Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

К ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ

С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян

(Ереван)

Задача исследования магнитоупругих колебаний электропроводящей пластинки в магнитном поле сводится к совместному решению уравнений магнитоупругости в области, занимаемой пластинкой (внутренняя задача), и уравнений электродинамики для всей остальной области рассматриваемого пространства (внешняя задача).

Делается попытка определения магнитного поля тонкой пластинки конечной проводимости, путем асимптотического интегрирования совместных уравнений магнитоупругости для области, занимаемой пластинкой. Рассматривая совместно внутреннюю и внешнюю задачи, исследуются магнитоупругие колебания тонкой пластинки конечной проводимости. Формулируются некоторые гипотезы магнитоупругости для пластинки конечной проводимости.

В частных случаях, когда материал пластинки идеально проводящий или бесконечно простирающаяся тонкая пластинка имеет конечную электропроводность, задача магнитоупругих колебаний разрешается относительно просто [1,2].

В общем случае, когда пластинка может иметь конечные размеры, а материал ее конечно проводящий, решение поставленной задачи становится весьма затруднительным, ибо в этом случае внутренняя задача не разделяется и точное определение магнитного поля пластинки в трехмерной постановке не представляется возможным.

1. Рассматривается изотропная упругая пластинка постоянной толщины $2h$, изготовленная из материала с конечной электропроводностью и находящаяся во внешнем магнитном поле с заданным вектором напряженности $\mathbf{H}_0$ (H_1, H_2, H_3).

Принимается, что магнитные и диэлектрические проницаемости пластинки равны единице.

Для внешней области (для всей области вне пластинки) считаются справедливыми уравнения Максвелла для вакуума [3].

Введем декартовую систему координат (x, y, z) так, чтобы срединная плоскость пластинки совпала с координатной плоскостью xy.

Трехмерная задача магнитоупругости, в выбранной системе координат, сводится к совместному интегрированию следующих систем дифференциальных уравнений [3, 4].

Во внутренней области:

уравнения электродинамики

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\times\mathbf{H}\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0$$

уравнения равновесия теории упругости

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0 \qquad (xy)$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{R}(X,Y,Z)=\frac{\sigma}{c}\left[\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}\times\mathbf{H}\right]\times\mathbf{H}-\rho\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2}$$

Во внешней области:

уравнения электродинамики

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(n)}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}^{(n)}}{\partial t},\qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}^{(n)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}^{(n)}}{\partial t} \tag{1.3}$$

(индекс $n=1$ при $z\geqslant h$, индекс $n=2$ при $z\leqslant -h$).

В приведенных выше уравнениях: $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ соответственно векторы напряженности магнитного и электрического полей, $\mathbf{U}=\mathbf{U}(u_x, u_y, u_z)$ — вектор перемещения частиц пластинки, $\sigma=\sigma(x, y, t)$ — проводимость материала пластинки, c — скорость света в пустоте, $\sigma_x=\sigma_x(x, y, z, t),\ldots$ $\ldots, \tau_{xz}=\tau_{xz}(x, y, z, t)$ — компоненты тензора напряжений, $\mathbf{R}$ — вектор объемных сил, ρ — плотность материала пластинки, t — время.

В дальнейшем ограничиваемся исследованием вопроса магнитоупругих колебаний при малых возмущениях. В этом случае, как известно [1-3], уравнения (1.1) и (1.2) могут быть линеаризованы.

Принимая для компонент возмущенного электромагнитного поля

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}(H_1+h_x,\ H_2+h_y,\ H_3+h_z),\qquad \mathbf{E}=\mathbf{E}(E_x,\ E_y,\ E_z)$$

и предполагая, что компоненты индуцированного электромагнитного поля h_x, h_y, h_z; E_x, E_y, E_z малы, уравнения (1.1) и (1.2) могут быть приведены к следующему виду:

$$\frac{\partial h_z}{\partial y}-\frac{\partial h_y}{\partial z}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_x+\frac{1}{c}\left(H_3\frac{\partial u_y}{\partial t}-H_2\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial z}-\frac{\partial h_z}{\partial x}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_y+\frac{1}{c}\left(H_1\frac{\partial u_z}{\partial t}-H_3\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial x}-\frac{\partial h_x}{\partial y}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_z+\frac{1}{c}\left(H_2\frac{\partial u_x}{\partial t}-H_1\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_x}{\partial t},\qquad \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial x}+\frac{\partial h_y}{\partial y}+\frac{\partial h_z}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \tag{1.4}$$

а также

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}+\frac{\sigma}{c}(H_3^2+H_2^2)\frac{\partial u_x}{\partial t}-$$

$$-\frac{\sigma}{c}\left[H_3\left(E_y+H_1\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)-H_2\left(E_z-H_1\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)\right]$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2u_y}{\partial t^2}+\frac{\sigma}{c}(H_1^2+H_3^2)\frac{\partial u_y}{\partial t}-$$
$$-\frac{\sigma}{c}\left[H_1\left(E_z+H_2\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)-H_3\left(E_x-H_2\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)\right] \tag{1.5}$$
$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}+\frac{\sigma}{c}(H_2^2+H_1^2)\frac{\partial u_z}{\partial t}-$$
$$-\frac{\sigma}{c}\left[H_2\left(E_x+H_3\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)-H_1\left(E_y-H_3\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)\right]$$

Таким образом, задача магнитоупругости свелась к интегрированию уравнений (1.3) — (1.5) с учетом непрерывности компонент напряженностей электромагнитного поля, условий нагружения внешних плоскостей пластинки и краевых условий.

