

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ В ПЛОСКОЙ ТЕРМОДИФФУЗИОННОЙ КОЛОННЕ

Б. И. Николаев, А. А. Тубин

(Москва)

Методом Бубнова — Галеркина проводится исследование устойчивости стационарного конвективного течения бинарной вязкой несжимаемой смеси в плоской термодиффузионной колонне относительно нормальных возмущений. Приводится спектр декрементов для значений произведения волнового числа возмущений на число Грассгофа от нуля до 2000; в этом течении показано наличие монотонной неустойчивости. Обсуждается зависимость критического числа Грассгофа от числа Прандтля, Шмидта, волнового числа и других параметров. Проводится сравнение с результатами экспериментов

В работах [1-4] было исследовано поведение нормальных возмущений в конвективном потоке однородной вязкой несжимаемой жидкости, заключенной между двумя бесконечными вертикальными плоскостями, нагретыми до разных температур. При помощи метода Бубнова — Галеркина построен спектр декрементов в интервале $0 < kG < 2500$. Был сделан вывод о возникновении в данном диапазоне kG монотонной неустойчивости стационарного течения и об отсутствии колебательной неустойчивости

1. В плоской термодиффузионной колонне шириной $2d$ и высотой $2h$ ($h \gg d$) при постоянной разности температур 2θ между стенками для бинарной смеси в предположении, что $c(1-c) = \text{const}$, вдали от концов колонны устанавливаются [5] стационарные распределения скорости v_0 , температуры T_0 и концентрации c_0

$$v_0 = \frac{1}{2a^2 (\text{sh } 2a + \sin 2a)} [\text{sh } a(1+x) \sin a(1-x) - \text{sh } a(1-x) \sin a(1+x)]$$

$$c_0 = -\frac{1}{1+Rs/G} x + \frac{1}{a(\text{sh } 2a + \sin 2a)} [\text{ch } a(1+x) \cos a(1-x) - \text{ch } a(1-x) \cos a(1+x)] + \frac{\kappa}{G/R+s} z, \quad T_0 = x \quad (1.1)$$

$$\left(G = \frac{g\beta\theta d^3}{\nu^2}, \quad R = \frac{g\gamma d^3}{\nu^2}, \quad \nu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c}, \quad s = \frac{\alpha c(1-c)\theta}{\langle T \rangle} \right)$$

Здесь G — число Грассгофа, g — ускорение свободного падения, β — коэффициент теплового расширения, ρ — плотность, ν — коэффициент кинематической вязкости, α — термодиффузионная постоянная, $\langle T \rangle$ — средняя температура.

Соотношения (1.1) записаны в безразмерном виде; в данной работе в качестве единиц расстояния, температуры, скорости, времени и концентрации выбраны соответственно величины

$$d, \theta, \nu/d (G + Rs), d^2/\nu, (G/R + s)$$

Направление осей координат и распределения величин v_0 , c_0 и T_0 для бинарной жидкой смеси при $z = 0$, представлены на фиг. 1.

Параметр a , связанный с безразмерным продольным градиентом концентрации κ и соотношением

$$a^4 = 1/4 (G + Rs)\kappa S \quad (S = \nu / D) \quad (1.2)$$

для бинарной жидкой смеси определяется из следующего уравнения

$$\left(5 + \frac{Rs}{G}\right) \frac{1}{2a} \frac{\operatorname{ch} 2a - \cos 2a}{\operatorname{sh} 2a + \sin 2a} - 2 \left(1 + \frac{Rs}{G}\right) \frac{\operatorname{sh} 2a \sin 2a}{(\operatorname{sh} 2a + \sin 2a)^2} = 2 \quad (1.3)$$

Здесь S — число Шмидта. Пусть на основной поток накладываются малые плоские возмущения скорости $u(x, z, t)$ температуры $\vartheta(x, z, t)$ и концентрации $Q(x, z, t)$. Вводя для возмущающего движения функцию тока $\psi(x, z, t)$, из уравнений свободной конвекции с учетом термодиффузии [6] получим краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + (G + Rs) \left(v_0 \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi - v_0'' \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \\ = \Delta^2 \psi - \frac{G}{G + Rs} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (G + Rs) \left(v_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + T_0' \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{1}{P} \Delta \vartheta$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (G + Rs) \left(v_0 \frac{\partial Q}{\partial z} + c_0' \frac{\partial \psi}{\partial z} - x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{1}{S} \left(\Delta Q - \frac{Rs}{G + Rs} \Delta \vartheta \right) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \vartheta = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Rs}{G + Rs} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \pm 1$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, u_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}, u_z = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

Здесь P — число Прандтля, штрих означает дифференцирование по x .

