

## ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА КЛИНЕ, ДВИЖУЩЕМСЯ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

С. М. Тер-Минасянц

(Москва)

Изучается возмущение однородного потока за косым скачком уплотнения, дифрагирующим одновременно с падающей волной. Искривление скачка обуславливает задание на его образе отношения частных производных искомого возмущения давления, что определяет постановку краевой задачи Гильберта для аналитической функции.

Классическая «задача о дифракции плоской волны» (на неподвижном клине конечного угла раствора), решенная в 1933 г. В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым [1], осложняется предположением о том, что клин движется в газе со сверхзвуковой скоростью.

Кратко задача рассматривалась автором ранее [2]; для построения ее решения использовались интегралы типа Коши. Удобным оказывается привлечение сюда полученного автором [3] обобщения решения одной задачи дифракции, построенного Лайтхиллом [4,5]; на нем основаны рассуждения и расчеты распределения давления на стенку клина, содержащиеся в данной работе.

Специально для случая тонкого клина, движущегося с гиперзвуковой скоростью, когда можно использовать решение Лайтхилла, рассмотрение проведено Г. Р. Ингером [6,7]. Режимы, в которых реализуется взаимодействие без дифракции, указаны А. И. Голубинским [8]; их малым возмущениям посвящены рассуждения К. А. Бежанова [9].

**§ 1. Картина течения.** Клин конечного угла раствора  $\beta$  движется со сверхзвуковой скоростью  $W_\infty = M_\infty a_\infty$  в покоящемся идеальном газе, образуя присоединенный косой скачок уплотнения, составляющий угол  $\alpha$  с плоскостью его симметрии. В момент  $t = 0$  он встречается с фронтом слабого плоского скачка давления, распространяющегося по тому же газу со скоростью  $a_\infty$ , равной скорости звука в нем и составляющим угол  $\varphi$  с фронтом косого скачка. Возникающее движение автомодельно. Величина  $\varepsilon$  скачка давления в падающей волне, отнесенная к давлению в покоящемся газе, выбирается в качестве основного малого параметра.

Рассуждения ведутся в плоскости, перпендикулярной ребру клина, где плоскость скачка и плоскость симметрии клина представляются линией скачка и линией симметрии.

Типичная картина возникающего при  $t > 0$  течения изображена на фиг. 1. Частица газа, находившаяся при  $t = 0$  у острия клина, сместится вдоль стенки на расстояние  $Ma_1 t$ , если  $a_1$  — скорость звука, а  $Ma_1$  — сверхзвуковая скорость потока относительно клина в области между клином и косым скачком уплотнения (в области I на фиг. 1). Эта частица явится центром окружности Маха — переднего фронта возникшего возмущения.

Течения по разные стороны от линии симметрии независимы. Относительно газа в областях 0 и I (фиг. 1) косой скачок уплотнения будет пря-

мым скачком, распространяющимся по ним соответственно со сверх- и дозвуковой скоростями. Поэтому возникшие возмущения не могут проникнуть в область  $O$ , но они обязательно достигнут скачка со стороны области 1, и, налагаясь друг на друга, обусловят слабое его искривление на участке между точками пересечения линии скачка с упомянутой окружностью Маха.

Однако при постановке краевой задачи в силу малости возмущений в качестве границы области дифракции принимается участок  $ABC$  невозмущенного скачка, а также участок  $DEF$  стенки, отсекаемой этой окружностью Маха, и ее дуги  $AF$  и  $CD$ .

Падающая волна и косой скачок, взаимодействуя, преломляются в точке  $L$  пересечения их фронтов на конечный угол  $\delta_3$  и малый угол  $\delta_2$  соответственно.

Рассмотрение такого взаимодействия ударных волн содержится в работе автора [10]; здесь необходимо лишь

