

ЗАДАЧА О ВИХРЯХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА ПРИ ВХОДЕ АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ В МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Ю. П. Емец

(Киев)

Изучается электрическое поле в потоке движущейся среды с тензорной проводимостью, обусловленной эффектом Холла, в области резкого изменения внешнего магнитного поля. Показано, что структура образуемых в этой зоне вихрей электрического тока, электромагнитные усилия и джоулева диссипация индуцируемых токов определяются в основном полем скоростей и физическими свойствами движущейся среды, параметры которой (электропроводность и коэффициент Холла), в общем случае, нельзя считать постоянными при изменении магнитного поля.

В математическом отношении решение исходной краевой задачи Римана — Гильберта аналитическим продолжением по принципу симметрии сводится к решению неоднородной задачи Римана с разрывными коэффициентами.

Задача о движении проводящей среды в области неоднородного внешнего магнитного поля естественно возникает при изучении явлений в концевых зонах магнитогидродинамических каналов при входе плазменного потока в магнитное поле и выходе из него. В предположении постоянства скорости и физических свойств движущейся среды задача рассматривалась Дж. В. Саттоном [1], решение которого использовалось А. Б. Ватажиным для нахождения деформации профиля скорости [2].

1. Пусть в плоском канале $0 < y < h$, $-\infty < x < \infty$ с непроводящими стенками движется ионизованный газ $v(u(x, y), v(x, y), 0)$, в котором проявляется эффект Холла, вызывающий анизотропию проводимости, и пусть внешнее магнитное поле $H(0, 0, H_z(x))$, направленное нормально потоку газа, при $x = 0$, $0 < y < h$ изменяется скачком от $H_1(x < 0)$ до $H_2(x > 0)$, оставаясь постоянным в каждой из полуполос $x < 0$, $x > 0$.

Задание неоднородного магнитного поля ступенчатой функцией, представляющее собой идеализацию изменения магнитного поля с большим градиентом, удобно в теоретическом рассмотрении; оно позволяет изучить эффекты с четко выраженными вихрями электрического тока и, кроме того, дает возможность при помощи эффективных методов теории краевых задач получить полное аналитическое решение для произвольного поля скоростей. Принятое допущение не вносит заметной погрешности в результаты, когда длина l , на которой изменяется магнитное поле, мала (например, по сравнению с шириной канала $l \ll h$). При учете конечного значения l вихри тока будут менее четкими, а интегральные величины электромагнитных усилий и джоулевой диссипации индуцированных токов будут меньше по сравнению с предельным случаем $l \rightarrow 0$.

Два следующих предположения обычны для рассматриваемого класса задач: в силу малости магнитного числа Рейнольдса ($R_m \ll 1$) не учитывается индуцированное магнитное поле токов в плазме, а для самой плазмы принимается модель несжимаемой среды.

В изотермическом случае, согласно сделанным предположениям, исходная система уравнений может быть записана в форме

$$\begin{aligned} E_x(x, y) &= \frac{1}{\sigma(H)} j_x(x, y) + R(H) H j_y(x, y) - \frac{1}{c} v H \\ E_y(x, y) &= -\frac{1}{\sigma(H)} j_y(x, y) - R(H) H j_x(x, y) + \frac{1}{c} u H \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

где электропроводность $\sigma(H)$ и коэффициент Холла $R(H)$, зависящие от магнитного поля, определяются через компоненты тензора электропроводности $\sigma_{xx}(H)$, $\sigma_{xy}(H)$ формулами

$$\sigma(H) = \frac{\sigma_{xx}(H) + \sigma_{xy}^2(H)}{\sigma_{xx}(H)}, \quad R(H) = \frac{\sigma_{xy}(H)}{H[\sigma_{xx}^2(H) + \sigma_{xy}^2(H)]} \quad (1.2)$$

Из системы уравнений (1.1) вытекает, что в каждой из полуполос ($0 < y < h$, $x < 0$ и $x > 0$), где $H_k = \text{const}$ ($k = 1, 2$), можно ввести комплексный электрический ток

$$j(z) = j_x(x, y) - i j_y(x, y) \quad (z = x + iy)$$

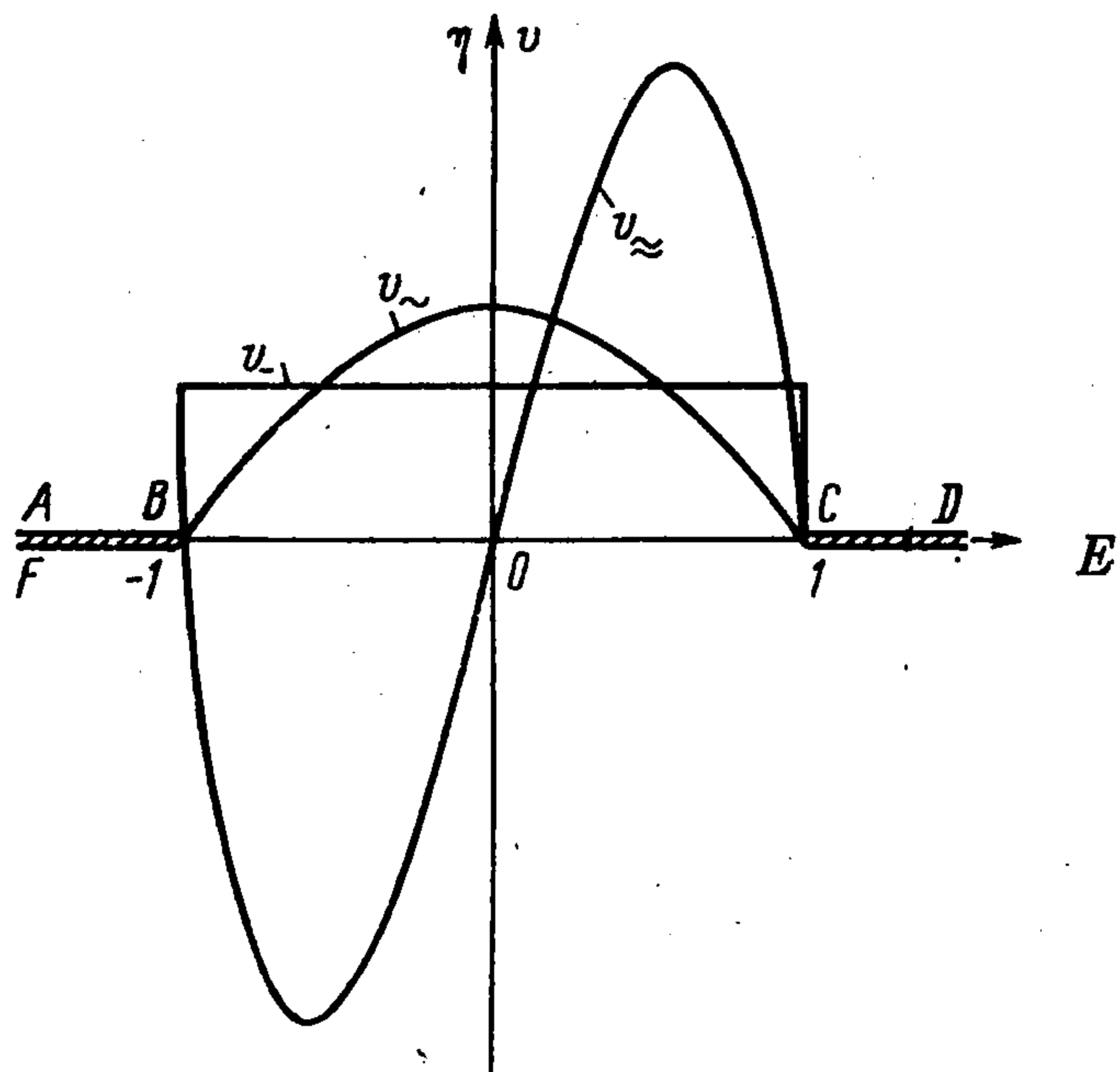
Полосу $-\infty < x < \infty$, $0 < y < h$ конформно отобразим на плоскость $\zeta = \xi + i\eta$ функцией $\zeta = \text{ch}(\pi z / h)$. При этом полуполосы $0 < y < h$, $x > 0$ и $x < 0$ отобразятся соответственно на верхнюю и нижнюю полуплоскости, а граничным линиям $x = 0$ и $x = h$ будут соответствовать разрезы по лучам $\eta = 0$, $\xi < -1$ и $\xi > 1$.