Уравнения (1.4) линейны относительно ψ , ϑ и Q с коэффициентами, не зависящими от z и t , поэтому будем рассматривать нормальные возмущения вида

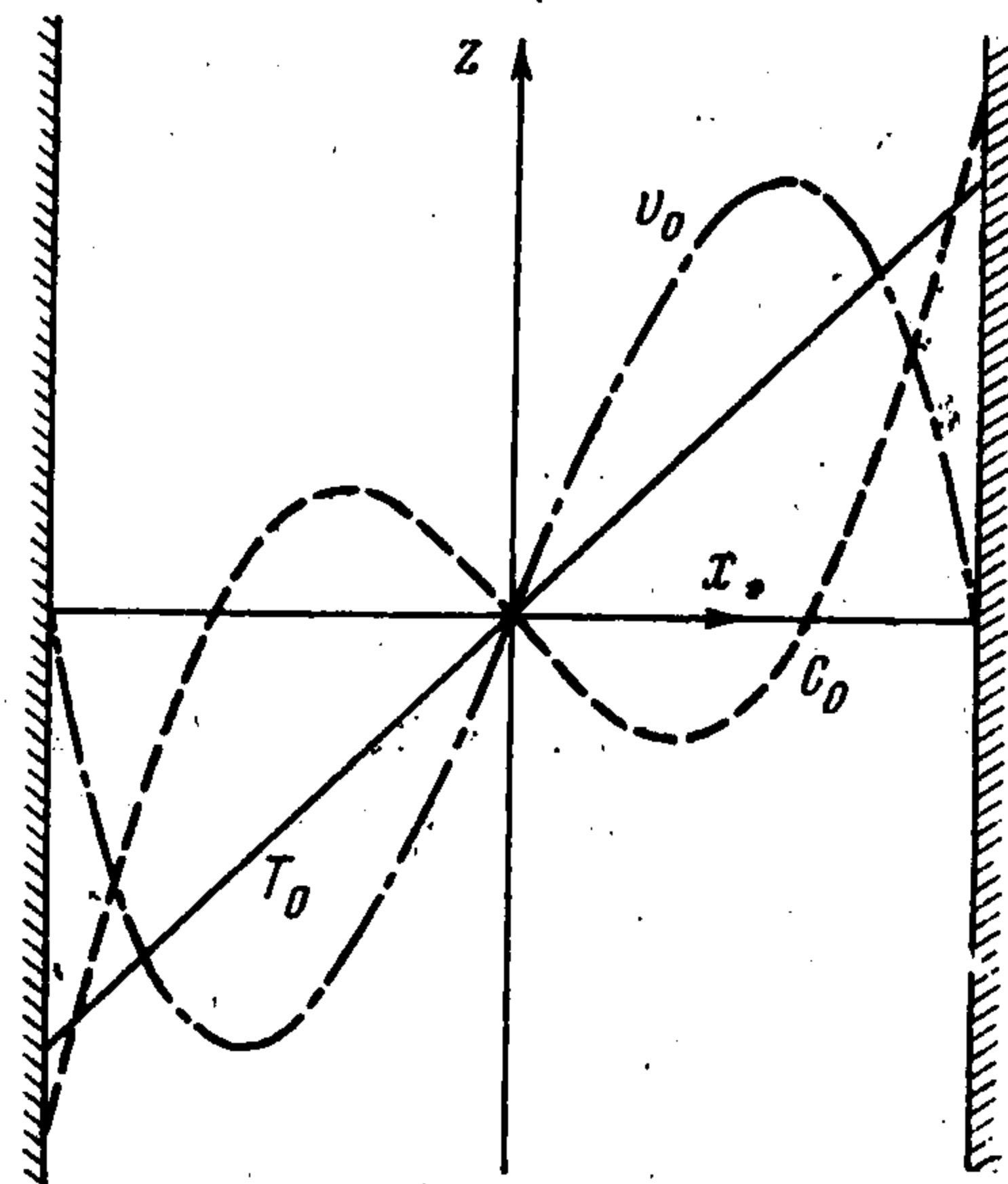
$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) = \Phi(x) e^{-\lambda t + ikz}, \quad \vartheta(x, z, t) = T(x) e^{-\lambda t + ikz} \\ Q(x, z, t) = N(x) e^{-\lambda t + ikz} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь λ — комплексный декремент, $\operatorname{Re} \lambda$ характеризует быстроту нарастания ($\operatorname{Re} \lambda < 0$) или затухания ($\operatorname{Re} \lambda > 0$) возмущения, $\operatorname{Im} \lambda$ — круговая частота отдельного колебания, k — вещественное волновое число. Подставляя (1.5) в (1.4), вводя новую переменную

$$C(x) = N(x) - \frac{Rs}{G + Rs} T(x)$$

и вычитая из уравнения диффузии уравнение теплопроводности, умноженное на $R_s / (G + R_s)$, получим уравнения для амплитуд возмущений

$$L_1(\Phi, T, C) \equiv \Delta^2 \Phi - ik(G + Rs)H\Phi - T' - C' = -\lambda \Delta \Phi$$