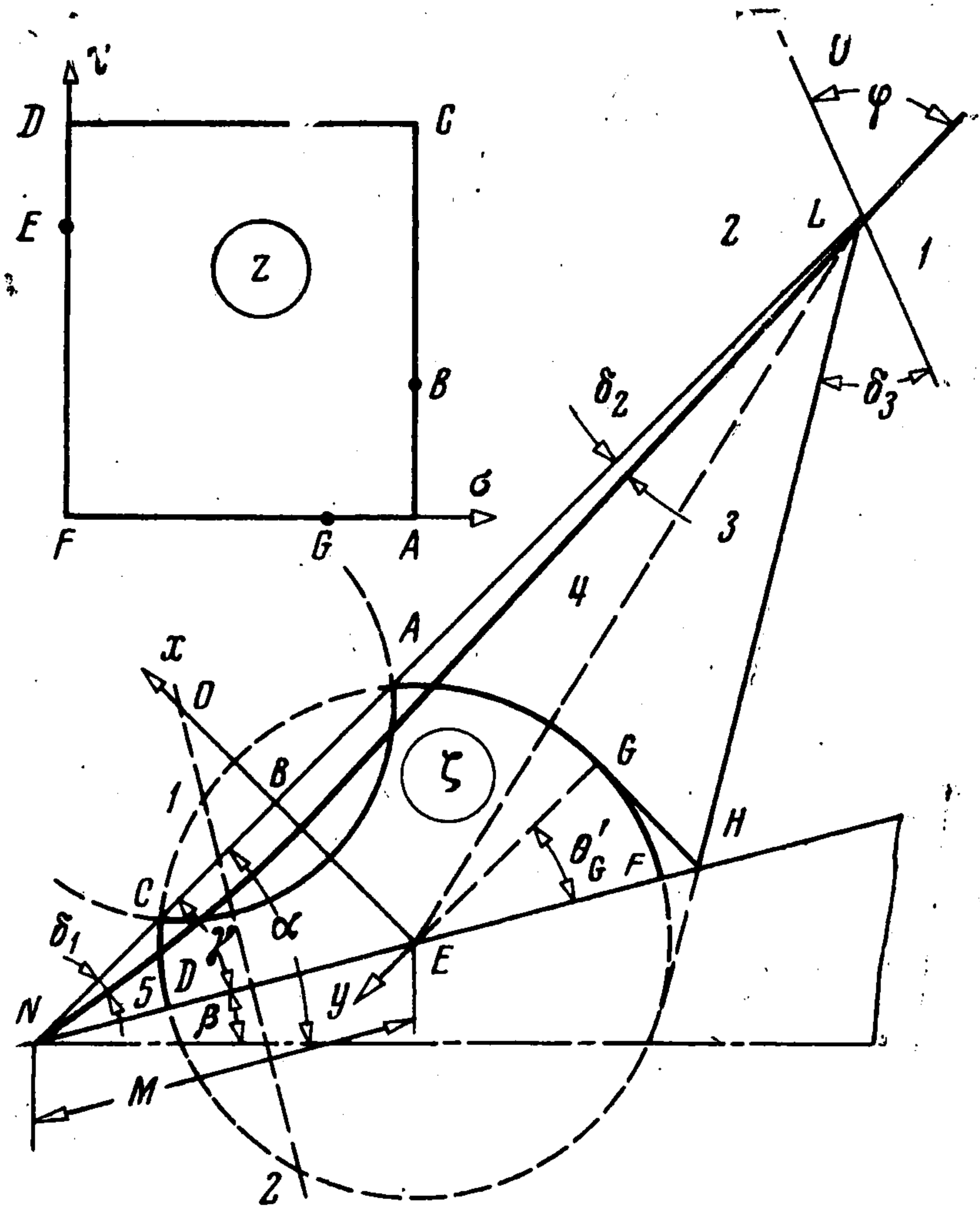
отметить, что области 3 и 4 между фронтами преломленных волн разделяет линия  $LE$  тангенциального разрыва.

Фронт преломленной волны либо касается в некоторой точке  $G$  дуги  $FA$ , либо отражается от стенки и указанной дуги в точке  $G$  касается отраженный фронт, как это показано на фиг. 1. Возможно, наконец, что отраженный от стенки скачок вторично взаимодействует с косым скачком уплотнения, вторично преломленный скачок вновь отражается от стенки и т. д. Во всех случаях вдоль дуги  $FA$  к области дифракции  $ABCDEFA$  примыкают две области однородных потоков, разделенные слабым скачком

Рассмотрению поддаются также случаи, в которых нормальная скорость фронта падающего скачка имеет составляющую в направлении движения клина, однако дифракция будет иметь место лишь при условии, что точка пересечения продолжения невозмущенного падающего фронта с линией симметрии движется быстрее клина:  $c \sin \chi > M_\infty$ , где  $\chi = \varphi + \alpha$  — угол наклона падающего фронта к линии симметрии.

Из геометрических и кинематических соображений нетрудно определить угол  $\delta_3$  преломления падающего скачка в точке  $L$

$$\delta_3 = \varphi - \arcsin [h^{-2}(h^2 - m^2 + \sqrt{h^2 - 1})]$$



Фиг. 1

Здесь

$$h = \frac{\sqrt{h_1^2 (1 + M_\infty \sin \chi)^2 + M^2 \sin^2 \varphi - 2h_1 M \sin \varphi (1 + M_\infty \sin \chi) \cos \gamma}}{\sin \varphi}$$

$$h_1 = a_\infty / a_1 = (\kappa + 1) M_c / \sqrt{[2\kappa M_c^2 - (\kappa - 1)][2 + (\kappa - 1) M_c^2]}$$

$$M_c = M_\infty \sin \alpha, \quad m = M \sin \gamma, \quad \gamma = \alpha - \beta$$

Положение точки  $G$  фиксируется углом  $\theta_{G'} = \pi / 2 - \gamma - \varphi + \delta_3$ .

Падающий скачок вызывает в области 2 за своим фронтом движение газа со скоростью  $w$ , изменяет там скорость звука и плотность. Значения этих величин определяются по формулам [11]

$$w = \frac{\varepsilon p_\infty}{a_\infty \rho_\infty}, \quad a_2 = a_\infty + \frac{\varepsilon (\kappa - 1) p_\infty}{2 a_\infty \rho_\infty}, \quad \rho_2 = \rho_\infty + \frac{\varepsilon p_\infty}{a_\infty^2} \quad (1.1)$$

Здесь  $\kappa$  — показатель политропы, индекс  $\infty$  отвечает области 0.