Краевую задачу поставим для преобразованной области, тогда решение сформулированной выше задачи будет точное для течения анизотропно проводящей среды через общее сечение $\eta = 0$, $-1 < \xi < 1$ двух «каналов»,

представленных полуплоскостями $\text{Im} \zeta > 0$ и $\text{Im} \zeta < 0$, в которых $H_k = \text{const}$, а в сечении изменяется скачком ($H_1 \neq H_2$). Переход к решению задачи для полосы осуществляется для полученного ниже решения обратным отображением $\zeta \rightarrow z$.

Распределение полевого тока находится из решения системы (1.1) со следующими граничными условиями: в сечении меретекания плазмы ($\eta = 0$, $-1 < \xi < 1$) нормальная составляющая вектора плотности тока и касательная составляющая напряженности поля непрерывны, на остальных участках оси ξ (диэлектриках) $j_{\eta k} = 0$, $k = 1, 2$ (в дальнейшем индексы 1 и 2 относятся к функциям в полуплоскостях $\text{Im} \zeta > 0$ и $\text{Im} \zeta < 0$ соответственно; фиг. 1)

$$\begin{aligned} j_{\eta 1} &= 0 \quad \text{на } AB \text{ и } CD, \\ j_{\eta 2} &= 0 \quad \text{на } FB \text{ и } CE, \end{aligned} \quad j_{\eta 1} = j_{\eta 2}, \quad E_{\xi 1} = E_{\xi 2} \quad \text{на } BC \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Вихри тока существуют только в области, примыкающей к неоднородности магнитного поля, поэтому на бесконечности ток исчезает. Для уточнения асимптотических условий при $|\zeta| \rightarrow \infty$, что принципиально в данной постановке краевой задачи, необходимо учесть очевидное интегральное соотношение

$$\int_{-1}^1 j_{\eta k}(\xi, 0) d\xi = 0 \quad (1.4)$$

справедливое при отсутствии каких-либо внешних источников тока в плоскости ζ .

2. Используя симметрию задачи, введем в рассмотрение две кусочно-голоморфные функции

$$\Psi_1(\zeta) = \begin{cases} \Psi_1^+(\zeta) = j_1(\zeta) = j_{\xi 1}(\xi, \eta) - ij_{\eta 1}(\xi, \eta) & \text{при } \text{Im } \zeta > 0 \\ \Psi_1^-(\zeta) = \bar{j}_1(\zeta) = j_{\xi 1}(\xi, -\eta) + ij_{\eta 1}(\xi, -\eta) & \text{при } \text{Im } \zeta < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\Psi_2(\zeta) = \begin{cases} \Psi_2^+(\zeta) = \bar{j}_2(\zeta) = j_{\xi 2}(\xi, \eta) + ij_{\eta 2}(\xi, \eta) & \text{при } \text{Im } \zeta > 0 \\ \Psi_2^-(\zeta) = j_2(\zeta) = j_{\xi 2}(\xi, -\eta) - ij_{\eta 2}(\xi, -\eta) & \text{при } \text{Im } \zeta < 0 \end{cases}$$

Согласно граничным условиям (1.3), функции $\Psi_k(\zeta)$ ($k = 1, 2$) удовлетворяют соотношениям

$$\Psi_1^+(\zeta) = -\Psi_2^+(\zeta), \quad \Psi_1^-(\zeta) = -\Psi_2^-(\zeta) \quad (2.2)$$

и могут быть представлены интегралом типа Коши

$$\Psi_k(\zeta) = (-1)^k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(\xi) d\xi}{\xi - \zeta} \quad (k = 1, 2) \quad (2.3)$$

где $\gamma(\xi) = j_{\eta k}(\xi)$. Разложение (2.3) в ряд по убывающим степеням ζ с учетом соотношения (1.4) дает представление $\Psi_k(\zeta)$ при больших $|\zeta|$

$$\Psi_k(\zeta) = (-1)^{k-1} \left[\frac{A}{\zeta^2} + O\left(\frac{1}{\zeta^3}\right) \right], \quad A = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \xi \gamma(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

Граничные условия, переписанные теперь для величин комплексного тока, например, в верхней полуплоскости принимают вид

$$\begin{aligned} (\sigma_1 + \sigma_2) j_{\xi 1} + (\sigma_2 \beta_1 - \sigma_1 \beta_2) j_{\eta 1} &= \frac{\sigma_1 \sigma_2}{c} v (H_1 - H_2) \quad \text{на } L_1 \quad (L_1 = BC) \\ j_{\eta 1} &= 0 \quad \text{на } L_2 \quad (L_2 = AB + CD = FB + CE) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\beta_k = \sigma_k R_k H_k = \sigma (H_k) R (H_k) H_k \quad (k = 1, 2) \quad (2.6)$$

