

О БИФУРКАЦИИ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ И КОЛЬЦА В УСЛОВИЯХ ПРОДОЛЖАЮЩЕГОСЯ НАГРУЖЕНИЯ

Л. А. Шаповалов

(Москва)

Рассматриваются задачи устойчивости прямолинейного стержня и кругового кольца при сжатии за пределом упругости на основе концепции продолжающегося нагружения.

Для идеализированной модели упруго-пластического стержня Ф. Р. Шэнли [1] показал, что наименьшее критическое значение осевой сжимающей силы реализуется при условии непрерывного возрастания внешней нагрузки в процессе выпучивания. Этот результат был получен статическими методами и в дальнейшем развит рядом авторов [2-5].

В данной работе исходя из предположения о равновесности процесса деформирования за пределом упругости рассмотрена устойчивость сжатого стержня с учетом действительного положения границы, разделяющей упругую и пластическую области в процессе выпучивания. Путем асимптотического решения нелинейных уравнений упруго-пластического равновесия исследуется характер ветвления равновесных форм в окрестности точки бифуркации.

Уравнения изгиба в закритическом состоянии получены вариационным методом и обобщают уравнение эластики Эйлера на случай упруго-пластических деформаций. В соответствии с концепцией продолжающегося нагружения внешняя сила считается неизвестной возрастающей функцией сближения концов стержня. Предполагается, что эта функция допускает разложение в степенной ряд.

Использование представления переменной сжимающей силы в форме степенного ряда с неопределенными коэффициентами позволяет линеаризовать исходные уравнения и получить в замкнутом виде параметрическое уравнение семейства кривых, разделяющих упругую и пластическую зоны стержня.

В заключение рассмотрена устойчивость упруго-пластического равновесия кругового кольца под действием возрастающего гидростатического давления с привлечением результатов, полученных в задаче о сжатом стержне.

1. Рассмотрим идеальный шарнирно опертый стержень прямоугольного поперечного сечения, сжатый квазистатически возрастающей силой P_1 . Материал стержня за пределом упругости обладает линейным упрочнением.

Будем считать, что вплоть до начала искривления стержня при нагрузке $P_1 = P$ приложенная сжимающая сила не вызывает укорочения его оси.

При вычислении удлинений волокон, отстоящих на расстоянии z от срединного слоя, ограничиваясь линейной частью деформации срединного волокна, положим

$$\varepsilon = \frac{du}{ds} - z \frac{d\theta}{ds}, \quad \sin \theta = \frac{dw}{ds} \quad (1.1)$$

где $u = u(s)$, $w = w(s)$ — бифуркационные смещения, s — длина дуги недеформированной оси стержня.

В результате пассивной деформации, сопровождающей процесс выпучивания за пределом упругости, объем стержня разделяется на упругую 1 и пластическую 2 зоны (фиг. 1). Граница областей активной пластической деформации и разгрузки определяется функцией $c(s)$.