Относительно газа в области 0 косо́й скачок уплотнения есть плоская ударная волна, распространяющаяся со скоростью  $U$  и вызывающая за своим фронтом движение газа плотности  $\rho_1$  и давления  $p_1$  со скоростью  $V$ ; величины  $p_1$ ,  $\rho_1$  и  $V$  равны [4, 11]

$$p_1 = \frac{2\rho_\infty}{\kappa + 1} \left( U^2 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} a_\infty^2 \right), \quad \rho_1 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \rho_\infty \left( 1 + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{a_\infty^2}{U^2} \right)^{-1}$$

$$V = \frac{2}{\kappa + 1} U \left( 1 - \frac{a_\infty^2}{U^2} \right), \quad U = M_c a_\infty = M_\infty a_\infty \sin \alpha \quad (1.2)$$

Обращаясь к реальным течениям, следует иметь в виду, что несмотря на предположение о малой интенсивности падающего скачка описанная схема не может всегда быть им адекватной, так как при больших углах  $\varphi$  взаимодействие может потерять регулярный характер; то же относится к отражению падающего скачка от стенки.

При околокритических значениях отражение и взаимодействие волн вызывают нелинейные эффекты [12]. Однако в широком диапазоне определяющих параметров критические углы между падающим фронтом и стенкой, за счет его преломления взаимодействием, будут больше, чем при дифракции на неподвижном клине. Большое число определяющих параметров не позволяет указать заранее эти диапазоны; для каждого конкретного случая ориентация в этом вопросе достигается при помощи работы [10], где представлены границы регулярных отражений и взаимодействий.

§ 2. Постановка краевой задачи. В плоскости, перпендикулярной ребру клина, систему безразмерных прямоугольных координат удобно связать с частицами газа в области 1 (см. фиг. 1), поместив ее начало в точке  $E$  и направив ось  $x$  перпендикулярно, а ось  $y$  параллельно линии невозмущенного косо́го скачка. Координаты  $x$ ,  $y$  можно считать полученными из физических координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $t$  по формулам  $x = x' / a_1 t$ ,  $y = y' / a_1 t$ .

Уравнения плоского неустановившегося автомодельного движения газа для безразмерных возмущений давления, плотности и компонент скорости газа по осям  $x$ ,  $y$

$$p = p' / \rho_1 a_1^2, \quad \rho = \rho' / \rho_1, \quad u = u' / a_1, \quad v = v' / a_1$$

где  $p', \rho', u', v'$  — размерные возмущения, после исключения функции  $p$  имеют вид [4, 13]

$$x \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.1)$$

Условия на слабоискривленном скачке с уравнением фронта  $x = m + f(y)$ , где  $f(y)$  имеет порядок  $\varepsilon$ , дают вместе с (1.1) следующие выражения для возмущений:

$$u = \frac{2}{\kappa + 1} \left[ (1 + M_c^{-2}) (f - yf') + \frac{\varepsilon a_\infty}{\kappa a_1} \left( \frac{\cos \varphi}{M_c^2} - \frac{\kappa - 1}{2} \cos \varphi - \frac{\kappa - 1}{M_c} \right) \right],$$

$$v = -M_1 f' + \frac{\varepsilon a_\infty}{\kappa a_1} \sin \varphi \quad \left( M_1 = \frac{V}{a_1} = \frac{2M_c}{\kappa + 1} \frac{a_\infty}{a_1} (1 - M_c^{-2}) \right) \quad (2.2)$$

$$p = \frac{4}{\kappa + 1} \frac{a_\infty \rho_\infty}{a_1 \rho_1} \left[ (M_c (f - yf')) + \frac{\varepsilon a_\infty}{\kappa a_1} \left( M_c \cos \varphi + \frac{M_c^2}{2} - \frac{\kappa - 1}{4} \right) \right]$$

На стенке клина, из третьего уравнения системы (2.1) получается условие для нормальной к ней производной  $\partial p / \partial n = 0$ . На участке  $GF$  дуги  $FA$  (фиг. 1) возмущение давления либо удвоено в сравнении с таковым в области  $\mathcal{Z}$ , либо отсутствует, если фронт преломленной волны касается окружности Маха без отражения от стенки. Из (1.1) следует, что

$$u_3 = \cos(\varphi - \delta_3) p_3, \quad v_3 = \sin(\varphi - \delta_3) p_3 \quad (2.3)$$

индексы  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{4}$  и (ниже)  $\mathcal{5}$  относятся к возмущениям. Свойство линии тангенциального разрыва приводит к условию

$$(u_3 - u_4) \sqrt{h^2 - m^2} = (v_4 - v_3) m \quad (2.4)$$

Соотношения (2.2) после подстановки туда  $f(y) = -(y + \sqrt{h^2 - m^2}) \delta_2$ , что отвечает участку  $AL$  косоугольного скачка, вместе с (2.3) и (2.4), образуют систему линейных уравнений для величин  $\delta_2, u_3, u_4, v_3, v_4, p_3 = p_4$ . Формулы, дающие ее решение, за их громоздкостью опущены.