При помощи кусочно-голоморфных функций $\Psi_k(\zeta)$, определенных в (2.1), задача Римана — Гильберта (2.5) редуцируется к следующей неоднородной задаче Римана с разрывными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \Psi_1^+(\xi) &= - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - i(\sigma_2 \beta_1 - \sigma_1 \beta_2)}{\sigma_1 + \sigma_2 + i(\sigma_2 \beta_1 - \sigma_1 \beta_2)} \Psi_1^-(\xi) + \frac{2\sigma_1 \sigma_2 (H_1 - H_2) v(\xi)}{c [\sigma_1 + \sigma_2 + i(\sigma_2 \beta_1 - \sigma_1 \beta_2)]} \quad \text{на } L_1 \\ \Psi_1^+(\xi) &= \Psi_1^-(\xi) \quad \text{на } L_2, \quad \Psi_1(\zeta) = \frac{A}{\zeta^2} + O(\zeta^{-3}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Общее решение задачи (2.7) дается формулой [3, 4]

$$\Psi_1(\zeta) = \frac{\sigma_1 \sigma_2 (H_1 - H_2) X_\nu(\zeta)}{\pi c i [\sigma_1 + \sigma_2 + i(\sigma_2 \beta_1 - \sigma_1 \beta_2)]} \int_{-1}^1 \frac{v(\xi) d\xi}{X_\nu^+(\xi)(\xi - \zeta)} \quad (-1 < \xi < 1) \quad (2.8)$$

Здесь $v(\xi)$ — заданная на L_1 функция, определяющая профиль скорости, должна удовлетворять условию Гельдера. Вид канонической функции $X_\nu(\zeta)$ в (2.8) устанавливается выбором профиля скорости на линии скачка магнитного поля.

Все множество решений, допускаемых задачей Римана (2.7) при варьировании $v(\xi)$ и содержащихся в (2.8), можно разбить на классы в зависимости от выполнения некоторых интегральных условий, которым удовлетворяет функция $v(\xi)$ на L_1 или, в терминах теории краевых задач, в зависимости от индекса задачи Римана.

Опуская промежуточные вычисления, приведем окончательный результат:

1°. Решение, ограниченное вблизи стенки ABF и не ограниченное вблизи стенки DCE (решение с нулевым индексом: $\kappa = 0$). В этом случае условие, накладываемое на $v(\xi)$, и вид канонической функции $X_B(\zeta)$ даются формулами

$$\int_{-1}^1 v(\xi) (1 + \xi)^{-1/2-\varepsilon} (1 - \xi)^{1/2+\varepsilon} d\xi = 0, \quad X_B(\zeta) = (\zeta + 1)^{1/2+\varepsilon} (\zeta - 1)^{-1/2-\varepsilon} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sigma_2 \beta_1 - \sigma_1 \beta_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad 0 \leq |\varepsilon| < \frac{1}{2} \quad (2.10)$$

Здесь и в последующих формулах под канонической функцией $X_\nu(\zeta)$ подразумевается ветвь, которая голоморфна в плоскости ζ и принимает действительные положительные значения $\operatorname{Re} X_\nu^+(\xi)$ на верхней стороне L_1 .

2°. Решение, ограниченное вблизи стенки DCE и не ограниченное вблизи стенки ABF ($\kappa = 0$)

$$\int_{-1}^1 v(\xi) (1 + \xi)^{1/2-\varepsilon} (1 - \xi)^{-1/2+\varepsilon} d\xi = 0, \quad X_C(\zeta) = (\zeta + 1)^{-1/2+\varepsilon} (\zeta - 1)^{1/2-\varepsilon} \quad (2.11)$$

3°. Решение, ограниченное вблизи двух стенок ABF и DCE (решение с отрицательным индексом: $\kappa = -1$). Закон изменения $v(\xi)$ удовлетворяет в этом случае интегральным соотношениям

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 v(\xi) (1 + \xi)^{-1/2-\varepsilon} (1 - \xi)^{-1/2+\varepsilon} d\xi &= 0 \\ \int_{-1}^1 v(\xi) \xi (1 + \xi)^{-1/2-\varepsilon} (1 - \xi)^{-1/2+\varepsilon} d\xi &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

первое из которых есть, очевидно, сумма интегральных условий (2.9) и (2.11).

Каноническая функция дается формулой

$$X_{AB}(\xi) = (\xi + 1)^{1/2+\varepsilon} (\xi - 1)^{1/2-\varepsilon} \quad (2.13)$$

4°. Решение, не ограниченное вблизи двух стенок ABF и DCE ($\kappa = 1$). Если $v(\xi)$ не удовлетворяет на L_1 ни одному из условий в (2.9), (2.11) или системе (2.12), то в формуле (2.8) имеем

$$X_v(\zeta) = X_0(\zeta), \quad X_0(\zeta) = (\zeta + 1)^{-1/2+\varepsilon} (\zeta - 1)^{-1/2-\varepsilon} \quad (2.14)$$

3. Рассмотрим теперь приложение общей теории расчета полей к задаче о входе проводящей среды в магнитное поле для трех характерных профилей скорости (фиг. 1)

$$v_- = V = \text{const}, \quad v_{\sim} = \frac{3}{2} V (1 - \xi^2), \quad v_{\approx} = 8V\xi(1 - \xi^2) \quad (3.1)$$

Выбор зависимостей указанного вида, вообще говоря, рассчитываемых исходя из идеальных, вязких и других свойств движущейся среды, продиктован соображениями анализа поведения вихрей тока при изменении эпюры скорости, когда расход плазмы Q через полное сечение канала при v_- и v_{\sim} и половину сечения канала при v_{\approx} одинаков

$$Q_- = Q_{\sim} = Q_{\approx} = \int_{-1}^1 v_-(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 v_{\sim}(\xi) d\xi = \int_0^1 v_{\approx}(\xi) d\xi \quad (3.2)$$

В случае знакопеременного профиля скорости v_{\approx} общий расход через сечение BC равен нулю и имеем в сущности вихрь скорости в зоне неоднородного магнитного поля.

Непосредственной проверкой интегральных условий (2.9), (2.11) и (2.12) для рассматриваемых зависимостей $v(\xi)$ (3.1) легко убедиться, что общее решение соответствует классу решений (2.14) с особенностями на стенках канала.

