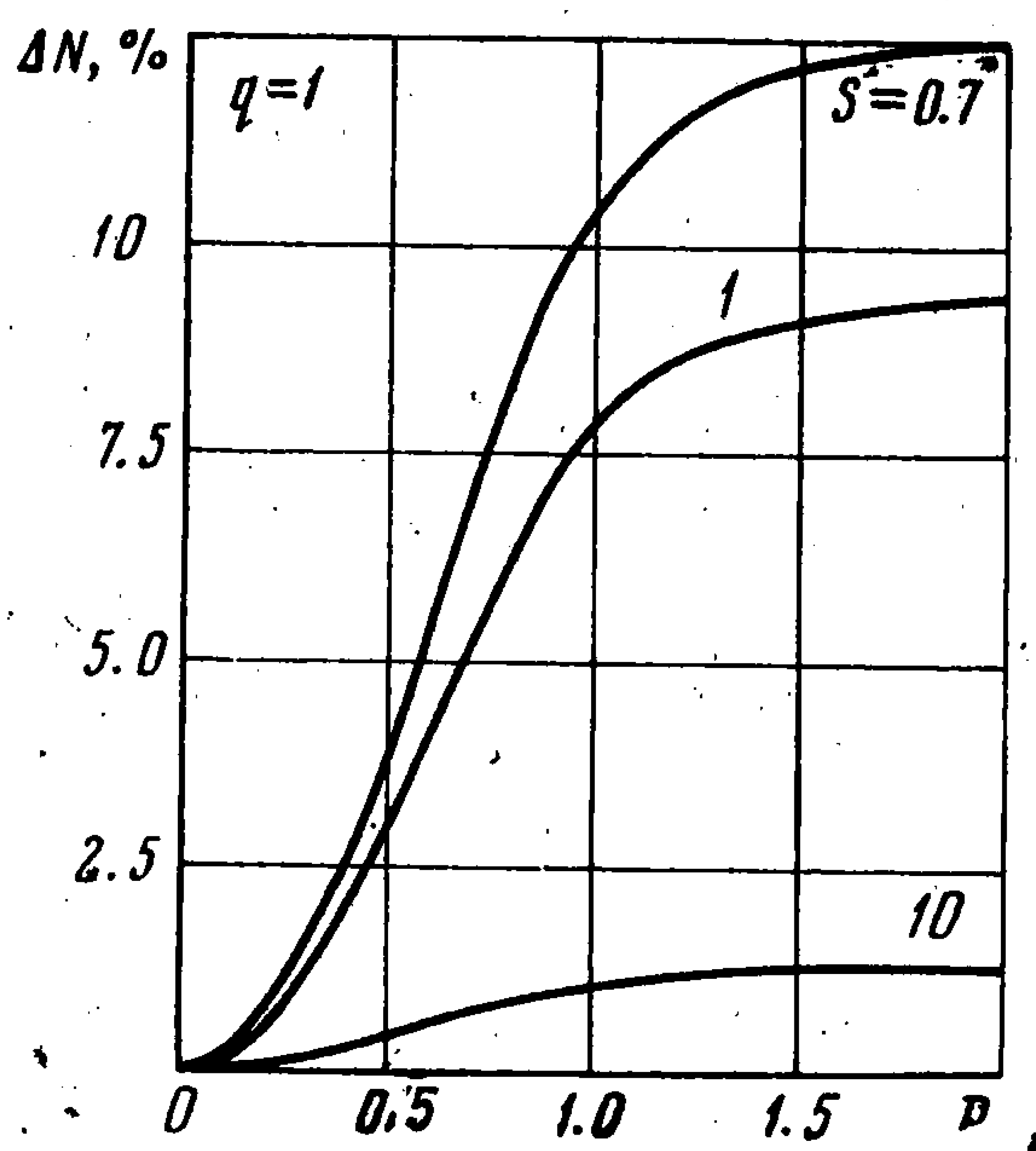
Вблизи сферы (внутреннее асимптотическое разложение) имеем