Те же соотношения (2.2) после подстановки туда значения  $f(y) = (y - M \cos \gamma) \delta_1$ , соответствующего участку  $NC$  косоугольного скачка, определяют искомые возмущения вдоль дуги  $CD$  (в области  $\mathcal{5}$ ). Величина  $\delta_1$  определяется соотношением

$$\delta_1 = M_\infty \sin 2\alpha \left[ \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta \left( \frac{\kappa - 1}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{\kappa + 1}{2} \right) \right] HM' -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \beta} \left[ \operatorname{tg}^2 \alpha \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \right) + 1 + \frac{\kappa + 1}{2} M_\infty^2 \right] H\beta'$$

$$H = \operatorname{tg} \beta \left[ 3 \operatorname{tg}^2 \alpha \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \right) + 1 + \frac{\kappa + 1}{2} M_\infty^2 \right] - 2 \operatorname{tg} \alpha (M_\infty^2 - 1)$$

полученным для возмущений из формулы, выражающей  $\beta$  через  $M_\infty$  и  $\alpha$  [11]. Величины  $M'$  и  $\beta'$  легко находятся при помощи формул (1.2)

$$M' = \frac{\varepsilon}{\kappa} \left( \sin \chi - \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty \right), \quad \beta' = \frac{\varepsilon \cos \chi}{\kappa M_\infty}$$

**Замечание 2.1.** Значения величин  $p_3 = p_4$  и  $\delta_2$  можно установить точно при помощи работы [10], а величин  $\delta$  и  $p_5$  при помощи формул (1.2) и формул работы [14].

**§ 3. Сведение к задаче Гильберта.** Известно [1, 4, 13], что система уравнений (2.1) после исключения функций  $u$  и  $v$ , перехода к полярным координатам  $r, \theta$  ( $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ) и преобразования радиус-векторов  $r = 2R / (1 + R^2)$  переходит в уравнение Лапласа для функции  $p$  внутри единичного круга. Смирлом [13] показано, что контактный разрыв не препятствует проведению этих преобразований, ибо вторая производная  $p$  по нормали к нему остается непрерывной.

Граница области дифракции деформируется при этом лишь на участке  $AC$  прямой  $r = m \sec \theta$ , переходящей в окружность  $2R \cos \theta = m(1 + R^2)$ , пересекающую ортогонально в точках  $A$  и  $C$  окружность  $R = 1$ .

Краевые условия на этой окружности сводятся к условию для одной только функции  $p$ , получаемому из системы (2.2) с привлечением первых двух уравнений (2.1) [3, 4, 5]

$$\begin{aligned} (\partial p / \partial n) / (\partial p / \partial s) &= (A m \operatorname{tg} \theta - B \operatorname{ctg} \theta) / \sqrt{1 - m^2 \sec^2 \theta} & (3.1) \\ A &= \frac{M_c^2 + 1}{2M_c^2} \left( \frac{2\kappa M_c^2 - (\kappa - 1)}{2 + (\kappa - 1) M_c^2} \right)^{1/2}, & B = \frac{\kappa + 1}{2} \frac{M_c^2 - 1}{2 + (\kappa - 1) M_c^2} \end{aligned}$$

Здесь  $n$  и  $s$  суть координаты вдоль внешней нормали и касательной к контуру области дифракции в переменных  $R, \theta$ .

Из рассмотрения фиг. 1 ясно, что дробно-линейное преобразование, переводящее соответственно в нуль и в бесконечность точки 1 и 2, отображит конформно область дифракции в плоскости  $\zeta = R e^{i\theta}$  на концентрическое полукольцо, ибо окружность  $2R \cos \theta = m(1 + R^2)$  и диаметр  $DEF$  ортогональны к прямой 1—2 и единичной окружности, которые переходят в лучи, выходящие из нулевой точки. Умножение на константу и последующее логарифмирование этого преобразования в суперпозиции определяют функцию

$$z = \ln \frac{\zeta - \exp i\theta_2}{\zeta - \exp i\theta_1} - i \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}, \quad \begin{aligned} \theta_1 &= \arcsin M^{-1} - \gamma \\ \theta_2 &= \pi - \arcsin M^{-1} - \gamma \end{aligned} \quad (3.2)$$

и прямоугольник — область дифракции в плоскости  $z = \sigma + i\tau$

$$\begin{aligned} 0 < \sigma < l, & \quad l = -\frac{1}{2} \ln q, & \quad q = \frac{1 - \operatorname{tg} \gamma \sqrt{M^2 - 1}}{1 + \operatorname{tg} \gamma \sqrt{M^2 - 1}} \\ 0 < \tau < \pi, & & \end{aligned} \quad (3.3)$$

Образом отраженного фронта оказывается правая ( $\sigma = l$ ), а образом стенки — левая ( $\sigma = 0$ ) его вертикальные стороны. Связь  $\theta_G = \theta_G' - 1/2\pi - \gamma$  и формулы (3.2) указывают точку  $G$  в плоскости  $z$

$$\sigma_G = 1/2 \ln \{ [1 - \cos(\theta - \theta_2)] / [1 - \cos(\theta - \theta_1)] \}, \quad \tau_G = 0$$

$$\text{Подстановка обращения преобразования (3.2) при } \sigma = l \quad (3.4)$$

$$\operatorname{tg} \theta = m_0 M^{-1} \operatorname{ctg} \gamma (m_0 - M \cos \tau) / (M - m_0 \cos \tau), \quad m_0 = \sqrt{1 - (M^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \gamma}$$

в правую часть (3.1) дает условие на  $AC$  в плоскости  $z$

$$\frac{\partial p / \partial s}{\partial p / \partial n} = b(\tau) = \frac{P}{Q} = \frac{\operatorname{tg} \gamma m^2 M \sqrt{M^2 - 1} (m_0 - M \cos \tau) \sin \tau}{mm_0^2 A (m_0 - M \cos \tau)^2 - BM^2 \operatorname{tg}^2 \gamma (M - m_0 \cos \tau)^2} \quad (3.5)$$

В плоскости  $z$   $\partial p / \partial s = \partial p / \partial \sigma$  на  $CD$  и  $FA$ ,  $\partial p / \partial s = \partial p / \partial \tau$ ,  $\partial p / \partial n = \partial p / \partial \sigma$  на  $AC$  и  $DF$ .