2. Рассмотрим внутреннюю задачу. К системе уравнений (1.4), (1.5) применим метод асимптотического интегрирования, ограничиваясь при этом построением лишь основного итерационного процесса [5]. Как известно, основной итерационный процесс дает возможность определить медленно затухающую часть решения, которая, например, в случае задачи изгиба пластинки позволяет определить то напряженное состояние, которое в первом приближении дает классическая теория изгиба пластинки, т. е. приводит к двумерной задаче теории упругости, получаемой на основе гипотезы недеформируемых нормалей [5].

Следуя [5], принимается, что напряженности магнитного и электрического полей по переменным x и y изменяются не слишком быстро, а по переменной z, очевидно, должны изменяться быстро. Растягивая масштаб по переменной z, согласно формуле

$$z=h\zeta \tag{2.1}$$

принимается, что по переменным (x, y, ζ) быстрота изменения напряженностей магнитного и электрического полей будет не слишком велика.

Линеаризованные уравнения (1.4) после замены (2.1) принимают вид

$$\frac{\partial h_z}{\partial y}-h^{-1}\frac{\partial h_y}{\partial\zeta}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_x+\frac{1}{c}\left(H_3\frac{\partial u_y}{\partial t}-H_2\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$
$$h^{-1}\frac{\partial h_x}{\partial\zeta}-\frac{\partial h_z}{\partial x}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_y+\frac{1}{c}\left(H_1\frac{\partial u_z}{\partial t}-H_3\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{2.2}$$
$$\frac{\partial h_y}{\partial x}-\frac{\partial h_x}{\partial y}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_z+\frac{1}{c}\left(H_2\frac{\partial u_x}{\partial t}-H_1\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-h^{-1}\frac{\partial E_y}{\partial\zeta}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_x}{\partial t},\qquad h^{-1}\frac{\partial E_x}{\partial\zeta}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_y}{\partial t}$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_z}{\partial t} \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial h_x}{\partial x}+\frac{\partial h_y}{\partial y}+h^{-1}\frac{\partial h_z}{\partial\zeta}=0,\qquad \frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+h^{-1}\frac{\partial E_z}{\partial\zeta}=0$$

Пусть Q есть любая из компонент электромагнитного поля и перемещений пластинки. Зададим ее в виде

$$Q=h^{-q}\sum_{s=1}^{S}h^{s-1}Q^{(s)} \tag{2.4}$$

где q — целое число, различное для различных компонент магнитного поля и перемещений.

Существующие многочисленные точные решения задач изгиба пластинок в отсутствии магнитного поля показывают, что для напряжений и перемещений q необходимо выбрать согласно работе [5]. В частности, для перемещений будем иметь

$$(u_x, u_y) \to q = 2, \qquad (u_z = w) \to q = 3 \tag{2.5}$$

Что же касается компонент электромагнитного поля, то для них возможны различные способы выбора числа q. Рассмотрим следующие три варианта:

$$(h_x, h_y, E_z) \to q = 1, \qquad (h_z, E_x, E_y) \to q = 2 \tag{2.6.1}$$

$$(h_x, h_y, E_z) \to q = 2, \qquad (h_z, E_x, E_y) \to q = 3 \tag{2.6.2}$$

$$(h_x, h_y, E_z) \to q = 3, \qquad (h_z, E_x, E_y) \to q = 4 \tag{2.6.3}$$

В уравнениях (2.2) и (2.3), представляя компоненты электромагнитного поля и перемещения пластинки в виде (2.4) — (2.6), приравниваем коэффициенты при равных степенях h в левых и правых частях каждого отдельно взятого уравнения. Уравнения, получающиеся из (2.3), во всех трех вариантах совпадают и имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial E_y^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial E_z^{(s-2)}}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial h_x^{(s-2)}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_x^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial E_z^{(s-2)}}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial h_y^{(s-2)}}{\partial t} \\
\frac{\partial E_y^{(s)}}{\partial x} - \frac{\partial E_x^{(s)}}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial t} \\
\frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial h_x^{(s-2)}}{\partial x} - \frac{\partial h_y^{(s-2)}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial E_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial E_y^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial E_z^{(s)}}{\partial \zeta} = 0
\end{gathered} \tag{2.7}$$