$$\xi_* = \frac{q}{r} + \frac{q}{2}\left(\frac{q}{r} - 1\right)\left(P + P^2\ln P + \frac{q}{2}P^3\ln P\right) + \frac{q}{2}\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{3}{4}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{k+3}{k+2}\frac{1}{r^2} - \frac{1}{4r^3}\right)\mu\left[P + \left(\frac{q}{2} + \frac{9}{40S^2}\right)P^3\ln P\right] + q\left[\xi_{3,0} + \zeta + \frac{b_0}{r} + \right.$$

$$\left. + \left(\xi_{3,1} - \frac{r}{4} + \frac{b_1}{r^2}\right)\mu + \left(\xi_{3,2} + \frac{b_2}{r^2}\right)\frac{3\mu^2 - 1}{2}\right]P^2 + O(P^3) \qquad (7.2)$$

Здесь $\xi_{3,n}$ и b_n определяются формулами (5.11). Заметим, что в частном случае $k \to \infty$, $S \to \infty$ $(R \to 0)$ выражения (7.1) и (7.2) совпадают с полученными в [5].



Фиг. 2

Теплообмен (массообмен) частицы со средой обычно характеризуется числом Нуссельта N. Приняв за характерный размер диаметр частицы, определим число Нуссельта

$$N = -\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial \xi_*}{\partial r}\right)_{r=1} d\mu \qquad (7.3)$$

После интегрирования найдем

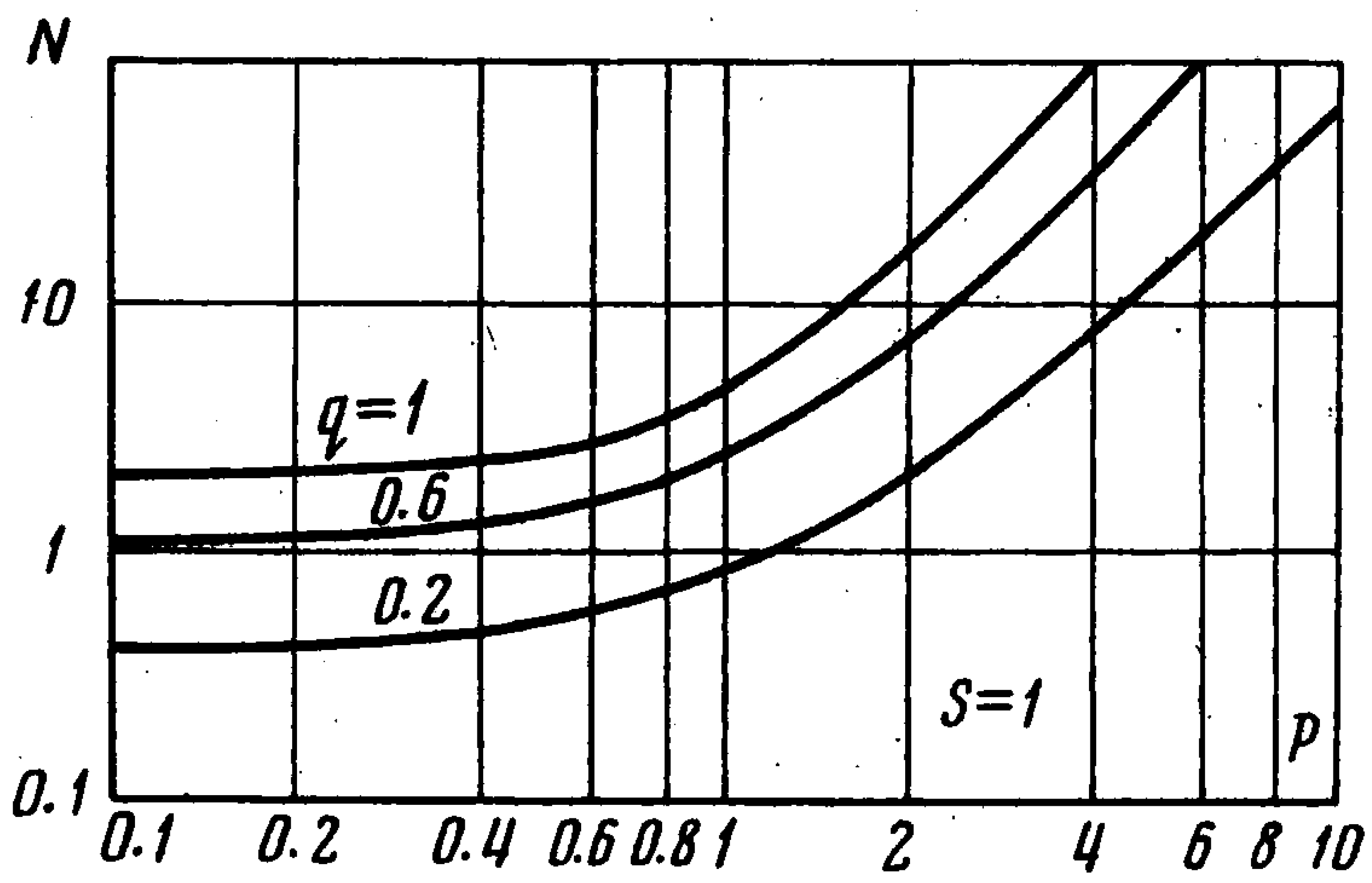
$$N = 2q + q^2(P + P^2\ln P + {}^1/_2 qP^3\ln P) + qQ(q, S)P^2 + O(P^3) \qquad (7.4)$$