Поэтому условия на  $CDF A$  — задание кусочно-постоянных значений  $p$  на  $CD$  и  $FA$  и нулевого значения  $\partial p / \partial n$  на  $DEF$ , можно записать через дельта-функцию единым соотношением  $\partial p / \partial \sigma = p_4 \delta(z - z_G)$ , правая часть которого констатирует удвоение возмущения давления при переходе через точку  $G$  вдоль дуги  $AF$ .

Функция  $p$  должна удовлетворить еще двум условиям. Первое из них получается интегрированием по  $y$  вдоль образа ударного фронта соотношения, получающегося из (2.2), а смысл второго становится сразу ясным из его записи; в переменных  $\sigma$ ,  $\tau$  эти условия имеют вид

$$B \int_0^\pi \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{d\tau}{y(\tau)} = v_5 - v_4, \quad \int_0^\pi \frac{\partial p}{\partial \tau} d\tau = p_5 - p_4 \quad (3.6)$$

Вводя коэффициенты  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  и полагая, что  $P / Q = b(\tau)$ ,  $S = 0$  на  $AC$  и  $P = 1$ ,  $Q = 0$ ,  $S = p_4 \delta(z - z_G)$  на  $CDF A$  можно, наконец, всю систему краевых условий представить единым соотношением  $P \partial p / \partial \sigma - Q \partial p / \partial \tau = S$ , резюмирующим постановку неоднородной краевой задачи Гильберта для аналитической в прямоугольнике (3.3) функции  $\Gamma(z) = \partial p / \partial \sigma - i \partial p / \partial \tau$ .

§ 4. Однородная задача. Метод Лайтхилла. Решение однородной задачи, получаемой из поставленной в § 3 предположением о том, что всюду на контуре  $S = 0$ , обозначается ниже через  $\Gamma_0(z) = \partial p^0 / \partial \sigma - i \partial p^0 / \partial \tau$  и предполагается непрерывным в области (3.3) вплоть до границы включительно.

Проверкой можно убедиться, что из (3.5) для аргумента  $\Gamma_0(z)$  на образе  $AC$  искривленного участка отраженного фронта получается представление

$$\arg \Gamma_0(z) = \sum_{j=1}^4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( E_j \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right) \quad (4.1)$$

$$E_{1,2,3,4} = \sqrt{(M + m_0) / (M - m_0)} (D_{1,2} \pm \sqrt{D_{1,2}^2 - 1})$$

$$D_{1,2} = \frac{1 - m^2 \pm \sqrt{1 - m^2 - 4mB[(1 - m^2)A - mB]}}{2[(1 - m^2)A - mB]}$$

Функция  $\Gamma_0(z)$  отыскивается как произведение подлежащей определению константы и аналитических в (3.3) функций  $\Gamma_0(z) = c\Lambda(z)L(z)$ , причем  $\arg \Lambda(z) - 2\pi$  равен правой части (4.1) на  $AC$  и нулю на  $CDF A$ ,  $\arg L(z)$  равен  $2\pi$  на  $AC$ ,  $3\pi/2$  и  $\pi/2$  соответственно на частях участка  $CDF A$  от точки  $C$  до точки  $z = z_0$  и от точки  $z = z_0$  до точки  $A$ .

Нетрудно установить, что получаемый из (4.1) ряд синусов Фурье функции  $\arg \Gamma_0(l + i\tau) - 2\pi$  на интервале  $0 < \tau < \pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin n\tau, \quad g_n = -n^{-1} \left( 4 - \sum_{j=1}^4 F_j^n \right), \quad F_j = \frac{E_j - 1}{E_j + 1}$$

равен  $\text{Im} \ln \Lambda(l + i\tau)$  на  $AC$  и нулю на  $CDF A$ , если положить

$$\Lambda(z) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} g_n \text{cs ch } nl \text{ ch } nz$$

Общий член ряда, стоящего под знаком экспоненты допускает оценки (действительная часть)

$$|g_n \text{ch } n\sigma \cos n\tau \text{csch } nl| \leq |g_n| \text{ch } n\sigma \text{csch } nl \leq 4 |g_n| \exp[-n(l - \sigma)]$$

так как  $l, n > 0, \sigma \geq 0$ , и поэтому  $\text{sh } nl > 1/4e^{nl}$ ,  $\text{ch } n\sigma < e^{n\sigma}$ , он мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем  $e^{-(l-\sigma)}$ . Такие же оценки допускает мнимая часть. Это указывает на равномерную сходимость ряда к аналитической функции в каждой замкнутой области, состоящей из внутренних и граничных точек прямоугольника (3.3), исключая точки его правой вертикальной стороны.