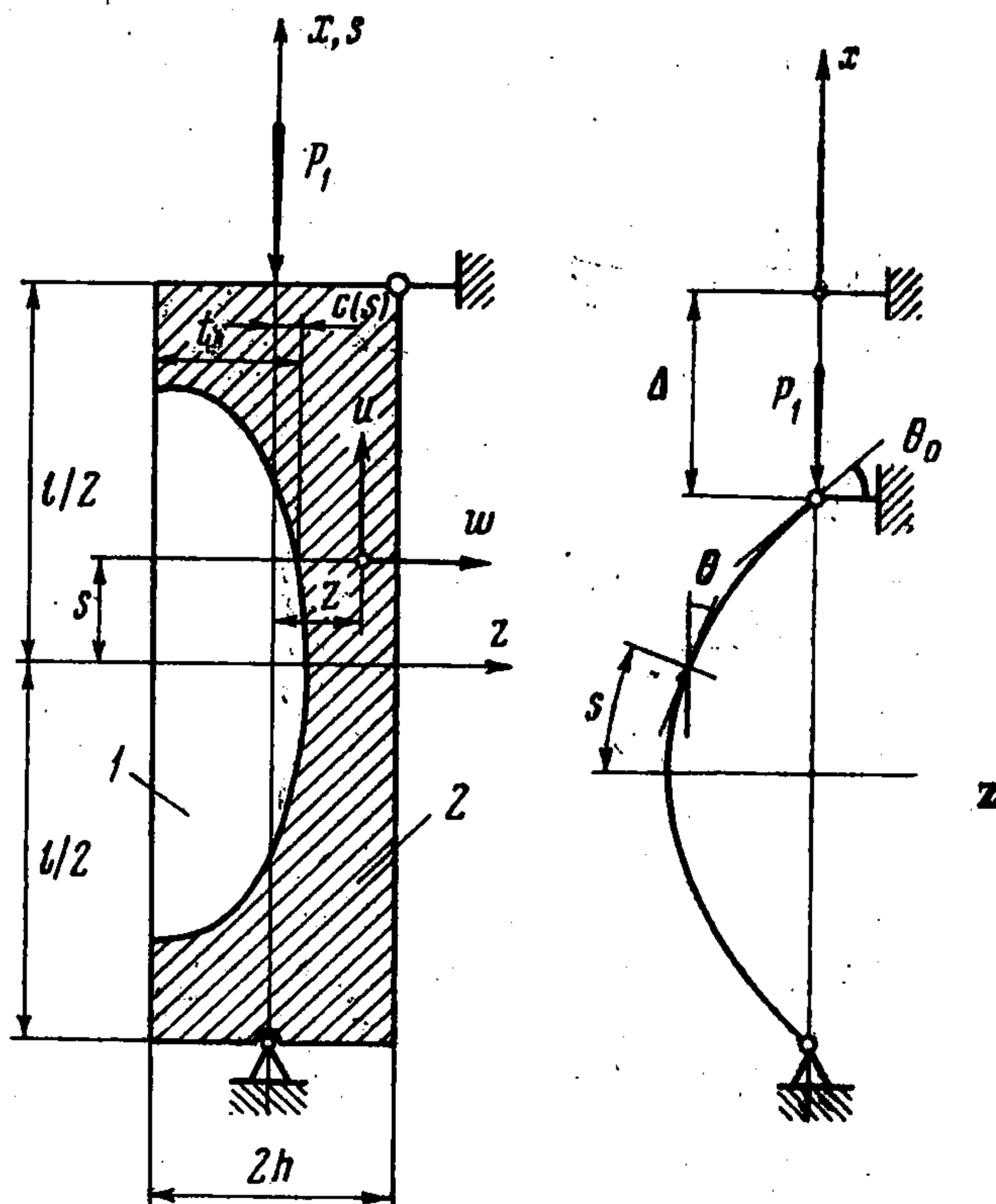
Отмечая индексами 1 и 2 величины, относящиеся к каждой из областей, выпишем деформации и напряжения сжатия в закритическом состоянии

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1)} &= -u' + z\theta', & \sigma^{(1)} &= \frac{P}{4bh} + E_1\varepsilon^{(1)}, & -h \leq z \leq c(s) \\ \varepsilon^{(2)} &= -u' + z\theta', & \sigma^{(2)} &= \frac{P}{4bh} + E_2\varepsilon^{(2)}, & c(s) \leq z \leq h \end{aligned} \quad (1.2)$$

В формулах (1.2) штрихами обозначена операция дифференцирования по координате s ; $2b$, $2h$ — размеры поперечного сечения; E_1 , E_2 — модуль упругости и касательный модуль материала:

Для получения уравнений равновесия упруго-пластического стержня при конечных деформациях изгиба будем исходить из принципа минимума полной энергии в форме, принятой в деформационной теории пластичности. Для тела, разделенного на упругую и пластическую зоны, имеем [6]

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E} &= \delta(\Pi^{(1)} + \Pi^{(2)}) - \delta A = 0 \\ \delta\Pi^{(1)} &= \int_{v^{(1)}} \sigma^{(1)}\delta\varepsilon^{(1)} dv^{(1)} \\ \delta\Pi^{(2)} &= \int_{v^{(2)}} \sigma^{(2)}\delta\varepsilon^{(2)} dv^{(2)} \end{aligned} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Здесь $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$, $dv^{(1)}$, $dv^{(2)}$ — потенциалы работы деформации и элементы объема каждой из зон, A — работа внешних сил.

Пользуясь выражениями (1.1) — (1.3) и равенством $c(s) = u' / \theta'$, следующим из определения границы упругой и пластической зон ($\varepsilon = 0$, $z = c$), выполняя интегрирование по площади сечения стержня, найдем

$$\begin{aligned} \delta(\Pi^{(1)} + \Pi^{(2)}) &= \int_{-1/2}^{+1/2} l \left[\left(-P + \frac{B}{c} u' \right) \delta u' + K\theta' \delta\theta' \right] ds \quad (1.4) \\ B(s) &= b [E_1 (h + c)^2 - E_2 (h - c)^2] \\ K(s) &= 1/3 b [E_1 (h + c)^2 (2h - c) + E_2 (h - c)^2 (2h + c)] \end{aligned}$$

В соответствии с концепцией продолжающегося нагружения представим возрастающее сжимающее усилие P_1 в форме степенного ряда с не-

определенными коэффициентами

$$P_1 = P + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Delta^n \quad (1.5)$$

где $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, Δ — полное перемещение верхней опоры, Δ_1 , Δ_2 — составляющие сближения концов стержня за счет сжатия и изгиба при бифуркации.