Фиг. 1

$$L_2(\Phi, T) \equiv P^{-1}\Delta T - ik(G + Rs)(v_0T + T_0'\Phi) = -\lambda T \quad (1.6)$$

$$L_3(\Phi, T, C) \equiv S^{-1}\Delta C - ik(G + Rs)\left[v_0C + \left(c_0' - \frac{Rs}{G + Rs}T_0'\right)\Phi\right] + \\ + (G + Rs)\kappa\Phi' - \frac{Rs}{(G + Rs)P}\Delta T = -\lambda C$$

$$\Phi(\pm 1) = \Phi'(\pm 1) = T(\pm 1) = C'(\pm 1) = 0 \quad (1.7)$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2, H = v_0\Delta - v_0''\right)$$

2. Задачу на собственные значения (1.6), (1.7) решаем методом Бубнова — Галеркина. Приближенное решение задачи будем искать в виде разложений

$$\Phi^* = \sum_{m=0}^{p-1} a_m \varphi_m^{(0)}, \quad T^* = \sum_{r=0}^{q-1} b_r \theta_r^{(0)}, \quad C^* = \sum_{j=0}^{w-1} l_j \xi_j^{(0)} \quad (2.1)$$

Здесь координатные функции $\varphi_m^{(0)}$, $\theta_r^{(0)}$ и $\xi_j^{(0)}$ будут собственными функциями операторов [7], родственных к операторам (1.6)

$$\Delta^2 \varphi_m^{(0)} + \chi_m^{(0)} \Delta \varphi_m^{(0)} = 0, \quad \varphi_m^{(0)}(\pm 1) = \varphi_m^{(0)' }(\pm 1) = 0 \quad (2.2)$$

$$P^{-1} \Delta \theta_r^{(0)} + \omega_r^{(0)} \theta_r^{(0)} = 0, \quad \theta_r^{(0)}(\pm 1) = 0 \quad (2.3)$$

$$S^{-1} \Delta \xi_j^{(0)} + \mu_j^{(0)} \xi_j^{(0)} = 0, \quad \xi_j^{(0)' }(\pm 1) = 0 \quad (2.4)$$

Задача (2.2) имеет решения] различной четности. Четные собственные функции равны

$$\varphi_m^{(0)} = \frac{\text{ch } kx}{\text{ch } k} - \frac{\cos \sqrt{\chi_m^{(0)} - k^2} x}{\cos \sqrt{\chi_m^{(0)} - k^2}} \quad (m = 0, 2, 4, \dots) \quad (\chi_m^{(0)} > k^2) \quad (2.5)$$

Декременты четных возмущений $\chi_m^{(0)}$ находятся из характеристического уравнения

$$k \text{th } k + \sqrt{\chi_m^{(0)} - k^2} \text{tg } \sqrt{\chi_m^{(0)} - k^2} = 0 \quad (2.6)$$

Нечетные собственные функции $\varphi_m^{(0)}$ имеют вид

$$\varphi_m^{(0)} = \frac{\text{sh } kx}{\text{sh } k} - \frac{\sin \sqrt{\chi_m^{(0)} - k^2} x}{\sin \sqrt{\chi_m^{(0)} - k^2}} \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.7)$$

Спектр собственных значений нечетных возмущений $\chi_m^{(0)}$ находится из уравнения

$$k \text{cth } k - \sqrt{\chi_m^{(0)} - k^2} \text{ctg } \sqrt{\chi_m^{(0)} - k^2} = 0 \quad (2.8)$$

Из (2.2) вытекает условие ортогональности

$$\int_{-1}^1 \varphi_n^{(0)} \Delta \varphi_m^{(0)} dx = 0 \quad (n \neq m) \quad (2.9)$$

Спектр собственных значений $\omega_r^{(0)}$ и амплитуды возмущений температуры $\theta_r^{(0)}$ находим из задачи (2.3)

$$\begin{aligned} \omega_r^{(0)} &= P^{-1} [1/4\pi^2 (r+1)^2 + k^2] \quad (r=0, 1, 2, \dots) \\ \theta_r^{(0)} &= \begin{cases} \cos 1/2\pi (r+1)x & (r=0, 2, 4, \dots) \\ \sin 1/2\pi (r+1)x & (r=1, 3, 5, \dots) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из симметрии оператора (2.3) возмущения температуры ортогональны

$$\int_{-1}^1 \theta_r^{(0)} \theta_c^{(0)} dx = 0 \quad (r \neq c) \quad (2.11)$$