Применяя теорему Коши о вычетах и формулы Сохоцкого — Племяля, получаем выражения для комплексного тока $j(\zeta) = j_{\xi}(\xi, \eta) - ij_{\eta}(\xi, \eta)$ и значения нормальной и касательной составляющих тока на линии скачка магнитного поля:

(a) при $v_- = V = \text{const}$.

$$\begin{aligned} j_-(\zeta) &= \Delta(\sigma_k, H_k, V) [1 + f_-(\zeta) X_0(\zeta)], \quad f_-(\zeta) = 2\varepsilon - \zeta \\ j_{\xi-}(\xi) &= \Delta(\sigma_k, H_k, V) [1 - \sin \pi \varepsilon f_-(\xi) X'(\xi)] \\ j_{\eta-}(\xi) &= \Delta(\sigma_k, H_k, V) \cos \pi \varepsilon f_-(\xi) X'(\xi) \end{aligned} \quad (3.3)$$

(b) при $v_{\sim} = \frac{3}{2} V (1 - \xi^2)$

$$\begin{aligned} j_{\sim}(\zeta) &= \frac{3}{2} \Delta(\sigma_k, H_k, V) [1 - \zeta^2 + f_{\sim}(\zeta) X_0(\zeta)] \\ j_{\xi_{\sim}}(\xi) &= \frac{3}{2} \Delta(\sigma_k, H_k, V) [1 - \xi^2 - \sin \pi \varepsilon f_{\sim}(\xi) X'(\xi)] \\ j_{\eta_{\sim}}(\xi) &= \frac{3}{2} \Delta(\sigma_k, H_k, V) \cos \pi \varepsilon X'(\xi) \\ f_{\sim}(\zeta) &= \zeta^3 - 2\varepsilon \zeta^2 + (2\varepsilon^2 - \frac{3}{2}) \zeta - \frac{4}{3} \varepsilon^3 + \frac{7}{3} \varepsilon \end{aligned} \quad (3.4)$$

(c) при $v = 8V\xi(1 - \xi^2)$

$$\begin{aligned} j_{\approx}(\zeta) &= 8\Delta(\sigma_k, H_k, V) [\zeta(1 - \zeta) + f_{\approx}(\zeta) X_0(\zeta)] \\ f_{\approx}(\zeta) &= \zeta^4 - 2\varepsilon \zeta^3 + (2\varepsilon^2 - \frac{3}{2}) \zeta^2 + (\frac{7}{3} \varepsilon - \frac{4}{3} \varepsilon^3) \zeta + \frac{2}{3} \varepsilon^4 - \frac{5}{3} \varepsilon^2 + \frac{3}{8} \\ j_{\xi_{\approx}}(\xi) &= 8\Delta(\sigma_k, H_k, V) [\xi(1 - \xi)^2 - \sin \pi \varepsilon f_{\approx}(\xi) X'(\xi)] \\ j_{\eta_{\approx}}(\xi) &= 8\Delta(\sigma_k, H_k, V) \cos \pi \varepsilon f_{\approx}(\xi) X'(\xi) \end{aligned} \quad (3.5)$$

В формулах (3.3) — (3.5) использованы обозначения

$$\Delta(\sigma_k, H_k, V) = \frac{\sigma_1 \sigma_2 (H_1 - H_2) V}{c(\sigma_1 + \sigma_2)}, \quad X'(\xi) = (1 + \xi)^{-1/2+\varepsilon} (1 - \xi)^{-1/2-\varepsilon} \quad (3.6)$$

Отметим одно общее свойство, присущее всем решениям независимо от вида функции $v(\xi)$. Если выполняется соотношение

$$\sigma_2 \beta_1 - \sigma_1 \beta_2 = 0 \quad (3.7)$$

которое, согласно (2.6), записывается в другой форме

$$R_1(H)H_1 = R_2(H)H_2 \quad (3.8)$$

то $\varepsilon = 0$ и распределение тока имеет такой же вид, как и при скалярной проводимости. Физически это объясняется тем, что анизотропия проводимости определяется эффектом Холла, интенсивность проявления которого, в свою очередь, зависит от величин $R(H)$ и H . Если выполняется соотношение (3.8), то эффект Холла проявляется одинаково во всей области течения плазмы и тензорный характер проводимости не отразится на распределении тока. Равенство (3.7), или эквивалентное ему равенство (3.8), имеет место всегда, когда рассматриваются электрические поля в средах с кусочно-анизотропной проводимостью [3].