$$Q(q, S) = {}^1/_2q^2 - {}^{119}/_{80}q + {}^3/_{32} + \gamma - {}^3/_{16}(2 - q)^{-1} + $$

$$+ {}^1/_2S^2 - {}^1/_4S - {}^1/_2(S + 1)^2(S - 2)\ln(1 + S^{-1})$$

Полученный результат свидетельствует о существенной зависимости полного потока вещества (тепла) на поверхность частицы от числа Рейнольдса. На фиг. 2 показано относительное приращение числа Нуссельта $\Delta N = N(S, P)N^{-1}(\infty, P) - 1$, обусловленное конечностью R, при $q = 1$ и разных числах S и P. Видно, например, что при $S \leqslant 0.7$, $P \geqslant 1$ это приращение превышает 10%. Влияние скорости реакции на число Нуссельта показано на фиг. 3 при $S = 1$ и разных числах Рейнольдса.

В заключение отметим, что полученные выше результаты справедливы при любых скоростях реакции на поверхности частицы (любые значения q в области $0 \leqslant q \leqslant 1$) и любых не малых значениях числа Шмидта S (случай $S \ll 1$ практически мало интересен). Очевидно, что метод сра-



Фиг. 3

щиваемых асимптотических разложений не позволяет установить допустимый верхний предел чисел Пекле. Решить этот вопрос может только сравнение с экспериментом.

Поступила 9 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика, изд. 2. М., Физматгиз, 1959.
2. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. Диффузия к твердой сферической частице в потоке вязкой жидкости при конечных числах Рейнольдса. Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 6.
3. Proudman I., Pearson J. R. A. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, p 3, pp. 237—262 (Рус. перев.: Разложения по малым числам Рейнольдса в задачах обтекания сферы и кругового цилиндра. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1958, № 2, стр. 3—28.).
4. Волощук В. М., Стужнева Л. В. Диффузионный поток на сферу при малых и средних числах Рейнольдса. Приближение диффузионного пограничного слоя. ПМТФ, 1970, № 2.
5. Acrivos A., Taylor T. D. Heat and mass transfer from single spheres in Stokes flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 4, pp. 378—394.
6. Rimmer P. L. Heat transfer from a sphere in a stream of small Reynolds number, J. Fluid Mech., 1968, vol. 32, pt 1, pp. 1—7.
7. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
8. Kaplun S., Lagerstrom P. A. Asymptotic expansions of Navier-Stokes solutions for small Reynolds numbers. J. Math. Mech., 1957, vol. 6, p. 585.