Спектр декрементов $\mu_j^{(0)}$ и нормированных возмущений концентрации $\xi_j^{(0)}$ находим из краевой задачи (2.4)

$$\begin{aligned} \mu_j^{(0)} &= S^{-1} (1/4\pi^2 j^2 + k^2) \quad (j=0, 1, 2, \dots) \\ \xi_j^{(0)} &= \begin{cases} 1/2\sqrt{2} & (j=0) \\ \sin 1/2\pi jx & (j=1, 3, 5, \dots) \\ \cos 1/2\pi jx & (j=2, 4, 6, \dots) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Возмущения концентрации ортогональны

$$\int_{-1}^1 \xi_j^{(0)} \xi_h^{(0)} dx = 0 \quad (j \neq h) \quad (2.13)$$

При малой разности температур стенок термодиффузионной колонны решение краевой задачи (1.6), (1.7) можно искать в виде разложения по степеням малого параметра $ik (G + Rs)$. В этом случае можно показать, что задачи (2.2) — (2.4) определяют спектры декрементов $\chi_m^{(0)}$, $\omega_r^{(0)}$ и $\mu_j^{(0)}$ возмущений в покоящейся жидкости, когда стенки термодиффузионной колонны поддерживаются при одинаковой температуре. Так же как и в работе [3] декременты $\chi_m^{(0)}$ характеризуют изотермические возмущения при отсутствии возмущений концентрации. Спектр декрементов $\mu_j^{(0)}$ характеризует изотермические концентрационные возмущения в бинарной смеси и $\omega_r^{(0)}$ характеризуют неизотермические возмущения.

Анализ систем уравнений, полученных из (1.6) разложением амплитуд возмущений (1.5) и декремента λ по малому параметру $ik (G + Rs)$, показывает, что все нечетные поправки к декрементам нулевого приближения $\chi_m^{(0)}$, $\mu_j^{(0)}$ и $\omega_r^{(0)}$ тождественно равны нулю. Тогда разложение собственного значения λ содержит только четные степени малого параметра $ik (G + Rs)$, т. е. λ — вещественно. Таким образом, при малых значениях числа Грассгофа в термодиффузионной колонне возникают монотонные возмущения с нулевой фазовой скоростью («стоячие» возмущения).

3. В соответствии с методом Бубнова — Галеркина потребуем ортогональности функций $L_1 (\Phi^*, T^*, C^*)$, $L_2 (\Phi^*, T^*)$, $L_3 (\Phi^*, T^*, C^*)$ соответственно к функциям $\varphi_m^{(0)}$ ($m=0, 1, 2, \dots, p-1$), $\theta_r^{(0)}$ ($r=0, 1, 2, \dots, q-1$), $\xi_j^{(0)}$ ($j=0, 1, 2, \dots, u-1$).

Это приведет к системе линейных однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=0}^{p-1} a_m [(\chi_m^{(0)} - \lambda) \delta_{nm} + ik(G + Rs) H_{nm}] + \sum_{r=0}^{q-1} b_r A_{nr} + \sum_{j=0}^{w-1} l_j B_{nj} = 0$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, p-1)$$

$$ik(G + Rs) \sum_{m=0}^{p-1} a_m E_{cm} + \sum_{r=0}^{q-1} b_r [(\omega_r^{(0)} - \lambda) \delta_{cr} + ik(G + Rs) D_{cr}] = 0 \quad (3.1)$$

$$(c = 0, 1, 2, \dots, q-1)$$

$$\sum_{m=0}^{p-1} a_m [ik(G + Rs) W_{hm} - \kappa(G + Rs) Z_{hm}] + \frac{Rs}{(G + Rs)P} \sum_{r=0}^{q-1} b_r \Pi_{hr} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{w-1} l_j [(\mu_j^{(0)} - \lambda) \delta_{hj} + ik(G + Rs) V_{hj}] = 0 \quad (h = 0, 1, 2, \dots, w-1)$$