На фиг. 2—4 приведены графики относительных величин плотностей тока

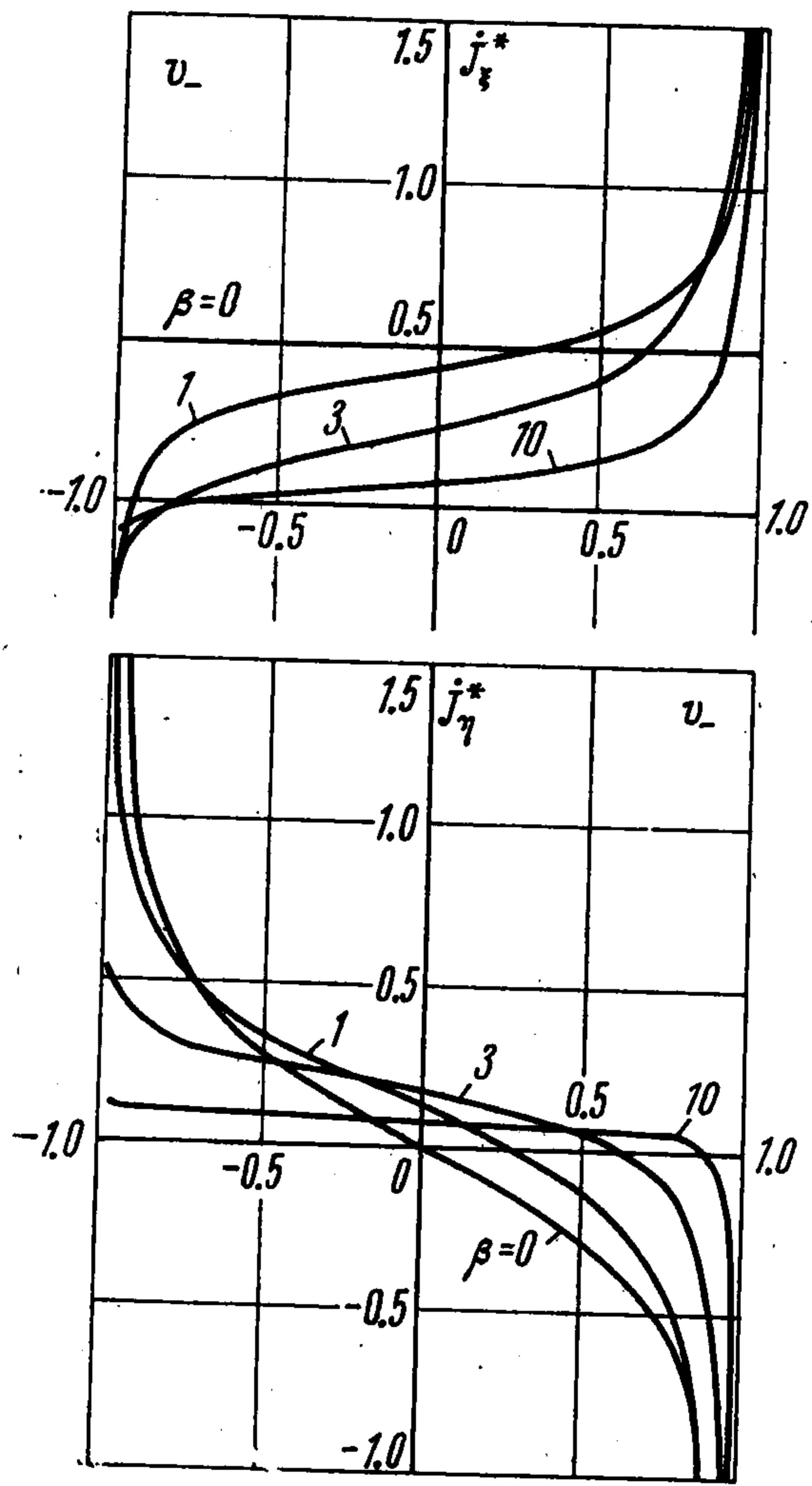
$$j_\xi^*(\xi) = j_\xi(\xi) / \Delta(\sigma, H, V), \quad j_\eta^*(\xi) = j_\eta(\xi) / \Delta(\sigma, H, V)$$

на линии скачка магнитного поля $-1 < \xi < 1$, $\eta = 0$ для $v_-(\xi)$, $v_\sim(\xi)$ и $v_\approx(\xi)$ и значений $\beta = 0, 1, 3$ и 10 , построенные по формулам (3.3) — (3.6) в предположении, что

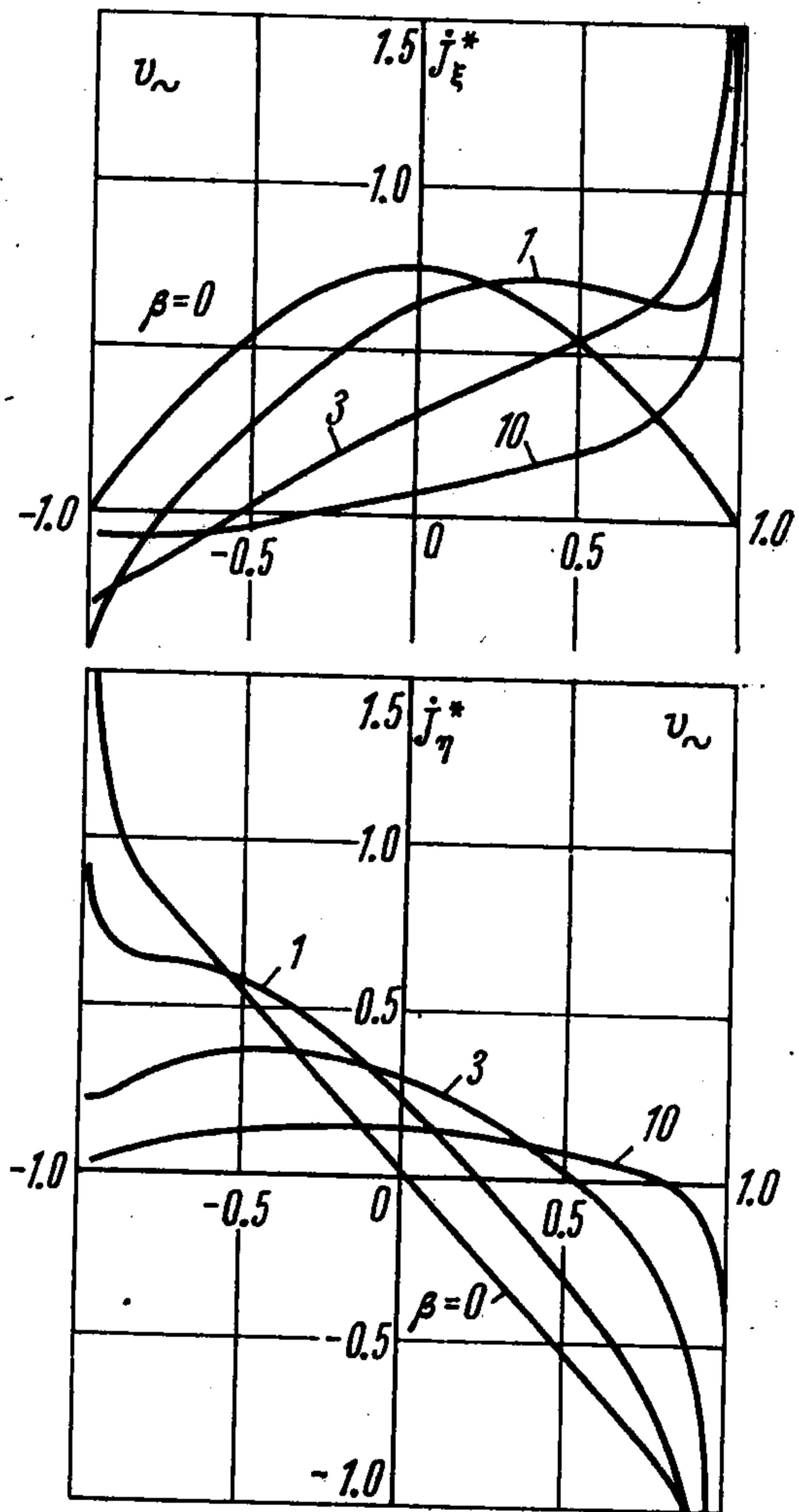
$$H = H_1, \quad H_2 = 0, \quad \sigma = \sigma_1 = \sigma_2, \quad \beta = \beta_1 = \sigma R(H)H \\ (\varepsilon = \pi^{-1} \operatorname{arctg} \beta / 2)$$