Для вычисления перемещений Δ_1 , Δ_2 с принятой точностью воспользуемся формулами [7]

$$\Delta_1 = - \int_{-1/2 l}^{+1/2 l} u' ds, \quad \Delta_2 = 2l \left[1 - \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} \right], \quad \kappa = \sin \frac{\theta_0}{2} \quad (1.6)$$

Здесь $K(\kappa)$, $E(\kappa)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем κ ; θ_0 — опорный угол поворота сечения стержня.

Из определения функций $K(\kappa)$, $E(\kappa)$, вводя переменную $\eta = ks$, учитывая (1.1) и соотношения

$$d\eta = (1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi = (1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi / \cos^2(\theta/2) \\ \sin \varphi = \sin(\theta/2) / \sin(\theta_0/2)$$

в результате вычислений получим

$$E(\kappa) = \int_0^{1/2 \pi} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{k}{2} \int_0^{1/2 l} (1 + \sqrt{1 - w'^2}) ds \quad (1.7) \\ K(\kappa) = \int_0^{1/2 \pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{kl}{2}$$

В формулах (1.7) φ — амплитуда функций $K(\kappa)$, $E(\kappa)$, k — параметр. Сближение концов стержня при конечных перемещениях изгиба согласно (1.6), (1.7), (1.1) имеет вид

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = l - \int_{-1/2 l}^{+1/2 l} (u' + \cos \theta) ds \quad (1.8)$$

Пользуясь выражением (1.8) и вычисляя вариацию работы внешних сил $\delta A = P_1 \delta \Delta$, согласно формулам (1.3), (1.4), (1.9) при $P_1 = P + (B/c) u' = Q$ найдем

$$\int_{-1/2 l}^{+1/2 l} \left(Q \frac{d}{ds} \delta u + K \theta' \frac{d}{ds} \delta \theta - P_1 \sin \theta \delta \theta \right) ds = 0 \quad (1.9)$$

Интегрируя соотношение (1.9) по частям, получим

$$[Q \delta u + K \theta' \delta \theta]_{-1/2 l}^{+1/2 l} - \int_{-1/2 l}^{+1/2 l} \left[\frac{dQ}{ds} \delta u + \left(\frac{d}{ds} K \theta' + P_1 \sin \theta \right) \delta \theta \right] ds = 0 \quad (1.10)$$

При независимых δu , $\delta \theta$ из вариационного уравнения (1.10) следуют условия равновесия стержня

$$d/ds \left(P_1 - P + \frac{B}{c} u' \right) = 0, \quad d/ds (K\theta') + P_1 \sin \theta = 0 \quad (1.11)$$

обобщающие уравнение эластики Эйлера на случай упруго-пластических деформаций.

Для определения критического значения внешней нагрузки линеаризуем систему уравнений (1.11).

Рассмотрим вначале первое из указанных уравнений и проинтегрируем его при начальных условиях $P_1 = P$, $u = w = 0$, $u' = 0$. В результате последующей линеаризации, пользуясь разложением (1.5), имеем

$$P_1 - P + (B/c) u' = 0, \quad \frac{B}{c} u' = b_1 \int_{-1/2 l}^{+1/2 l} \left(u' - \frac{1}{2} w'^2 \right) ds \quad (1.12)$$

где b_1 — некоторый неопределенный коэффициент.

Разыскивая приближенное решение линеаризованных уравнений равновесия и удовлетворяя заданным граничным условиям, положим

$$u(s) = -u_0 \left(1 + \sin \frac{\pi s}{l} \right), \quad w(s) = w_0 \cos \frac{\pi s}{l} \quad (1.13)$$

Из выражений (1.12), (1.13), (1.4) найдем

$$\frac{B(s)}{c(s)} \cos \frac{\pi s}{l} = b_1 \left(\frac{2l}{\pi} + \frac{\pi}{4} \frac{w_0^2}{u_0} \right) \quad (1.14)$$

Ввиду того что смещения гибкого стержня u_0 и w_0^2 имеют одинаковый порядок малости, отношение w_0^2 / u_0 представляет собой некоторую константу, а правая часть уравнения (1.14) вместе с неопределенным коэффициентом b_1 может быть объединена в общий неопределенный параметр

$$\lambda = b_1 \left(\frac{2l}{\pi} + \frac{\pi}{4} \frac{w_0^2}{u_0} \right)$$

Вводя обозначения

$$\nu = E_2 / E_1, \quad \alpha = \lambda / E_1 h, \quad c^\circ = c / h, \quad s^\circ = s / l$$

представим первое уравнение равновесия (1.11) в безразмерном виде

$$f(c^\circ, s^\circ, \alpha) = \frac{\alpha c^\circ}{(1 + c^\circ)^2 - \nu(1 - c^\circ)^2} - \cos \pi s^\circ = 0 \quad (1.15)$$

Трансцендентное уравнение (1.15) с параметром α в неявной форме определяет семейство кривых, разделяющих упругую и пластическую зоны стержня в момент выпучивания. Характер граничных кривых $c^\circ(s^\circ, \alpha)$, вычисленных по уравнению (2.15) при $\nu = 1/2$, представлен на фиг. 2 (сплошные кривые).