Уравнения же (2.2) приводят к отличающимся уравнениям для каждого варианта в отдельности. В частности:

для первого варианта (2.6.1)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial h_z^{(s-1)}}{\partial y} - \frac{\partial h_y^{(s-1)}}{\partial \zeta} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_x^{(s-1)} + \frac{1}{c}\left(H_3\frac{\partial u_y^{(s-1)}}{\partial t} - H_2\frac{\partial u_z^{(s)}}{\partial t}\right)\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial E_x^{(s-1)}}{\partial t} \\
\frac{\partial h_x^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial h_z^{(s-1)}}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_y^{(s-1)} + \frac{1}{c}\left(H_1\frac{\partial u_z^{(s)}}{\partial t} - H_3\frac{\partial u_x^{(s-1)}}{\partial t}\right)\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial E_y^{(s-1)}}{\partial t} \\
\frac{\partial h_y^{(s-1)}}{\partial x} - \frac{\partial h_x^{(s-1)}}{\partial y} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_z^{(s-1)} + \frac{1}{c}\left(H_2\frac{\partial u_x^{(s)}}{\partial t} - H_1\frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial t}\right)\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial E_z^{(s-1)}}{\partial t}
\end{gathered} \tag{2.8}$$

для второго варианта (2.6.2)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial y} - \frac{\partial h_y^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_x^{(s)} + \frac{1}{c}\left(H_3\frac{\partial u_y^{(s-1)}}{\partial t} - H_2\frac{\partial u_z^{(s-1)}}{\partial t}\right)\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial E_x^{(s)}}{\partial t} \\
\frac{\partial h_x^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_y^{(s)} + \frac{1}{c}\left(H_1\frac{\partial u_z^{(s)}}{\partial t} - H_3\frac{\partial u_x^{(s-1)}}{\partial t}\right)\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial E_y^{(s)}}{\partial t} \\
\frac{\partial h_y^{(s)}}{\partial x} - \frac{\partial h_x^{(s)}}{\partial y} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_z^{(s)} + \frac{1}{c}\left(H_2\frac{\partial u_x^{(s)}}{\partial t} - H_1\frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial t}\right)\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial E_z^{(s)}}{\partial t}
\end{gathered} \tag{2.9}$$

для третьего варианта (2.6.3)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial y}-\frac{\partial h_y^{(s)}}{\partial \zeta}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_x^{(s)}+\frac{1}{c}\left(H_3\frac{\partial u_y^{(s-2)}}{\partial t}-H_2\frac{\partial u_z^{(s-1)}}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial E_x^{(s)}}{\partial t}\\
&\frac{\partial h_x^{(s)}}{\partial \zeta}-\frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial x}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_y^{(s)}+\frac{1}{c}\left(H_1\frac{\partial u_z^{(s-1)}}{\partial t}-H_3\frac{\partial u_x^{(s-2)}}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial E_y^{(s)}}{\partial t}\qquad(2.10)\\
&\frac{\partial h_y^{(s)}}{\partial x}-\frac{\partial h_x^{(s)}}{\partial y}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_z^{(s)}+\frac{1}{c}\left(H_2\frac{\partial u_x^{(s-1)}}{\partial t}-H_1\frac{\partial u_y^{(s-1)}}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial E_z^{(s)}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Уравнения (2.7) и (2.8) в первом варианте, (2.7) и (2.9) во втором варианте, (2.7) и (2.10) в третьем варианте составляют для каждого варианта в отдельности цепочку систем уравнений основного итерационного процесса, заключающегося в последовательном ($s = 1, 2, 3, \ldots$) определении искомых $Q^{(s)}$. При этом надо считать, что величины $Q^{(s)} \equiv 0$ при $s < 1$, а также, что при построении $Q^{(s+1)}$ соответствующие величины $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \ldots, Q^{(s)}$ считаются известными.

Для первого варианта из уравнений (2.8) в первом приближении получается

$$
\frac{4\pi\sigma}{c^2}H_2\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial t}=0,\qquad \frac{4\pi\sigma}{c^2}H_1\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial t}=0,\quad \frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(H_2\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial t}-H_1\frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial t}\right)=0
$$

Для нестационарной задачи это может быть только в том случае, когда

$$
H_1 = H_2 = 0
$$

Следовательно, первый вариант возможен тогда, когда заданное внешнее магнитное поле [перпендикулярно плоскости пластинки [$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0(0, 0, H_3)$]. Принимая $H_1 = H_2 = 0$, вместо (2.8) из уравнений (2.2) получим следующие уравнения:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial y}-\frac{\partial h_y^{(s)}}{\partial \zeta}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_x^{(s)}+\frac{1}{c}H_3\frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial t}\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial E_x^{(s)}}{\partial t}\\
&\frac{\partial h_x^{(s)}}{\partial \zeta}-\frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial x}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_y^{(s)}-\frac{1}{c}H_3\frac{\partial u_x^{(s)}}{\partial t}\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial E_y^{(s)}}{\partial t}\qquad(2.11)\\
&\frac{\partial h_y^{(s)}}{\partial x}-\frac{\partial h_x^{(s)}}{\partial y}=\frac{4\pi\sigma}{c}E_z^{(s)}+\frac{1}{c}\frac{\partial E_z^{(s)}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Во втором варианте нет ограничений на заданное внешнее магнитное поле и уже в первом приближении уравнения электродинамики (2.7) и (2.9) не отделяются от уравнений упругих колебаний пластинки и их необходимо рассматривать совместно.