Как видно из фиг. 2, 3, электрическое поле характеризуется концентрацией тока на стенках канала (с интегрируемыми особенностями в точках B и C) и нарушением симметрии вихрей тока относительно оси η при $\beta \neq 0$. С увеличением холловского параметра $\beta = \sigma R(H)H$ центры вихрей тока (точки на оси ξ , в которых $j_\eta^*(\xi) = 0$) смещаются к стенке канала. Интенсивность токов при $\beta < 10$ больше для неоднородного, «вязкого» профиля скорости $v_\sim(\xi)$. Однако при больших β распределение токов в вихрях приблизительно одинаковое как для $v_-(\xi)$, так и для $v_\sim(\xi)$. Интересно отметить, что и в случае знакопеременной скорости $v_\approx(\xi)$ образуются два центра вихревых токов, один из которых смещается в направлении оси η (фиг. 4), а второй — при изменении β остается почти неподвижным.

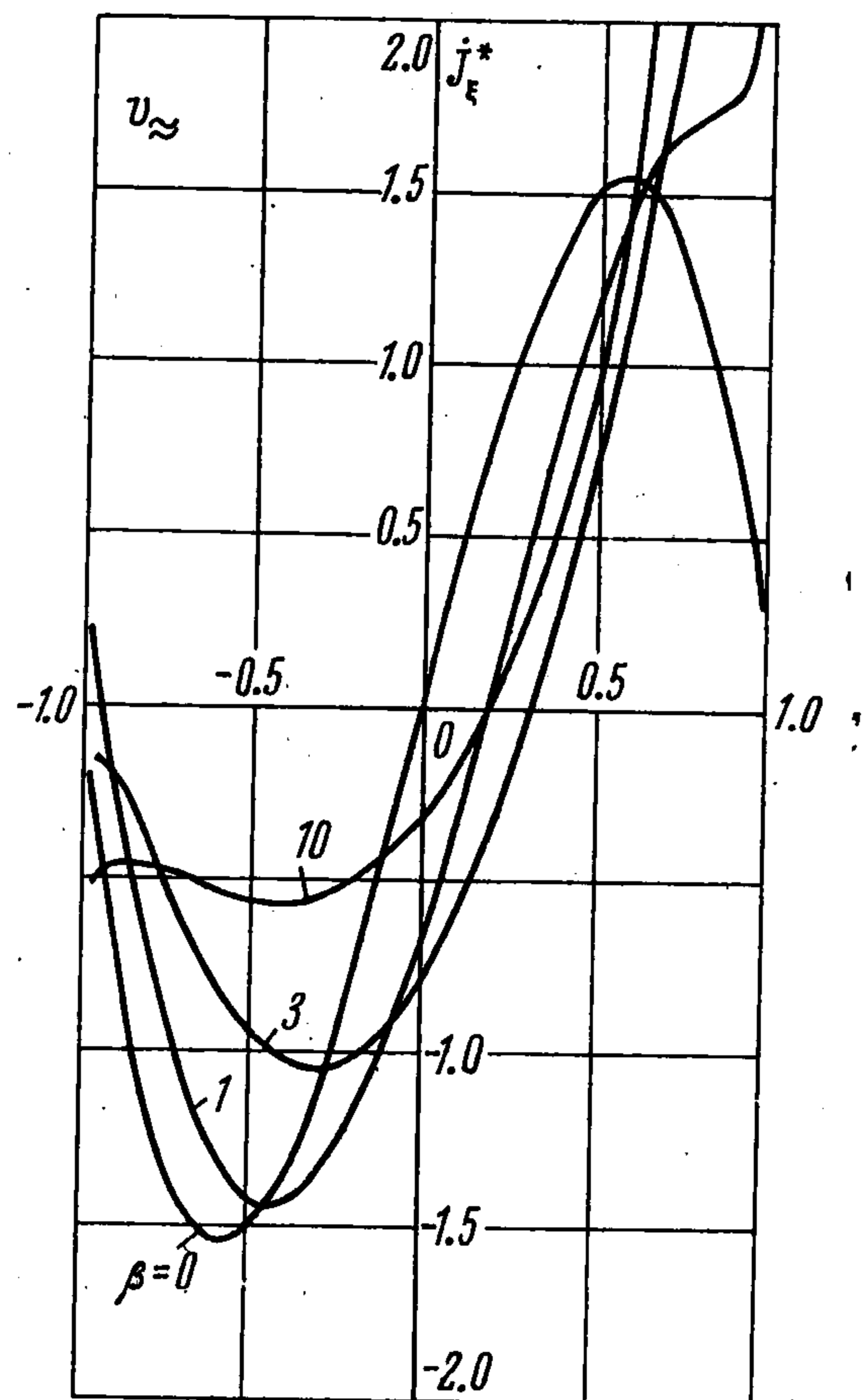
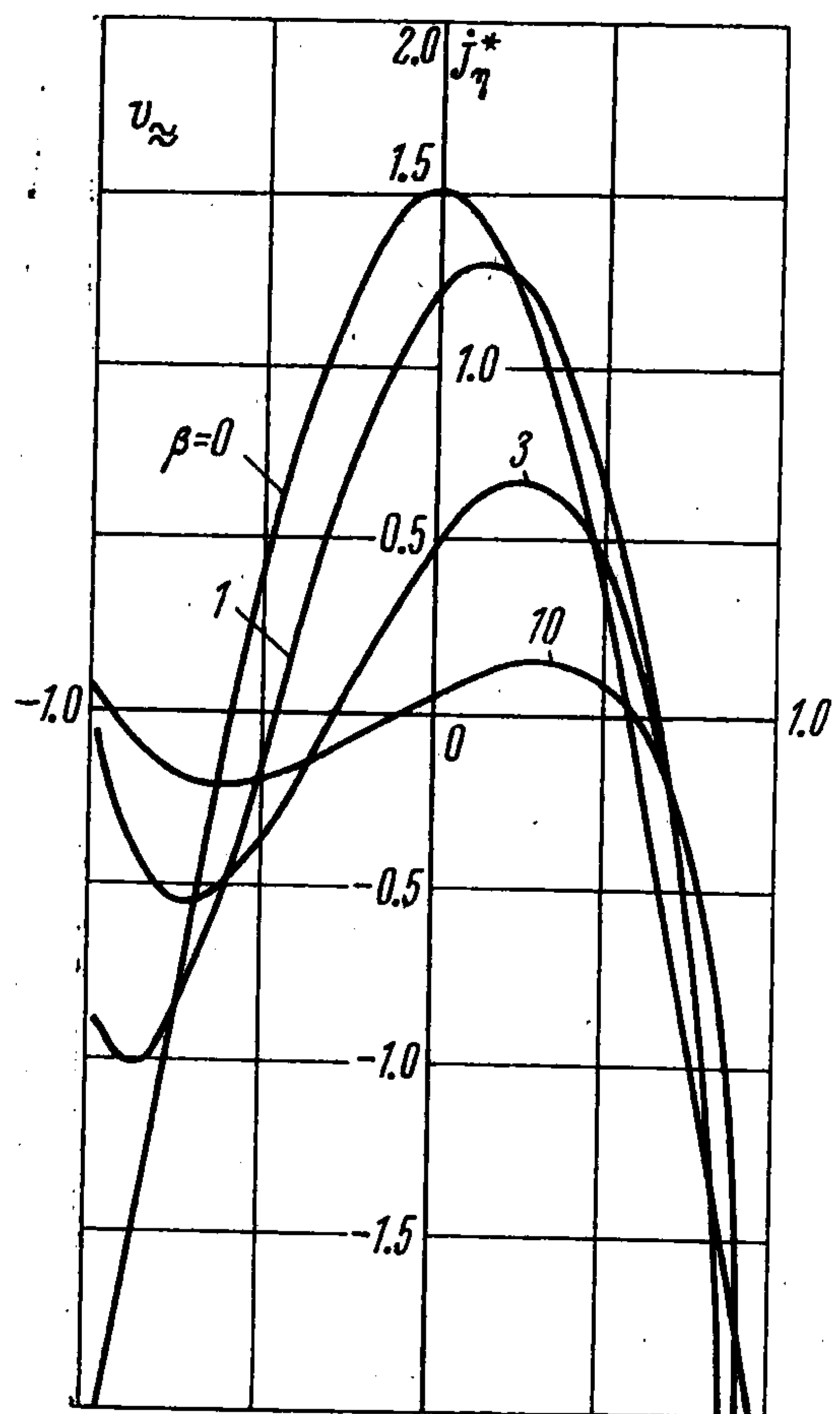
4. Интегральные характеристики — джоулева диссипация и электромагнитные силы индуцируемых токов — более наглядно определяют влияние деформации профиля скорости и изменения холловского параметра β на формирование циркуляционных токов.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