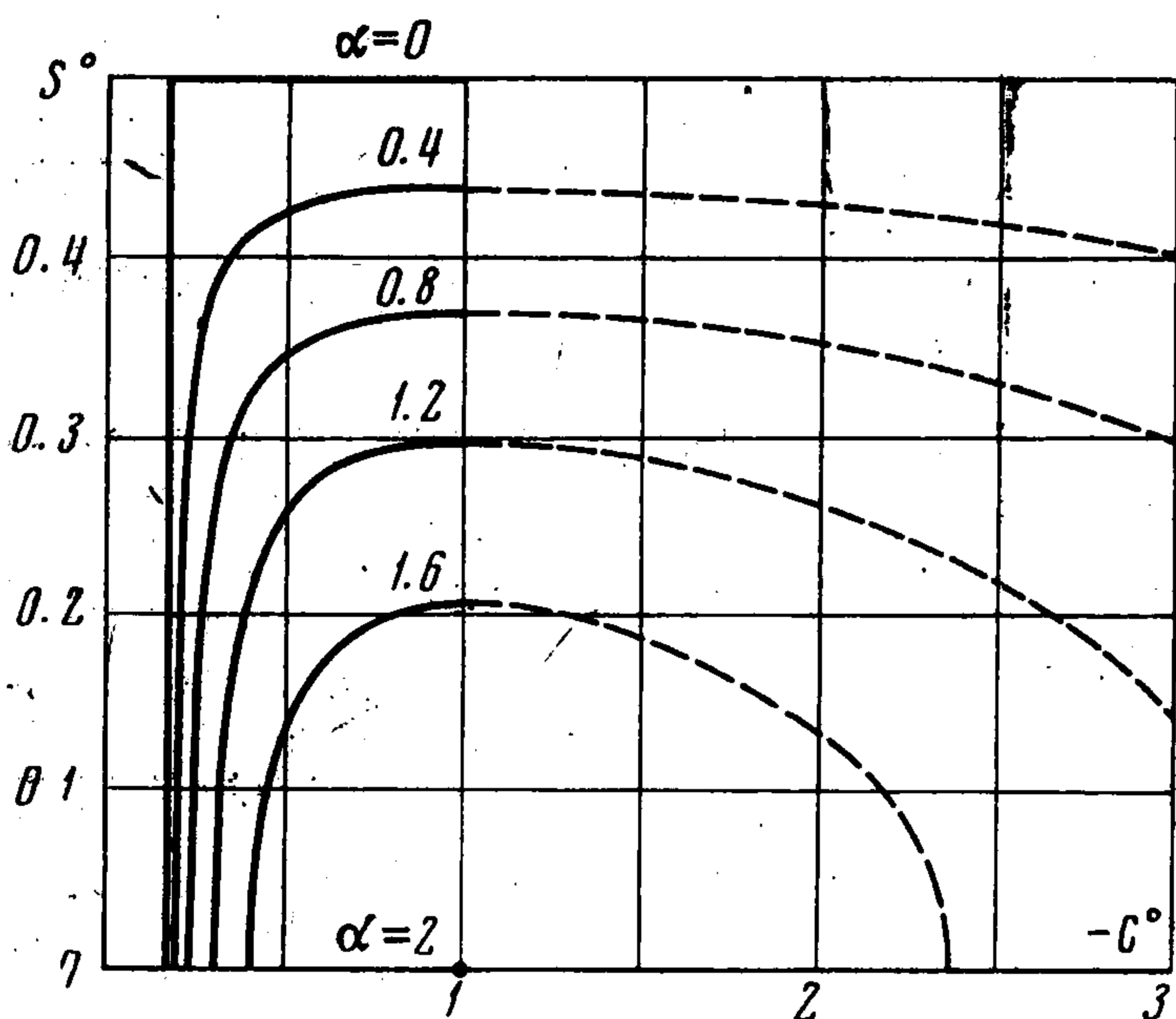
Линеаризуя при помощи разложения (1.5) второе уравнение равновесия (1.11), получим

$$\frac{d}{ds^\circ} \left(K \frac{d\theta}{ds^\circ} \right) + 4\pi^2 \nu P^\circ \theta = 0, \quad P^\circ = \frac{P}{P_*}, \quad P_* = \frac{4\pi^2 b h^3 E_2}{3l^2} \quad (1.16)$$

$$K^\circ = (1 + c^\circ)^2 (2 - c^\circ) + \nu (1 - c^\circ)^2 (2 + c^\circ)$$

где P_* — касательно-модульная критическая нагрузка.