Здесь δ_{ij} — оператор Кронекера

$$H_{nm} = \frac{1}{F_n} \int \varphi_n^{(0)} H \varphi_m^{(0)} dx$$

$$F_n = \int \varphi_n^{(0)} \Delta \varphi_n^{(0)} dx = \begin{cases} \chi_n^{(0)} [(\chi_n^{(0)} - k^2)^{-1} k \operatorname{th} k (1 - k \operatorname{th} k) - 1] & (n = 0, 2, 4, \dots) \\ \chi_n^{(0)} [(\chi_n^{(0)} - k^2)^{-1} k \operatorname{cth} k (1 - k \operatorname{cth} k) - 1] & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases}$$

$$A_{nr} = \frac{1}{F_n} \int \varphi_n^{(0)} \theta_r^{(0)'} dx, \quad B_{nj} = \frac{1}{F_n} \int \varphi_n^{(0)} \xi_j^{(0)'} dx \quad (3.2)$$

$$E_{cm} = \frac{1}{Y_c} \int \theta_c^{(0)} T_0' \varphi_m^{(0)} dx, \quad Y_c = \int \theta_c^{(0)2} dx = 1, \quad D_{cr} = \frac{1}{Y_c} \int \theta_c^{(0)} v_0 \theta_r^{(0)} dx$$

$$W_{hm} = \frac{1}{I_h} \int \xi_h^{(0)} \left(c_0' - \frac{Rs}{G + Rs} T_0' \right) \varphi_m^{(0)} dx, \quad I_h = \int \xi_h^{(0)2} dx = 1$$

$$Z_{hm} = \frac{1}{I_h} \int \xi_h^{(0)} \varphi_m^{(0)'} dx, \quad \Pi_{hr} = -\frac{1}{I_h} \int \xi_h^{(0)} \Delta \theta_r^{(0)} dx, \quad V_{hj} = \frac{1}{I_h} \int \xi_h^{(0)} v_0 \xi_j^{(0)} dx$$

(интегралы берутся в пределах ± 1).

Явный вид матричных элементов здесь не приводится из-за их громоздкости.

Условие существования нетривиального решения системы (3.1) дает возможность вычислить собственные значения $\lambda = \lambda(G, P, S, R, s, k)$. Эта задача сводится к определению собственных значений комплексной матрицы порядка $(p + q + w)$, составленной из элементов (3.2). Спектр декрементов возмущений λ находился ортогонально-степенным методом на ЭВМ.

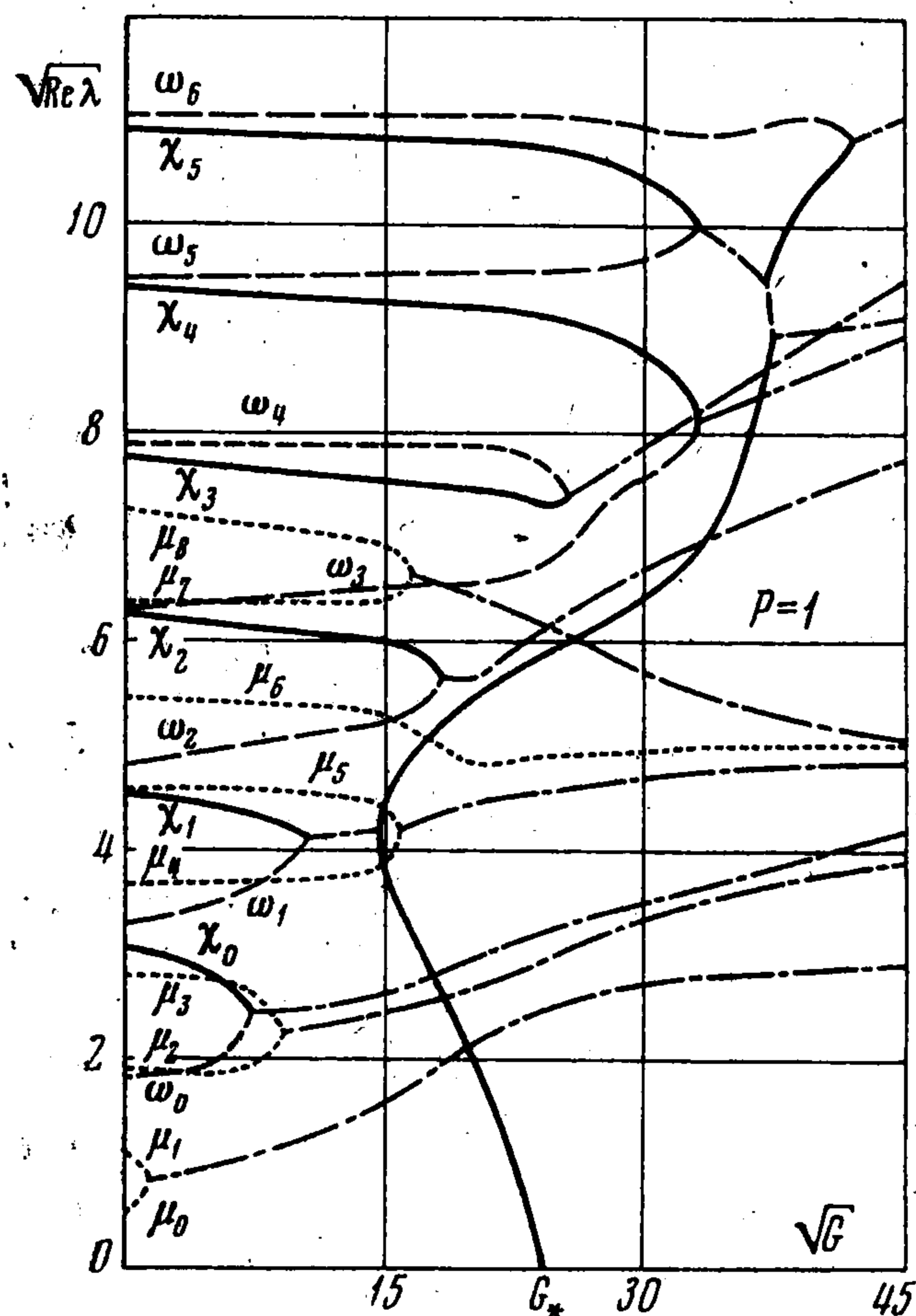
4. Расчет декрементов проводился с использованием 30 координатных функций при значениях p, q и w , изменяющихся от 8 до 12 в зависимости от чисел Прандтля и Шмидта. В результате в рассматриваемом приближении были получены устойчивые собственные значения 30 нижних уровней в интервале $0 < kG < 2000$. Так же как и в [4], при увеличении числа Грассгофа сходимость разложений (2.1) ухудшалась. В данном случае сходимость проверялась по декрементам, вычисленным в 27, 30 и 33 приближениях. С достаточной точностью получено совпадение с использованием 30 и 33 координатных функций.