В общем случае джоулева диссипация Q_j в канале вычисляется по формуле

$$Q_j = \iint \frac{j^2}{\sigma} d\xi d\eta = \iint \left[\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \right] d\xi d\eta \quad (4.1)$$

где двойной интеграл берется по всей разрезанной плоскости ζ и используется запись обобщенного закона Ома в векторной форме

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} - \sigma R(H) \mathbf{j} \times \mathbf{H} \quad (4.2)$$

Применение формулы Гаусса — Остроградского показывает, что двойной интеграл от первого члена в квадратных скобках равен нулю и формула (4.1), после перестановки \mathbf{j} и \mathbf{v} в смешанном векторном произведении, приводится к виду

$$Q_j = -\frac{1}{c} \iint \mathbf{v} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) d\xi d\eta \quad (4.3)$$

Отсюда видно, что джоулева диссипация в канале со всюду диэлектрическими стенками численно равна работе электромагнитных сил (подынтегральное выражение суть работа электромагнитной силы на пути \mathbf{v}).

Учитывая дифференциальное соотношение

$$dj_\xi = -\frac{\partial j_\eta}{\partial \eta} d\xi + \frac{\partial j_\eta}{\partial \xi} d\eta = \frac{dj_\eta}{d\eta} d\xi \quad (4.4)$$

которое следует из уравнений

$$\frac{\partial j_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial j_\eta}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial j_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial j_\xi}{\partial \eta} = 0 \quad (4.5)$$

а также граничные значения \mathbf{j} и \mathbf{v} на $L = L_1 + L_2$, интегрированием по частям в (4.3) получаем выражения для вычисления Q_j в двух эквивалентных формах

$$Q_j = -\frac{2H}{c} \int_{-1}^1 \psi(\xi) j_\eta(\xi) d\xi, \quad \psi(\xi) = \int v(\xi) d\xi \quad (4.6)$$

$$Q_j = \frac{2H}{c} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) v(\xi) d\xi, \quad \varphi(\xi) = \int j_\eta(\xi) d\xi$$

Здесь $\varphi(\xi)$ — силовая функция тока, а $\psi(\xi)$ — функция тока скорости; для рассматриваемых $v(\xi)$ имеем

$$\psi_-(\xi) = V\xi, \quad \psi_-(\xi) = \frac{3}{2}V\xi(1 - \frac{1}{3}\xi^2), \quad \psi_-(\xi) = 4V\xi^2(1 - \frac{1}{2}\xi^2) \quad (4.7)$$

При помощи теоремы Коши о вычетах и формул Сохоцкого — Племеля интеграл в первой из формул (4.6) вычисляется в конечном виде [4]. При этом необходимо учесть разложение $X_0(\zeta)$ в ряд

$$X_0(\zeta) = (\zeta + 1)^{-1/2+\varepsilon} (\zeta - 1)^{-1/2-\varepsilon} = \frac{1}{\zeta} \left(1 + \frac{R_1}{\zeta} + \frac{R_2}{\zeta^2} + \dots \right) \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= 2\varepsilon, & R_2 &= 2\varepsilon^2 + 1/2, & R_3 &= 4/3\varepsilon^3 + 5/3\varepsilon, & R_4 &= 2/3\varepsilon^4 + 7/5\varepsilon^2 + 3/8 \\ R_5 &= 4/15\varepsilon^5 + 2\varepsilon^3 + 89/60\varepsilon, & R_6 &= 4/45\varepsilon^6 + 11/9\varepsilon^4 + 439/180\varepsilon^2 + 5/16 \\ R_7 &= 8/315\varepsilon^7 + 26/45\varepsilon^5 + 217/90\varepsilon^3 + 381/280 \\ R_8 &= 2/315\varepsilon^8 + 2/9\varepsilon^6 + 301/130\varepsilon^4 + 1247/504\varepsilon^2 + 35/128 \end{aligned} \quad (4.9)$$

(другие коэффициенты R_μ , $\mu = 9, \dots$ в разложении (4.8) в последующих формулах и расчетах не понадобятся).