Полагая в соответствии с (1.13)



Фиг. 2

(1.17)
 $\theta = \theta_0 \sin \pi s^\circ$, $\theta_0 = -\pi w_0 / l$
 и применяя к уравнению (1.16) процедуру метода Бубнова — Галеркина, найдем

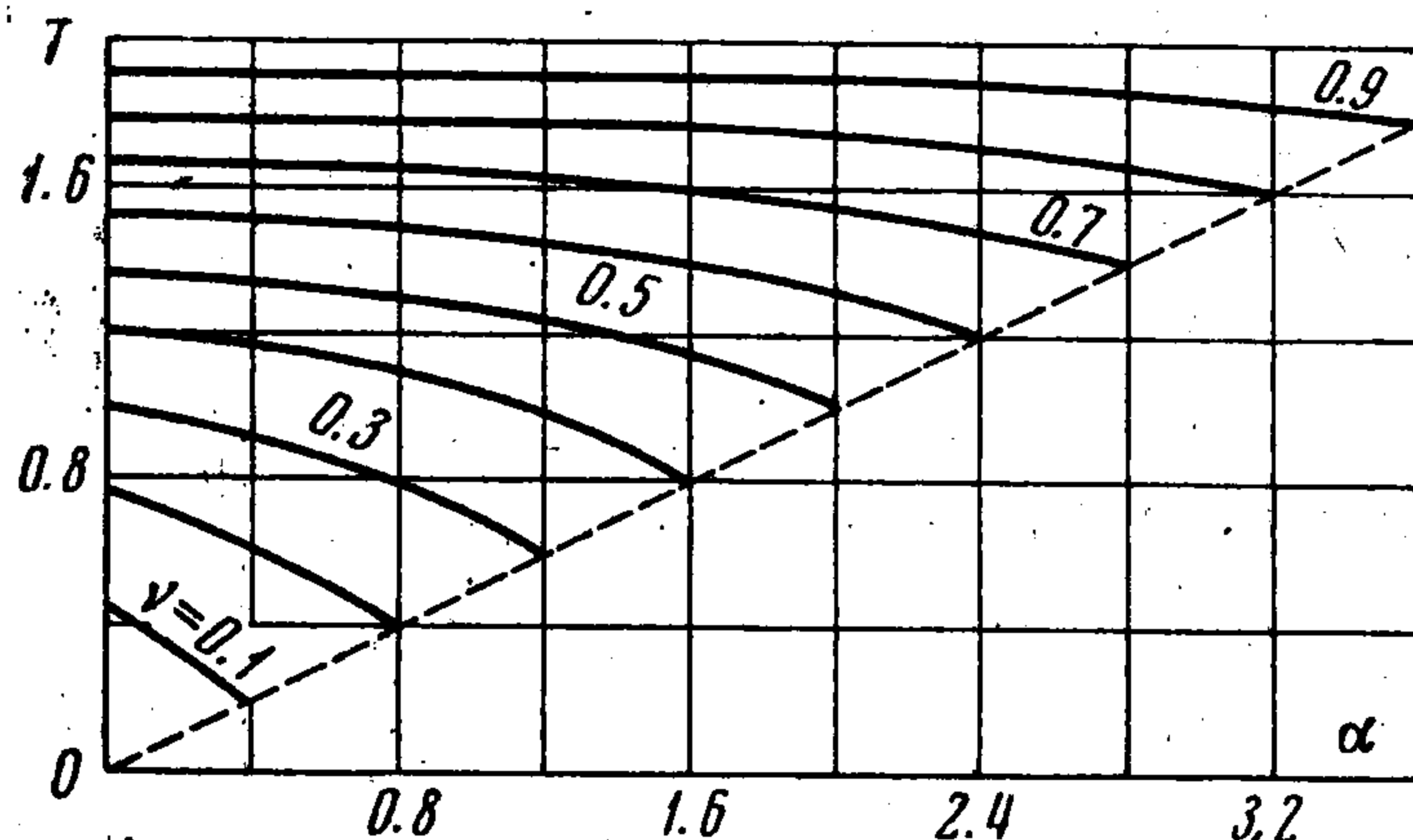
$$P^\circ = \frac{1}{2\nu} T(\alpha) \quad (1.18)$$

$$T(\alpha) = \int_{-1/2}^{+1/2} K^\circ(s^\circ, \alpha) \cos^2 \pi s^\circ ds^\circ$$

Из выражения (1.18) следует, что относительное критическое усилие P° является функцией неопределенного параметра α , связанного с расположением упругой и пластической зон.

Минимальное значение критической силы реализуется при условии минимума интеграла (1.18) по параметру α . Анализ и вычисления по формулам (1.18), (1.16), (1.15) показывают, что при заданном отношении $\nu = E_2 / E_1$ функция $T(\alpha)$ имеет относительный минимум в конце интервала изменения параметра $\alpha = \alpha_* = 4\nu$ (фиг. 3).