В случае третьего варианта, как видно из уравнений (2.7) и (2.10), в первом приближении компоненты электромагнитного поля определяются независимо от упругих перемещений. Таким образом, следует полагать, что третий вариант приемлем в тех задачах магнитоупругости, для которых известно, что упругие колебания слабо влияют на изменение электромагнитного поля.

Из сказанного вытекает, что второй вариант является наиболее общим.

Решения систем уравнений (2.7) и (2.11), (2.7) и (2.9), (2.7) и (2.10) представим в виде двух слагаемых $Q^{(s)} = Q_i^{(s)} + Q^{*(s)}$. Под первым слагаемым подразумевается интеграл однородной системы, получающейся за счет отбрасывания величин с верхним индексом, меньшим s, а под вторым слагаемым подразумевается какой-либо частный интеграл указанной системы, в которой все величины с верхним индексом, меньшим s, рассматриваются как известные.

Те уравнения однородных систем, которые получаются из уравнений 2.7), являются общими для всех трех вариантов и имеют вид

$$\frac{\partial E_x^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial E_y^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial \zeta} = 0 \tag{2.12}$$
$$\frac{\partial E_y^{(s)}}{\partial x} - \frac{\partial E_x^{(s)}}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial E_y^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial E_z^{(s)}}{\partial \zeta} = 0$$

Остальными уравнениями однородных систем будут:

а) для первого варианта согласно (2.11)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial y} - \frac{\partial h_y^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_x^{(s)} + \frac{1}{c}H_3\frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial t}\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial E_x^{(s)}}{\partial t} \\
\frac{\partial h_x^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_y^{(s)} - \frac{1}{c}H_3\frac{\partial u_x^{(s)}}{\partial t}\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial E_y^{(s)}}{\partial t} \\
\frac{\partial h_y^{(s)}}{\partial x} - \frac{\partial h_x^{(s)}}{\partial y} = \frac{4\pi\sigma}{c}E_z^{(s)} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_z^{(s)}}{\partial t}
\end{gathered} \tag{2.13}$$

б) для второго варианта согласно (2.9)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial y} - \frac{\partial h_y^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_x^{(s)} - \frac{H_2}{c}\frac{\partial u_z^{(s)}}{\partial t}\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial E_x^{(s)}}{\partial t} \\
\frac{\partial h_x^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_y^{(s)} + \frac{H_1}{c}\frac{\partial u_z^{(s)}}{\partial t}\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial E_y^{(s)}}{\partial t} \\
\frac{\partial h_y^{(s)}}{\partial x} - \frac{\partial h_x^{(s)}}{\partial y} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_z^{(s)} + \frac{H_2}{c}\frac{\partial u_x^{(s)}}{\partial t} - \frac{H_1}{c}\frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial t}\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial E_z^{(s)}}{\partial t}
\end{gathered} \tag{2.14}$$

в) для третьего варианта согласно (2.10)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial y} - \frac{\partial h_y^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{4\pi\sigma}{c}E_x^{(s)} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_x^{(s)}}{\partial t} \\
\frac{\partial h_x^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial h_z^{(s)}}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c}E_y^{(s)} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_y^{(s)}}{\partial t} \\
\frac{\partial h_y^{(s)}}{\partial x} - \frac{\partial h_x^{(s)}}{\partial y} = \frac{4\pi\sigma}{c}E_z^{(s)} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_z^{(s)}}{\partial t}
\end{gathered} \tag{2.15}$$

Полученные системы уравнений для каждого варианта в отдельности: (2.12) и (2.13) (первый вариант), (2.12) и (2.14) (второй вариант), (2.12) и (2.15) (третий вариант) интегрируются легко. При этом отметим, что выражения $E_{xi}^{(s)}$, $E_{yi}^{(s)}$, $E_{zi}^{(s)}$, $h_{zi}^{(s)}$ во всех трех вариантах имеют одинаковый вид

$$E_{xi}^{(s)} = E_{x0}^{(s)}(x, y, t), \qquad E_{yi}^{(s)} = E_{y0}^{(s)}(x, y, t)$$

$$h_{zi}^{(s)} = h_{z0}^{(s)}(x, y, t), \qquad E_{zi}^{(s)} = -\zeta\left[\frac{\partial E_{x0}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial E_{y0}^{(s)}}{\partial y}\right] \tag{2.16}$$