После ряда преобразований получаем следующие точные аналитические выражения для вычисления джоулевой диссипации:

(a) при $v_- = V = \text{const}$

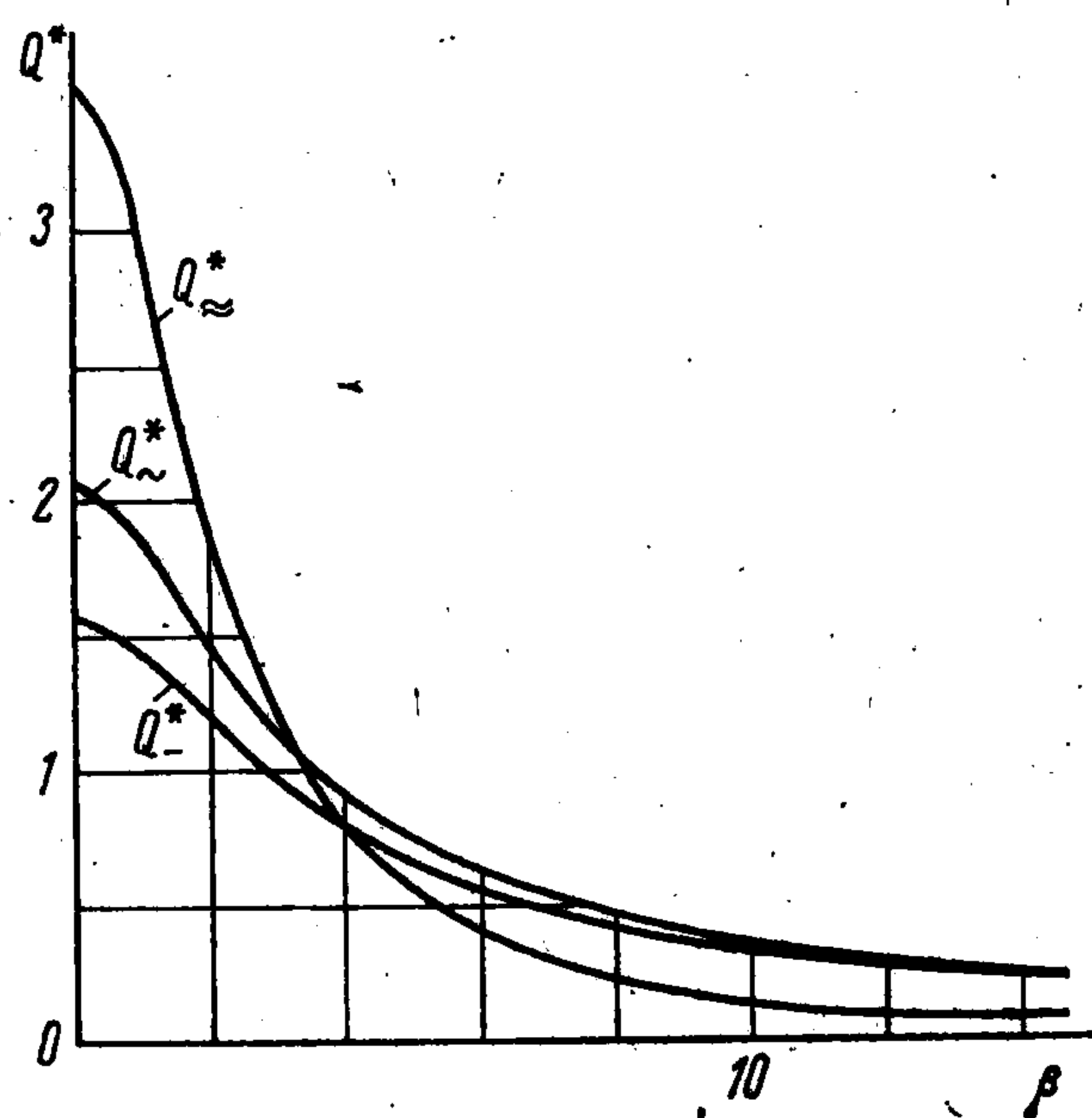
$$Q_{j-} = 2\pi (R_2 - 2\varepsilon R_1) \quad (4.10)$$

(b) при $v_{\sim} = 3/2 V (1 - \xi^2)$

$$\begin{aligned} Q_{j\sim} &= 8/27\pi [(R_6 - 2\varepsilon R_5 + (2\varepsilon^2 - 9/4) R_4 + \\ &+ (25/3\varepsilon - 4/3\varepsilon^3) R_3 + (9/2 - 6\varepsilon^2) R_2 + \\ &+ (4\varepsilon^3 - 7\varepsilon) R_1] \quad (4.11) \end{aligned}$$

(c) при $v_{\approx} = 8V\xi(1 - \xi^2)$

$$\begin{aligned} Q_{j\approx} &= 1/8\pi [R_8 - 2\varepsilon R_7 + (2\varepsilon^2 - 7/2) R_6 + \\ &+ (19/3\varepsilon - 4/3\varepsilon^3) R_5 + (2/3\varepsilon^4 - 17/3\varepsilon^2 + \\ &+ 27/8) R_4 + (8/3\varepsilon^3 - 14/3\varepsilon) R_3 + \\ &+ (10/3\varepsilon^2 - 4/3\varepsilon^4 - 3/4) R_2] \quad (4.12) \end{aligned}$$



Фиг. 5

На фиг. 5 представлены зависимости джоулевой диссипации Q_{j-} , $Q_{j\sim}$ и $Q_{j\approx}$ от холловского параметра β , рассчитанные по формулам (4.10) — (4.12) и отнесенные к $\sigma (VH/c)^2$. С увеличением β функции Q_j монотонно убывают, причем Q_{j-} и $Q_{j\sim}$ в пределе совпадают. Это, по-видимому, является общим свойством электрических полей в данной задаче: при фиксированном расходе независимо от вида профиля скорости всегда найдется такое большое β , после которого Q_j для любого $v(\xi)$ будет равно Q_{j-} — соответствующее скорости с постоянным профилем $v_- = V = \text{const}$.

Поступила 12 X 1970

Институт электродинамики АН УССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Sutton G. W. End losses in magnetohydrodynamic channels with tensor electrical conductivity and segmented electrodes. J. Appl. Phys., 1963, vol. 34, No. 2, 396—403.
2. Ватажин А. Б. О деформации профиля скорости в неоднородном магнитном поле. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
3. Емец Ю. П. Плоская контактная задача в электродинамике сплошных сред при наличии эффекта Холла. ПМТФ, 1966, № 4.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи, изд. 2., М., Физматгиз, 1963.