Следуя Лайтхиллу, функцию  $\Lambda(z)$  на контуре можно представить бесконечными произведениями. На образе стенки  $DF$

$$\Lambda(i\tau) = \prod_{n=0}^{\infty} [(1 - 2q^{n+\frac{1}{2}} \cos \tau + q^{2n+1})^4 \prod_{j=1}^4 (1 - 2q^{n+\frac{1}{2}} F_j \cos \tau + q^{2n+1} F_j^2)^{-1}] \quad (4.2)$$

Выражение  $\Lambda(\sigma)$  для точек образа дуги Маха отличается лишь величиной  $\text{ch } \sigma$ , заменяющей  $\cos \tau$  в (4.2). На образе отраженного фронта  $AC$  получается выражение

$$|\Lambda(l + i\tau)| = \prod_{n=0}^{\infty} [(1 - 2q^n \cos \tau + q^{2n})^4 \prod_{j=1}^4 (1 - 2q^n F_j \cos \tau + q^{2n} F_j^2)^{-1}]$$

штрих указывает, что из первого сомножителя следует извлечь квадратный корень.

Конформное отображение прямоугольника (3.3) на нижнюю полуплоскость

$$\omega = \xi + i\eta = -\sqrt{k} \vartheta_2(-iz, q) / \vartheta_3(-iz, q) \quad (4.3)$$

позволяет сразу получить функцию  $L(z)$ . Точки  $A, C, D, F$  и  $z = z_0$  переходят в точки  $\xi = \mp 1, \xi = \pm k, \xi_0(z_0)$  действительной оси. Величины  $\vartheta_1 - \vartheta_4$  суть тэта-функции [15]; величина  $k$  зависит от величины  $q$

$$k^2 = 1 - k'^2, \quad \sqrt{k'} = (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots) / (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots)$$

Функцию  $L(z)$ , имеющую нужный кусочно-постоянный аргумент вдоль действительной оси, удобно записать в виде

$$L(z) = L_0(z) L_1(z) L_2(z) = [\omega(z) - \xi_0(z_0)] \frac{-i \sqrt{k'/k}}{\sqrt{1-\omega^2(z)}} \frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)} \quad (4.4)$$

Произведение первых двух множителей обобщает соответствующую функцию в решении Лайтхилла. В предельном ( $\gamma \rightarrow 0$ ) симметричном случае коэффициенты Фурье содержат слагаемые, порождающие ряд, сходящийся к  $-\ln L_2(z)$ ; этот множитель введен для упрощения их выражений при  $\gamma \neq 0$ .

На сторонах  $DF$ ,  $FA$  и  $AC$  прямоугольника (3.3) функция (4.3) имеет выражения

$$\xi(i\tau) = -\sqrt{k} \frac{\vartheta_2(\tau, q)}{\vartheta_3(\tau, q)}, \quad \xi(\sigma) = -\sqrt{k} \frac{\vartheta_4(\sigma, q')}{\vartheta_3(\sigma, q')}, \quad \xi(l+i\tau) = \sqrt{k} \frac{\vartheta_2(\tau, q)}{\vartheta_2(\tau, q)} \quad (4.5)$$

где  $\ln q \ln q' = \pi^2$ . Подстановка (4.5) в (4.4) дает контурные значения сомножителей функции  $L(z)$ . Для  $L_0^-(z)$  и  $L_2^-(z)$  результат очевиден. Для  $L_1^-(z)$  на  $DF$ ,  $FA$  и  $AC$  получаются выражения

$$L_1(i\tau) = -i \sqrt{k} \frac{\vartheta_3(\tau, q)}{\vartheta_4(\tau, q)}, \quad L_1(\sigma) = i \sqrt{k} \frac{\vartheta_3(\sigma, q')}{\vartheta_2(\sigma, q')}, \quad L_1(l+i\tau) = \sqrt{k} \frac{\vartheta_2(\tau, q)}{\vartheta_1(\tau, q)}$$

В произвольной точке прямоугольника (3.3)

$$L_1(z) = -i \sqrt{k} \vartheta_3(-iz, q) / \vartheta_4(-iz, q)$$

§ 5. Решение. Имея функцию  $\Gamma_0(z)$ , решение исходной неоднородной задачи нетрудно выписать по формулам развитой теории [16, 17]; несложная проверка подтверждает его справедливость

$$\Gamma(z) = \Phi(z) \left[ -\frac{1}{i\pi} \frac{p_4 \xi_{\sigma'}(\sigma_G)}{\Phi(\sigma_G)} \frac{1}{\xi(\sigma_G) - \omega(z)} + c L_0(z) \right] \quad (5.1)$$

$$\Phi(z) = \Lambda(z) L_1(z) L_2(z)$$

Здесь производная  $\xi_{\sigma}'$  представляется формулой [15]

$$\xi_{\sigma}'(\sigma_G) = \frac{2K k' \vartheta_1(\sigma_G, q') \vartheta_2(\sigma_G, q')}{\pi k \sqrt{k} \vartheta_3^2(\sigma_G, q')} \quad (5.2)$$

$$2K/\pi = (1 + 2q + 2q^2 + 2q^4 + \dots)^2$$

Контурные значения (5.1) даются выражением

$$\Gamma^-(z) = \Phi^-(z) \left[ -\frac{1}{i\pi} \frac{p_4 \xi_{\sigma'}(\sigma_G)}{\Phi(\sigma_G)} \frac{1}{\xi(\sigma_G) - \xi(z)} + c L_0(z) \right] + p_4 \delta(\sigma - \sigma_G) \quad (5.3)$$