Для определения $h_{xi}^{(s)}$ и $h_{yi}^{(s)}$ используем соотношения

$$u_{zi}^{(s)} = w_i^{(s)} = w_0^{(s)}(x, y, t), \qquad u_{xi}^{(s)} = -\zeta\frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial x}, \qquad u_{yi}^{(s)} = -\zeta\frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial y}$$

которые получены в [5] и имеют место независимо от наличия магнитного поля. Тогда из уравнений (2.13) — (2.15) получим:

для первого варианта

$$h_{xi}^{(s)} = \zeta\left[\frac{\partial h_{z0}^{(s)}}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left(E_{y0}^{(s)} + \zeta\frac{H_3}{2c}\frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial t\partial x}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial E_{y0}^{(s)}}{\partial t}\right]$$

$$h_{yi}^{(s)} = \zeta\left[\frac{\partial h_{z0}^{(s)}}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left(E_{x0}^{(s)} - \zeta\frac{H_3}{2c}\frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial t\partial y}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial E_{x0}^{(s)}}{\partial t}\right]$$

для второго варианта

$$h_{xi}^{(s)} = \zeta\left[\frac{\partial h_{z0}^{(s)}}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left(E_{y0}^{(s)} + \frac{H_1}{c}\frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial t}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial E_{y0}^{(s)}}{\partial t}\right]$$

$$h_{yi}^{(s)} = \zeta\left[\frac{\partial h_{z0}^{(s)}}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{b}\left(E_{x0}^{(s)} - \frac{H_2}{c}\frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial E_{x0}^{(s)}}{\partial t}\right]$$

для третьего варианта

$$h_{xi}^{(s)} = \zeta\left[\frac{\partial h_{z0}^{(s)}}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}E_{y0}^{(s)} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_{y0}^{(s)}}{\partial t}\right]$$

$$h_{yi}^{(s)} = \zeta\left[\frac{\partial h_{z0}^{(s)}}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}E_{x0}^{(s)} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_{x0}^{(s)}}{\partial t}\right]$$

Найдем интегралы систем уравнений (2.7) и (2.11), (2.7) и (2.9), (2.7) и (2.10). Из (2.7) для всех трех вариантов получим

$$E_x^{*(s)} = \int_0^\zeta\left(\frac{\partial E_z^{(s-2)}}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial h_y^{(s-2)}}{\partial t}\right)d\zeta, \qquad E_z^{*(s)} = -\int_0^\zeta\left(\frac{\partial E_x^{*(s)}}{\partial x} + \frac{\partial E_y^{*(s)}}{\partial y}\right)d\zeta \tag{2.17}$$

$$E_y^{*(s)} = \int_0^\zeta\left(\frac{\partial E_z^{(s-2)}}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial h_x^{(s-2)}}{\partial t}\right)d\zeta, \qquad h_z^{*(s)} = -\int_0^\zeta\left(\frac{\partial h_x^{(s-2)}}{\partial x} + \frac{\partial h_y^{(s-2)}}{\partial y}\right)d\zeta$$

Выражения $h_x^{*(s)}$ и $h_y^{*(s)}$ находятся из (2.11), (2.9) и (2.10) следующим образом:

для первого варианта

$$h_x^{*(s)} = \int_0^\zeta\left[\frac{\partial h_z^{*(s)}}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left(E_y^{*(s)} - \frac{H_3}{c}\frac{\partial u_x^{*(s)}}{\partial t}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial E_y^{*(s)}}{\partial t}\right]d\zeta$$

$$h_y^{*(s)} = \int_0^\zeta\left[\frac{\partial h_z^{*(s)}}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left(E_x^{*(s)} + \frac{H_3}{c}\frac{\partial u_y^{*(s)}}{\partial t}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial E_x^{*(s)}}{\partial t}\right]d\zeta$$

для второго варианта

$$h_x^{*(s)}=\int_0^\zeta\left\{\frac{\partial h_z^{*(s)}}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_y^{*(s)}+\frac{1}{c}\left(H_1\frac{\partial w^{*(s)}}{\partial t}-H_3\frac{\partial u_y^{(s-1)}}{\partial t}\right]\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial E_y^{*(s)}}{\partial t}\right\}d\zeta$$

$$h_y^{*(s)}=\int_0^\zeta\left\{\frac{\partial h_z^{*(s)}}{\partial y}-\frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_x^{*(s)}+\frac{1}{c}\left(H_3\frac{\partial u_y^{(s-1)}}{\partial t}-H_2\frac{\partial w^{*(s)}}{\partial t}\right)\right]-\frac{1}{c}\frac{\partial E_x^{*(s)}}{\partial t}\right\}d\zeta$$