При $\alpha = \alpha_*$ уравнение семейства линий $s^\circ(s^\circ, \alpha)$ вырождается в точку с координатами $s^\circ = 0$, $s^\circ = -1$ (фиг. 2), а равенства (1.16), (1.18) дают



Фиг. 3

$$K_*^\circ = 4\nu, \quad T(\alpha_*) = 2\nu, \quad P^\circ = 1, \quad P = P_*$$

Таким образом, критическое усилие сжатия упруго-пластического стержня в условиях продолжающегося нагружения, найденное путем линеаризации уравнений равновесия при помощи разложения (1.5), соответствует касательно-модульной нагрузке.

При постоянном сжимающем усилии в момент выпучивания имеет место потеря устойчивости «по Карману». В этом случае $b_1 = 0$, $\alpha = 0$, $s^\circ = (1 - \sqrt{\nu}) / (1 + \sqrt{\nu})$ и положение границы между упругой и пластической зонами не зависит от координаты s° стержня (фиг. 2).

2. Для исследования закритического поведения стержня при сжимающих усилиях, близких к касательно-модульной нагрузке, обратимся к нелинейным уравнениям равновесия (1.11).

Допуская, что при $P_1 \rightarrow P_*$, когда смещения u , w весьма малы, справедлива аппроксимация (1.13), из первого уравнения равновесия (1.11)

имеем

$$\frac{\alpha_1 c^\circ}{(1+c^\circ)^2 - \nu(1-c^\circ)^2} = \cos \pi s^\circ, \quad \alpha_1 = \frac{l}{\pi b E_1 h} \left(\frac{P_1 - P_*}{u_0} \right) \quad (2.1)$$

В результате сравнения (2.1) с соответствующим ему линеаризованным уравнением (1.15) найдем, что для малых конечных отклонений стержня от прямолинейной формы в качестве параметра граничных кривых при $u_0 = -hc^\circ(0)\theta_0$, $h^\circ = h/l$ следует принять

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{\gamma}{c^\circ(0)}, \quad \gamma = -\frac{4\nu h^\circ (P_1^\circ - 1)}{3\theta_0}, \quad P_1^\circ = \frac{P_1}{P_*} \quad (2.2)$$

$$c^\circ(0) = -\frac{1}{1-\nu} \left[(1+\nu) - \frac{\alpha_1}{2} \right] + \left\{ \frac{1}{(1-\nu)^2} \left[(1+\nu) - \frac{\alpha_1}{2} \right]^2 - 1 \right\}^{1/2}$$

Параметр α_1 , имеющий неопределенное значение в момент выпучивания, при нагрузках, превышающих P_* , связывает положение границы упругой и пластической зон с осевым сжатием и отклонением стержня. Величина $c^\circ(0)$ является корнем уравнения (2.1) при фиксированном значении координаты $s^\circ = 0$.

Анализируя закритическое поведение стержня в окрестности $P_1 = P_*$ и учитывая, что при $P_1 \rightarrow P_*$ $\alpha_1 \rightarrow 4\nu$, $c^\circ(0) \rightarrow -1$, $\gamma \rightarrow -4\nu$, введем в рассмотрение малые параметры

$$\beta = 4\nu - \alpha_1, \quad \omega = 4\nu + \gamma \quad (2.3)$$

Соотношение (2.2) следует рассматривать как алгебраическое уравнение, устанавливающее зависимость между величинами α_1 и γ .

Пользуясь равенствами (2.2), (2.3) и учитывая малость величин ω , β , в квадратичном приближении найдем

$$(1+3\nu)\beta^2 - 2[8\nu^2 + (1-3\nu)\omega]\beta + (1-\nu)\omega^2 = 0, \quad \beta = \frac{1-\nu}{16\nu^2}\omega^2$$

$$\alpha_1 = 4\nu - (1-\nu)\tau^2, \quad \tau = \frac{\omega}{4\nu} = 1 - \frac{\pi h^\circ (P_1^\circ - 1)}{3\theta_0} \quad (2.4)$$

Для получения асимптотического решения нелинейного уравнения изгиба в окрестности точки бифуркации исследуем вначале поведение семейства кривых (2.1) с параметром α_1 при $P_1 \rightarrow P_*$.

Принимая во внимание, что в этом случае область разгрузки исчезающе мала ($P_1 \rightarrow P_*$, $s^\circ \rightarrow 0$, $t^\circ = 1 + c^\circ \rightarrow 0$) и справедливы приближенные формулы

$$\frac{\alpha_1 c^\circ}{(1+c^\circ)^2 - \nu(1-c^\circ)^2} = \frac{4\nu - \beta}{4\nu} \left(1 + \frac{1-\nu}{4\nu} t^{\circ 2} + \dots \right)$$

$$\cos \pi s^\circ = 1 - \frac{(\pi s^\circ)^2}{2} + \dots$$

с точностью до слагаемых второго порядка малости относительно величин t° , s° , β получим

$$\left(\frac{s^\circ}{a^\circ} \right)^2 + \left(\frac{t^\circ}{b^\circ} \right)^2 = 1, \quad a^{\circ 2} = \frac{\beta}{2\pi^2\nu}, \quad b^{\circ 2} = \frac{\beta}{1-\nu}, \quad s_1^\circ = \pm \frac{\tau}{\pi} \left(\frac{1-\nu}{2\nu} \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

Здесь s_1° — граница между упругой и пластической зонами на боковой поверхности стержня ($t^\circ = 0$).