Из (5.3) следует, что вдоль  $AC$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = -\operatorname{Im} \Phi(l+i\tau) \left\{ c [\omega(l+i\tau) - \xi_0(z_0)] - \frac{c_0}{\xi(\sigma_G) - \xi(l+i\tau)} \right\} \quad (5.4)$$

где

$$\operatorname{Im} \Phi(l + i\tau) = L_1(l + i\tau) L_2(l + i\tau) |\Lambda(l + i\tau)| b(\tau) / \sqrt{b^2(\tau) + 1}$$

$$c_0 = \frac{p_4 \xi_{\sigma}'(\sigma_G) \vartheta_2(\sigma_G, q')}{\pi \sqrt{k} \Lambda(\sigma_G) L_2(\sigma_G) \vartheta_3(\sigma_G, q')}$$

Все входящие сюда функции действительны и определены в §§ 3 и 4. Подстановка (5.4) и величины  $y = mtg\theta$  с учетом (3.4) в (3.6) и с введением обозначений

$$c_1 = \frac{\sqrt{1-m^2} M_1(\delta_2 - \delta_1)}{B}, \quad \Psi(\tau) = \frac{|\Lambda(l + i\tau)| L_2(l + i\tau) b(\tau)}{\sqrt{b^2(\tau) + 1} \vartheta_1(\tau, q)}, \quad c_2 = p_5 - p_4$$

приводит к системе, имеющей решение

$$c = \frac{c_1 I_4 - c_2 I_2 - c_0 (I_6 I_4 - I_5 I_2)}{I_1 I_4 - I_2 I_3}, \quad \xi_0(z_0) = - \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{c_1 I_3 - c_2 I_1 - c_0 (I_6 I_3 - I_5 I_1)}{c_1 I_4 - c_2 I_2 - c_0 (I_6 I_4 - I_5 I_2)} \quad (5.5)$$

Интегралы

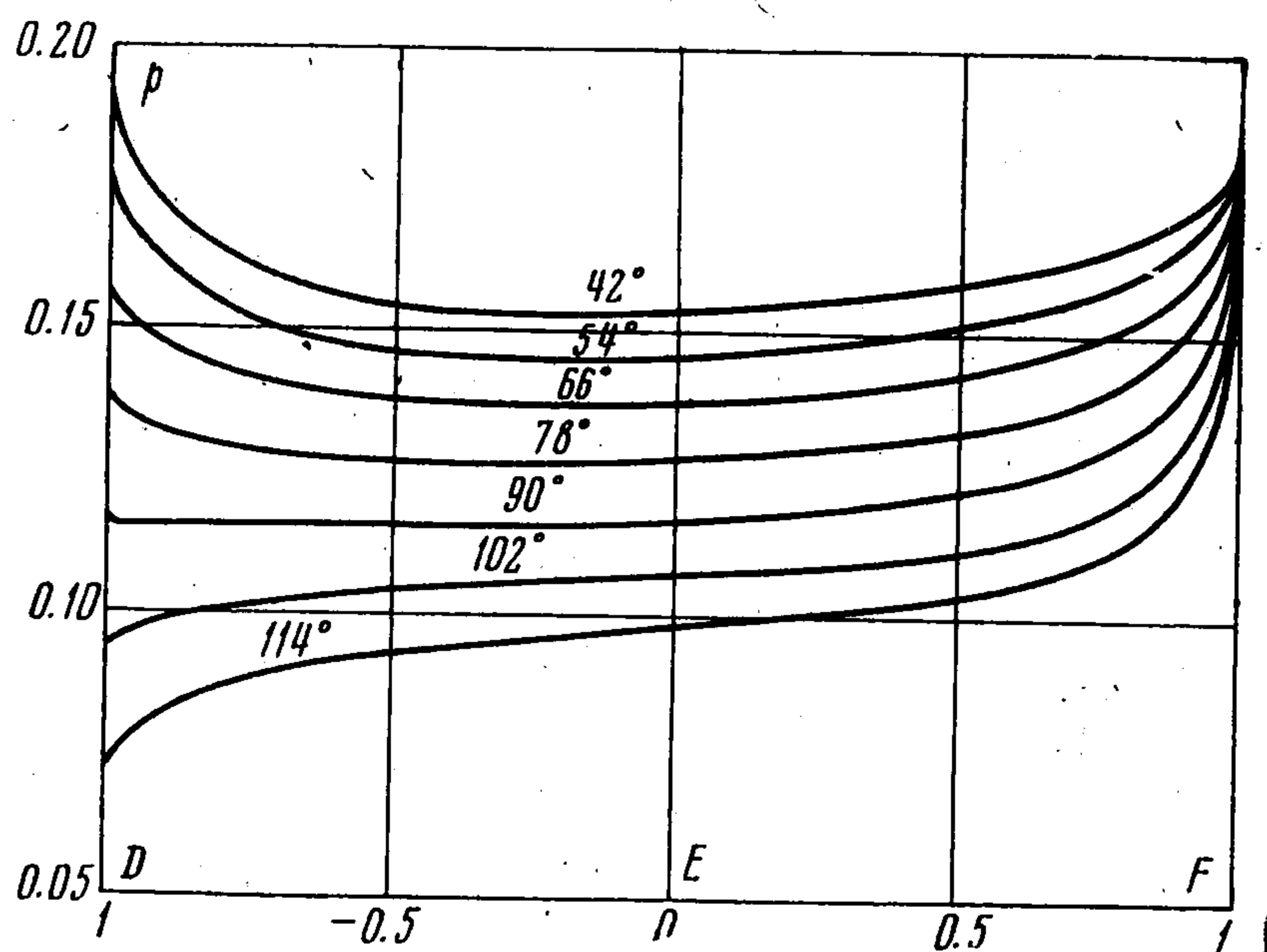
$$I_1 = \sqrt{1-m^2} \int_0^{\pi} \vartheta_3(\tau, q) \Psi(\tau) \frac{d\tau}{y(\tau)}, \quad I_2 = \sqrt{1-m^2} \int_0^{\pi} \vartheta_2(\tau, q) \Psi(\tau) \frac{d\tau}{y(\tau)},$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} \vartheta_3(\tau, q) \Psi(\tau) d\tau, \quad I_4 = \int_0^{\pi} \vartheta_2(\tau, q) \Psi(\tau) d\tau$$