для третьего варианта

$$h_x^{*(s)}=\int_0^\zeta\left\{\frac{\partial h_z^{*(s)}}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_y^{*(s)}+\frac{1}{c}\left(H_1\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial t}-H_3\frac{\partial u_x^{(s-2)}}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial E_y^{*(s)}}{\partial t}\right\}d\zeta$$

$$h_y^{*(s)}=\int_0^\zeta\left\{\frac{\partial h_z^{*(s)}}{\partial y}-\frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_x^{*(s)}+\frac{1}{c}\left(H_3\frac{\partial u_y^{(s-2)}}{\partial t}-H_2\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial E_x^{*(s)}}{\partial t}\right\}d\zeta$$

Здесь все величины, отмеченные звездочкой,— функции переменных $x, y, \zeta, t)$, величины, не отмеченные звездочкой и имеющие индекс меньше s, считаются известными.

Как указывалось раньше, $Q^{(s)}\equiv 0$ при $s<1$. Поэтому из (2.17), а также работы [5], откуда берутся сведения про u_x, u_y, w, следует, что $Q^{*(1)}$ и $Q^{*(2)}$ величины, отмеченные звездочкой, при $s=1$ и $s=2$ тождественно равны нулю.

В этом пункте, для случая уравнений (1.4) и (1.5), были повторены рассуждения по асимптотическому интегрированию систем уравнений, подробно изложенные в работе [5]. Дальнейшие рассуждения по асимптотическому интегрированию систем уравнений опускаются, ибо приведенное достаточно, чтобы асимптотический метод интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости трактовать как способ формулировки обоснованных гипотез и сформулировать исходные гипотезы поставленной задачи.

Основной итерационный процесс, примененный к уравнениям теории упругости, в первом приближении приводит к теории изгиба пластинки, в основе которой лежит гипотеза недеформируемых нормалей [5, 6].

Рассматривая полученные выше решения (2.16) и (2.17) линеаризованных уравнений (1.4), замечаем, что величины E_x, E_y и h_z до третьего приближения асимптотического интегрирования не зависят от координаты ζ.

На основании сказанного выше для внутренней задачи магнитоупругости можем сформулировать следующие гипотезы;

а) нормальный к срединной плоскости прямолинейный элемент пластинки после деформации остается прямолинейным, нормальным к деформированной срединной поверхности пластинки и сохраняет свою длину;

б) тангенциальные компоненты вектора напряженности возбуждаемого электрического поля и нормальная компонента вектора напряженности возбуждаемого магнитного поля по толщине пластинки остаются неизменными.

С точностью первого предположения следует принимать также, что нормальными напряжениями σ_z можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями.

Вторую гипотезу можно рассматривать как некоторый электродинамический аналог гипотезы недеформируемых нормалей.

3. Сформулированные выше гипотезы для внутренней задачи аналитически запишутся следующим образом:

$$u_x = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = -z\frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_z = w(x, y, t) \tag{3.1}$$
$$E_x = \varphi(x, y, t), \quad E_y = \psi(x, y, t), \quad h_z = f(x, y, t)$$

Здесь w — искомое нормальное перемещение пластинки, φ, ψ, f — искомые компоненты соответствующих напряженностей электромагнитного поля.

Принимая гипотезы а) и б), т. е. (3.1), по сути дела внутренняя трехмерная задача магнитоупругости приводится к двухмерной задаче магнитоупругости пластинки.

Из линеаризованных уравнений (1.4), согласно (3.1), получим

$$\frac{\partial h_x}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left[\psi + \frac{1}{c}\left(H_1\frac{\partial w}{\partial t} + zH_3\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$
$$\frac{\partial h_y}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left[\varphi - \frac{1}{c}\left(H_2\frac{\partial w}{\partial t} + zH_3\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right)\right] - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$
$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{3.2}$$

Интегрируя представления (3.2) по z в пределах от нуля до z и учитывая условия непрерывности электромагнитного поля для всего рассматриваемого пространства

$$h_x = h_x^+, \quad h_y = h_y^+, \quad E_z = E_z^+ \quad \text{при } z = h$$
$$h_x = h_x^-, \quad h_y = h_y^-, \quad E_z = E_z^- \quad \text{при } z = -h \tag{3.3}$$

для оставшихся компонент электромагнитного поля получим

$$h_x = \frac{h_x^+ + h_x^-}{2} + z\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi + \frac{H_1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right] + \frac{4\pi\sigma H_3}{c^2}\frac{z^2 - h^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}$$
$$h_y = \frac{h_y^+ + h_y^-}{2} + z\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\varphi - \frac{H_2}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right] + \frac{4\pi\sigma H_3}{c^2}\frac{z^2 - h^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}$$
$$E_z = \frac{E_z^+ + E_z^-}{2} - z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \tag{3.4}$$

Таким образом, все компоненты электромагнитного поля с помощью формул (3.1) и (3.4) представлены посредством четырех искомых функций φ, ψ, f, w.