На фиг. 2 и 3 представлены зависимости $\sqrt{\operatorname{Re} \lambda}$ от параметра \sqrt{G} для $k = 1, S = 3, s = 5 \cdot 10^{-3}, R = 200$ для двух значений числа Прандтля $P = 1$ и $P = 0.1$ (сплошными линиями изображаются χ_m уровни, штриховыми линиями — ω_r уровни, пунктиром изображаются μ_j уровни и штрих-пунктирными линиями изображена действительная часть комплексно-сопряженных декрементов).

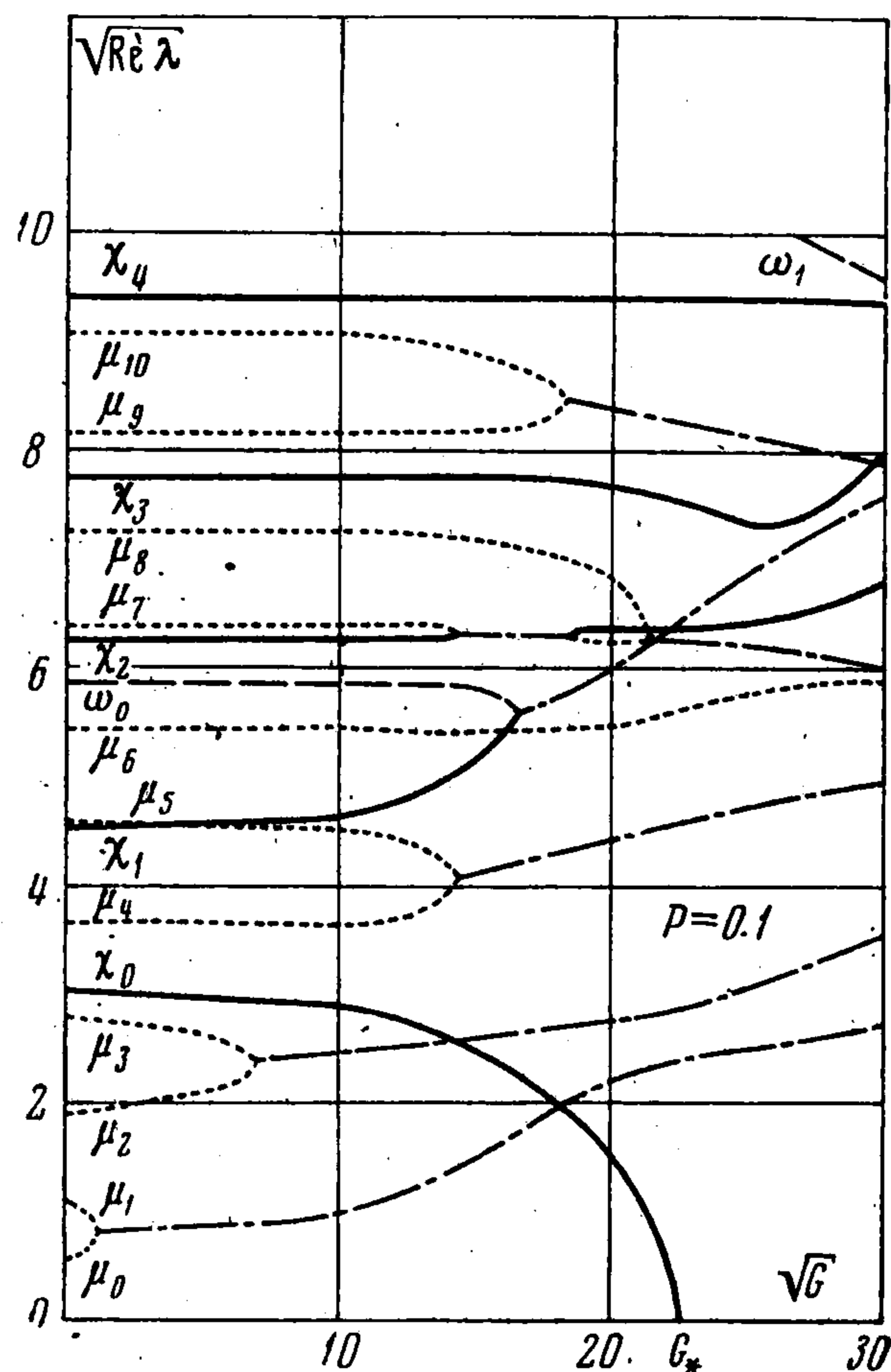
При малых числах Грассгофа все декременты вещественны и положительны и, следовательно, все возмущения монотонно затухают. С возрастанием числа Грассгофа про-