Из уравнения (2.5) следует, что при сжимающих силах, близких к касательно-модульной нагрузке, упругое ядро стержня представляет собой эллиптическую область с полуосями, зависящими от осевого сжатия и амплитуды углов поворота сечений.

Согласно (1.16), (2.5), (2.4), при

$$c^\circ = t^\circ - 1, \quad g_1 = 4\nu + 3(1 - \nu)\tau^2, \quad g_2 = -6\pi^2\nu$$

зависимость для переменной по длине изгибной жесткости стержня в квадратичном приближении имеет вид

$$(K^\circ)_{P_1 \rightarrow P_*} = R^\circ = \begin{cases} 4\nu & (s_1^\circ \leq s^\circ \leq 1/2) \\ g_1 + g_2 s^{\circ 2} & (0 \leq s^\circ \leq s_1^\circ) \end{cases} \quad (2.6)$$

Переходя к исследованию асимптотического решения нелинейного уравнения изгиба с жесткостью, заданной выражением (2.6), представим (1.11) в безразмерной форме

$$\frac{d}{ds^\circ} \left(R^\circ \frac{d\theta}{ds^\circ} \right) + 4\pi^2\nu P_1^\circ \sin \theta = 0 \quad (2.7)$$

Рассматривая малые отклонения стержня от прямолинейной формы, будем искать приближенное решение уравнения (2.7), полагая $\theta = \theta_0 \sin \pi s^\circ$ согласно (1.17). Применяя к нелинейному уравнению (2.7), связанному с вариационной задачей (1.3), метод Бубнова — Галеркина, имеем

$$\theta_0 L_1 - 4\pi\nu (\theta_0 L_2 - P_1^\circ L_3) = 0, \quad L_1 = \int_0^{s_1^\circ} \frac{dG_1}{ds^\circ} \sin \pi s^\circ ds^\circ$$

$$L_2 = \int_{s_1^\circ}^{1/2} G_2 \sin \pi s^\circ ds^\circ, \quad L_3 = \int_0^{1/2} G_3 \sin \pi s^\circ ds^\circ$$

$$G_1 = (g_1 + g_2 s^{\circ 2}) \cos \pi s^\circ, \quad G_2 = \sin \pi s^\circ, \quad G_3 = \sin (\theta_0 \sin \pi s^\circ)$$

Выполняя квадратуры

$$L_1 = -\frac{\pi s_1^\circ}{2} \left(g_1 + \frac{g_2 s_1^{\circ 2}}{3} \right) + \frac{1}{4} \left[g_1 + g_2 \left(\frac{1}{2\pi^2} + s_1^{\circ 2} \right) \right] \sin 2\pi s_1^\circ - \frac{g_2 s_1^\circ}{4\pi} \cos 2\pi s_1^\circ$$

$$L_2 = 1/4 - 1/2 s_1^\circ + 1/4 \pi^{-1} \sin 2\pi s_1^\circ, \quad L_3 = 1/2 I_1(\theta_0)$$

и учитывая малость величин s_1° , приходим к трансцендентному уравнению, связывающему углы поворота с осевым сжатием стержня:

$$1 + 5\pi^2 s_1^{\circ 3} + 2P_1 I_1(\theta_0) / \theta_0 = 0$$

где $I_1(\theta_0)$ — функция Бесселя первого рода.

Пользуясь при $\theta_0 \ll 1$ приближенным представлением $I_1(\theta_0) \approx \approx 1/2\theta_0$ и соотношениями (2.4), (2.5), найдем

$$\theta_0 = \frac{1/3 \pi h^2 (P_1^0 - 1)}{1 - m (P_1^0 - 1)^{1/3}}, \quad m = \left[\frac{2\pi\nu}{5(1-\nu)} \left(\frac{2\nu}{1-\nu} \right)^{1/3} \right]^{1/3}$$

Определяя наклон кривой $\theta_0 = \theta_0(P_1^0)$ в точке $P_1 = P_*$ и переходя согласно (1.17) к амплитуде прогибов стержня, при $w^0 = -w_0/h$ получим