Согласно гипотезе недеформируемых нормалей, наряду с (3.1) имеются также следующие соотношения [5, 6]:

$$\sigma_x = -z\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{3.5}$$
$$\sigma_y = -z\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad \tau_{xy} = -z\frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

где E и ν — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластинки.

Из первых двух уравнений (1.5), в силу (3.1) и (3.5), с учетом условий на поверхностях пластинки

$$\begin{gathered}\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \qquad \sigma_z = p(x, y, t) \quad \text{при } z = h \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0 \quad \text{при } z = -h\end{gathered} \tag{3.6}$$

для поперечных касательных напряжений в пластинке получим

$$\begin{gathered}\tau_{xz} = -z\frac{\sigma}{c}\left(H_3\psi - H_2\frac{E_z^+ + E_z^-}{2} + \frac{H_1H_2}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \\ + \frac{h^2 - z^2}{2}\left\{\rho\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2} - \frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\Delta w + \frac{\sigma}{c}\left[H_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \right.\right. \\ \left.\left. + (H_3^2 + H_2^2)\frac{1}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t} - \frac{H_1H_2}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}\right]\right\} \\ \tau_{yz} = -z\frac{\sigma}{c}\left(H_1\frac{E_z^+ + E_z^-}{2} - H_3\varphi + \frac{H_2H_3}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \\ + \frac{h^2 - z^2}{2}\left\{\rho\frac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial t^2} - \frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w + \frac{\sigma}{c}\left[(H_1^2 + H_3^2)\frac{1}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t} - \right.\right. \\ \left.\left. - H_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - \frac{H_1H_2}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\right]\right\} \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\end{gathered} \tag{3.7}$$

Подставляя (3.1) и (3.4) в уравнения (1.4), а (3.1) и (3.7) в третье уравнение (1.5) и полученные при этом уравнения интегрируя по z в пределах от $z = -h$ до $z = h$, с учетом (3.6), получим следующую полную систему дифференциальных уравнений относительно искомых функций φ, ψ, f и w:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi + \frac{H_1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h} \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\varphi - \frac{H_2}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h} \\ D\Delta\Delta w - \frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial}{\partial t}\Delta w - \frac{2\sigma h^3}{3c}\left(H_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - H_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + H_2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} - H_1\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) - \\ - \frac{2\sigma h^3}{3c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[(H_2^2 + H_3^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (H_1^2 + H_3^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2H_1H_2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right] - \\ - 2\frac{\sigma h}{c}\left[H_2\left(\varphi - \frac{H_2}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) - H_1\left(\psi + \frac{H_1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right] + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) \\ \left(D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\right)\end{gathered} \tag{3.8}$$

При выполнении указанной выше операции из системы уравнений (1.4) получаются также следующие условия, которые устанавливают связь между граничными значениями компонент напряженностей электромагнитного поля:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(h_x^+ + h_x^-) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(h_y^+ + h_y^-) - \frac{4\pi\sigma H_3h^2}{3c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta w = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(h_y^+ + h_y^-) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(h_x^+ + h_x^-) = \frac{2\pi\sigma}{c}(E_z^+ + E_z^-) + \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E_z^+ + E_z^-)\end{gathered}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(E_z^+ + {}_z^-) + -\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(h_x^+ + h_x^-) + \frac{4\pi\sigma H_3 h^2}{3c^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2} \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(E_z^+ + E_z^-) = \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(h_y^+ + h_y^-) - \frac{4\pi\sigma H_3 h^2}{3c^3}\frac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial t^2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{E_z^+ - E_z^-}{2h}$$

из системы (1.5) условия

$$H_3\left(\psi + \frac{H_1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) - H_2\frac{E_z^+ + E_z^-}{2} = 0,\quad H_3\left(\varphi - \frac{H_2}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) - H_1\frac{E_z^+ + E_z^-}{2} = 0 \tag{3.10}$$

Таким образом, задача колебания электропроводной изотропной пластинки во внешнем магнитном поле, сформулированная в п. 1, сводится к совместному решению системы дифференциальных уравнений магнитоупругости (3.8) для внутренней области пластинки и уравнений электродинамики (1.3) во внешней области. Граничными условиями задачи, кроме обычных условий закрепления пластинки и условий непрерывности величин E_x, E_y, h_z на поверхности пластинки, будут также условия (3.9) и $\operatorname{div}\mathbf{E}^{(n)} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{H}^{(n)} = 0$ ($n = 1$ при $z \geqslant h$ и $n = 2$ при $z \leqslant -h$).

4. Для иллюстрации применим выше изложенный метод к решению задачи колебаний бесконечной пластинки с постоянной конечной электропроводностью при наличии внешнего магнитного поля с вектором напряженности, параллельным оси x. Для простоты рассматривается цилиндрический изгиб, инерция вращения и моменты сил $\mathbf{R}$ (X, Y, Z) пренебрегаются.