исходит взаимодействие вещественных уровней с образованием комплексно-сопряженных пар (два возмущения, распространяющиеся с одинаковыми, но противоположно направленными фазовыми скоростями). Фазовая скорость образовавшихся колебательных возмущений заметно растет с ростом числа G . Наблюдается преимущественное слияние χ_m и ω_r уровней; комплексно-сопряженные пары $\mu_j - \chi_m$ и $\mu_j - \omega_r$ с возрастанием G быстро распадаются и в дальнейшем уровни μ_j сливаются только между собой.

При достаточно большом значении G наблюдается распад какой-либо $\chi_m - \omega_r$ комплексно-сопряженной пары на два вещественных уровня, один из которых затем пересекает ось G , что и приводит к монотонной неустойчивости основного течения.



Фиг. 2



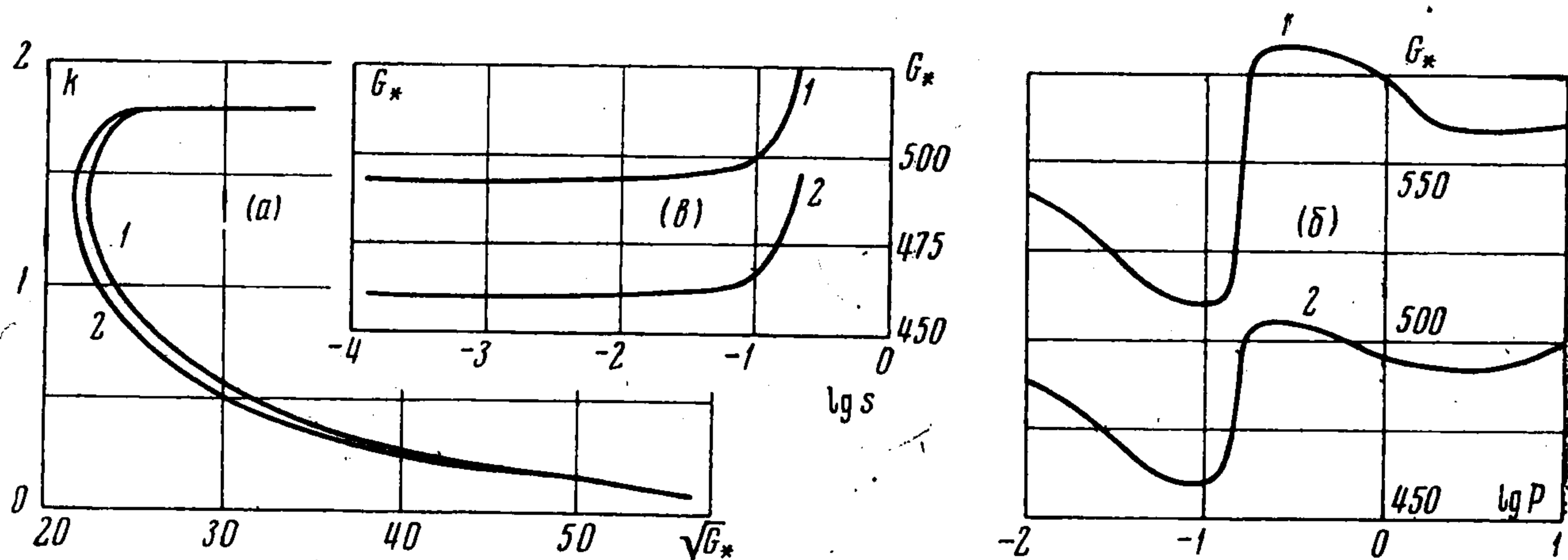
Фиг. 3

По аналогии с работой [4] существует определенная зависимость спектра собственных значений от чисел Прандтля и Шмидта. Так, при $P = 0.1$ (фиг. 3) ниже χ_0 уровня отсутствуют ω_r уровни и независимо от наличия в этой области μ_j уровней декремент χ_0 пересекает ось G , вызывая неустойчивость стационарного течения.

5. На фиг. 2 и 3 точка пересечения оси G вещественным уровнем определяет критическое число Грассгофа G_* ($k = 1$), отделяющее область устойчивых значений G от неустойчивых, относительно «стоячих» возмущений. На фиг. 4, а изображены нейтральные кривые $k = k(\sqrt{G_*})$ ($\text{Im} \lambda = 0, 0 < kG < 2000$) для двух значений числа Прандтля: кривая 1 для $P = 5$ и кривая 2 для $P = 0.1$. Как и следовало ожидать, к неустойчивости основного течения приводят возмущения с большими длинами волн. Наименьшая длина волны для неустойчивых возмущений равна $3.5 d$. Волновое число, при котором достигается наименьшее критическое число Грассгофа, приблизительно равно 1.4 и очень слабо изменяется в зависимости от числа Шмидта в диапазоне $0.01 < S < 10$ и от числа Прандтля в диапазоне $0.01 < P < 10$, что совпадает с выводами работы [4].

На фиг. 4, б представлены зависимости критического числа Грассгофа от логарифма числа Прандтля для двух значений волнового числа: кривая 1 для $k = 1$, кривая 2 для $k = 1.4$. Изменение критического числа Грассгофа составляет не более 1% при изменении числа Шмидта в диапазоне $0.01 < S < 10$. В данном приближении не представляется возможным исследовать спектры декрементов при $P > 10$ или $S > 10$ по причинам, описанным в [4].