$$I_5 = \int_0^{\pi} \frac{\vartheta_2(\tau, q) \Psi(\tau) d\tau}{\xi(\sigma_G) - \xi(i\tau)}, \quad I_6 = \sqrt{1-m^2} \int_0^{\pi} \frac{\vartheta_2(\tau, q) \Psi(\tau) d\tau}{\xi(\sigma_G) - \xi(i\tau)} \frac{d\tau}{y(\tau)}$$

определяются численно.

Зная  $\xi_0(z_0)$ , можно определить  $z_0$  при помощи формул (4.5) и таблиц тэта-функций, однако для решения это не требуется, следует лишь подставить в (5.1) и (5.3) значения  $c$  и  $\xi_0(z_0)$ , получаемые из (5.5).



Фиг. 2

**Замечание 5.1.** Априорная форма записи решения в работе автора [2] не отражает наличия третьего нуля функции  $\Gamma_0$  на контуре прямоугольной

области. Содержащее его решение однородной задачи получится умножением фигурирующей там функции  $\Gamma_0$  на множитель  $(\omega - \xi_0) / (\omega - 1/k)^2$  с последующим определением  $\xi_0$  совместно с постоянным множителем под теми же условиями нормировки и тем же путем, что и в данной работе.

§ 6. Давление на стенку. Распределение давления определяется интегрированием частной производной  $\partial p / \partial \tau$  вдоль образа стенки  $DF$  в плоскости  $z$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = -\operatorname{Im} \Gamma(i\tau) = \Lambda(i\tau) L_2(i\tau) \frac{\partial_3(\tau, q)}{\partial_4(\tau, q)} \left[ cL_0(i\tau) - \frac{V\bar{k}c_0}{\xi(\sigma_G) - \xi(i\tau)} \right]$$

и вычислением координаты  $r = |(M \cos \tau - 1) / (M - \cos \tau)|$ , отсчитываемой от точки  $E$  вдоль стенки в сторону точки  $F$  (при  $\tau < \arccos M^{-1}$ ) или в сторону точки  $D$ .

На фиг. 2 приведены результаты расчетов, проведенных для  $\varepsilon = 0.1465$ ,  $\beta = 15.5^\circ$ ,  $M_\infty = 2.207$ . Значения угла  $\chi$  указаны на графиках.

Усматривается как существенное изменение величины, так и смещение экстремального значения]величины  $p$  к точке  $D$  и за нее с ростом угла  $\chi$  соответственно положению точки  $z_0$ .

Поступила 15 V 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3. Л.—М., ОНТИ, 1937.
2. Тер-Минасянц С. М. Задача о дифракции плоской волны на клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 4, стр. 775—778.
3. Ter-Minassians S. M. The diffraction accompanying the regular reflexion of a plane obliquely impinging shock wave from the walls of an obtuse wedge. J. Fluid Mech., 1969, vol. 35, pt 2, pp. 391—410.
4. Lighthill M. J. The diffraction of blast I. Proc. Roy. Soc. A 198, 1949, pp. 454—470.
5. Lighthill M. J. The diffraction of blast II, Proc. Roy. Soc. A 200, 1950, pp. 554—565.
6. Ингер Г. Р. Взаимодействие взрывной волны с тонким клином, движущемся с гиперзвуковой скоростью. Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 3.
7. Ингер Г. Р. Косое падение взрывной волны на тонкое тело, летящее с гиперзвуковой скоростью. Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 8.
8. Голубинский А. И. Набегание ударной волны на клин, движущийся со сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
9. Бежанов К. А. Дифракция ударной волны на клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
10. Тер-Минасянц С. М. Регулярное встречное взаимодействие плоских ударных волн. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 2.
11. Зауэр Р. Течения сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
12. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
13. Smyrl J. L. The impact of a shock-wave on a thin two-dimensional aerofoil moving at supersonic speeds. J. Fluid Mech., 1963, vol. 15, pt 2, pp. 223—240.
14. Бриггс Ж. Л. Замечания о расчете косых скачков уплотнения. Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 5.
15. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.—Л., ОНТИ, 1936.
16. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
17. Гахов Ф. Д. Краевые задачи, изд. 2. М., Физматгиз, 1963.