Из условий задачи следует, что $E_x = E_z = h_y = 0$ во всем пространстве. Условия (3.10) выполняются тождественно. В этом случае система уравнений (3.8) принимает форму

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi + \frac{H_1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h}$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\sigma h H_1}{c}\left(\psi + \frac{H_1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1}$$

Уравнения электродинамики во внешней области (1.3) преобразуются к виду

$$\Delta h_x^{(n)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h_x^{(n)}}{\partial t^2} = 0,\qquad \Delta h_z^{(n)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h_z^{(n)}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.2}$$

$$\Delta E_y^{(n)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y^{(n)}}{\partial t^2} = 0$$

Граничными условиями задачи будут

$$\frac{\partial}{\partial x}(h_x^+ + h_x^-) = \frac{\partial}{\partial t}(h_x^+ + h_x^-) = 0,\qquad \frac{\partial h_x^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial h_z^{(n)}}{\partial z} = 0$$

$$E_y^{(1)}\big|_{z=h} = E_y^{(2)}\big|_{z=-h} = \psi(x, t),\qquad h_z^{(1)}\big|_{z=h} = h_z^{(2)}\big|_{z=-h} = f(x, t) \tag{4.3}$$

и условия ограниченности возмущений на бесконечности.

Решения уравнений (4.1) и (4.2) будем искать в виде волн, распространяющихся вдоль оси x

$$w = w_0 e^{i(\omega t - kx)}, \qquad \psi = \psi_0 e^{i(\omega t - kx)}$$
$$f = f_0 e^{i(\omega t - kx)}, \qquad E_y^{(n)} = \Psi_n(z)\, e^{i(\omega t - kx)} \tag{4.4}$$
$$h_x^{(n)} = \Phi_n(z)\, e^{i(\omega t - kx)}, \qquad h_z^{(n)} = F_n(z)\, e^{i(\omega t - kx)}$$

Здесь все функции от z являются неизвестными и подлежат определению, $k = \pi / \lambda$ — волновое число, λ — длина полуволны, ω — частота колебаний. Подставляя (4.4) в (4.2), получим уравнения, определяющие указанные неизвестные функции

$$\Phi_n'' - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\Phi_n = 0, \quad F_n'' - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)F_n = 0, \quad \Psi_n'' - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\Psi_n = 0$$

Следовательно

$$\Phi_1 = A_1 e^{-k_1 z}, \quad \Phi_2 = A_2 e^{k_1 z}, \quad F_1 = B_1 e^{-k_1 z}, \quad F_2 = B_2 e^{k_1 z}$$
$$\Psi_1 = C_1 e^{-k_1 z}, \quad \Psi_2 = C_2 e^{k_1 z}, \quad k_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \tag{4.5}$$

Удовлетворяя первым двум уравнениям системы (4.1) и граничным условиям (4.3), найдем величины инцуцированных компонентов напряженностей магнитного и электрического полей во всем пространстве в зависимости от прогибов пластинки

$$h_x = z\frac{qk_1}{h} w, \quad h_z = -ikqw, \quad E_y = -\frac{i\omega q}{c} w$$
$$h_x^{(1)} = qk_1 e^{k_1(h-z)} w, \qquad h_x^{(2)} = -qk_1 e^{k_1(h+z)} w \tag{4.6}$$
$$h_z^{(1)} = -ikqe^{k_1(h-z)} w, \qquad h_z^{(2)} = -ikqe^{k_1(h+z)} w$$
$$q = H_1\left[1 + \frac{c^2 k_1 (1 + k_1 h)}{i\omega 4\pi\sigma h}\right]^{-1}$$

Подставляя (4.4) и (4.6) в третье уравнение системы (4.1), получим уравнение для определения частоты колебаний

$$\omega^2 - \Omega^2 - \frac{H_1 k_1 (1 + k_1 h)}{4\pi\rho h} q = 0 \qquad \left(\Omega^2 = \frac{Dk^4}{2\rho h}\right) \tag{4.7}$$

где Ω частота собственных колебаний пластинки в отсутствие магнитного поля.

Сравнение значений величин (4.6) с соответствующими значениями тех же величин, полученных в работе [2] на основе точного решения, показывает, что результаты, найденные решением задачи по предлагаемому методу, совпадают с первым приближением результатов точного решения, разложенного в ряд по степеням νz. В соответствии с работой [2]

$$\nu = k_1^2 + \frac{1}{c^2} i\omega 4\pi\sigma$$

Первое приближение точного решения получается из указанного разложения пренебрежением величины $|\nu^2|\, h^2$ по сравнению с единицей.

Авторы признательны А. Л. Гольденвейзеру за обсуждение работы и ценные советы.

Поступила 22 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaliski S. Magnetoelastic vibration of perfecty conducting plates and bars assuming the principle of plane sections. Proc. Vibr. Probl., 1962, vol. 3, No. 4.
2. Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки в магнитном поле. Изв. АН АрмССР. Механика, 1967, т. 20, № 5.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
4. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
5. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
6. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М., «Наука», 1967.