На фиг. 4, в представлены зависимости минимального критического числа Грасгофа от термодиффузионного комплекса s для двух значений числа Прандтля: кривая 1 для $P = 5$ и кривая 2 для $P = 0.1$. С увеличением термодиффузионной постоянной устойчивость основного течения несколько повышается. Аналогичная зависимость наблюдается при изменении R в диапазоне $1 < R < 10^4$.



Фиг. 4

Слабая зависимость критического числа Грасгофа от чисел Прандтля, Шмидта, термодиффузионного комплекса s и от R , а также характер поведения спектров декрементов позволяет сделать вывод о том, что неустойчивость конвективного течения бинарной смеси в термодиффузионной колонне связана с гидродинамической неустойчивостью границы раздела встречных конвективных потоков [8].

В работе [9] экспериментально исследовали неустойчивость ламинарного течения в термодиффузионной колонне, заполненной газом с $P \approx 0.8$. Эксперимент, основанный на нахождении кризиса теплопередачи через слой газа, показал, что конвективное течение устойчиво до $G_* = 585$, однако сделать окончательный вывод о характере найденной неустойчивости из такого рода эксперимента не представляется возможным. Проведенный теоретический расчет для того же числа Прандтля дал минимальное критическое число Грасгофа относительно стоячих возмущений $G_* = 505$.

Авторы благодарят Х. Икрамова, Р. Н. Рудакова и В. А. Тимофеева за помощь при выполнении работы.

Поступила 9 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершун И. Г. З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. Ж. техн. физ., 1953, т. 23, № 10.
2. Гершун И. Г. З., Жуховицкий Е. М. О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными вертикальными плоскостями. Изв. вузов. Физика, 1958, № 4.
3. Рудаков Р. Н. О малых возмущениях конвективного движения между вертикальными параллельными плоскостями. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
4. Рудаков Р. Н. Спектр возмущений и устойчивость конвективного движения между вертикальными плоскостями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
5. Николаев Б. И., Тубин А. А. Влияние изменения плотности от концентрации на разделение жидких смесей в термодиффузионных колоннах. Инж. физ. ж., 1970, т. 18, № 5.
6. Шапошников И. Г. К теории конвективных явлений в бинарной смеси. ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.
7. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М., «Наука», 1966.
8. Бирх Р. В. О малых возмущениях плоскопараллельного течения с кубическим профилем скорости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
9. Onsaeger L., Watson W. W. Turbulence in convection in gases between concentric vertical cylinders. Phys. Rev., 1939, vol. 56, No. 5.