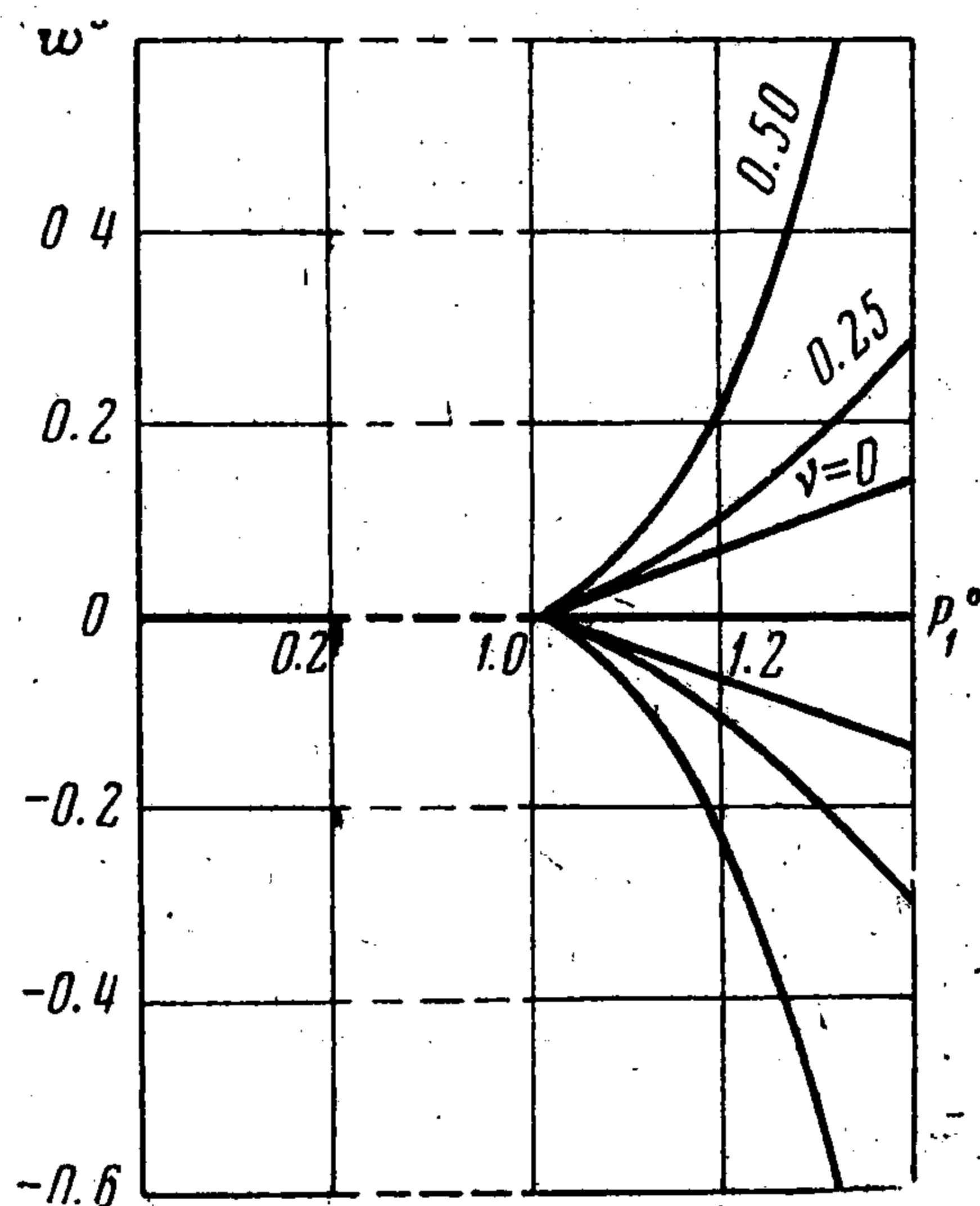
$$w^0 = \frac{1/3 (P_1^0 - 1)}{1 - m (P_1^0 - 1)^{1/3}}, \quad \left(\frac{dw^0}{dP_1^0} \right)_* = \frac{1}{3} \quad (2.8)$$

Из соотношений (2.8) следует, что точка с координатами $P_1^0 = 1$, $w^0 = 0$ будет точкой ветвления форм равновесия сжатого упруго-пластического стержня (фиг. 4). Наклон касательной к кривой $w^0 = w^0(P_1^0)$ при $P_1^0 = 1$ совпадает с результатами работ [3, 5].

3. Пользуясь результатами п. 1 и сохраняя, где это не оговорено, принятые обозначения, рассмотрим родственную задачу об устойчивости упруго-пластического равновесия кругового кольца прямоугольного поперечного сечения под действием возрастающего гидростатического давления.

Решение указанной задачи приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений изгиба

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{B}{c} \varepsilon \right) - \left(\frac{1}{R} - \theta' \right) \frac{d}{ds} (K\theta') &= 0 \\ \frac{d^3}{ds^3} (K\theta') + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} - \theta' \right) \frac{d}{ds} (K\theta') - \\ - \frac{d}{ds} (B\theta'^2) + qR\theta'' &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$



Фиг. 4

следующих из условий равновесия деформированного элемента кольца

$$\frac{Q}{R} - Q\theta' + \frac{dN}{ds} = 0, \quad \frac{N}{R} - N\theta' - \frac{dQ}{ds} = -q_1, \quad Q = \frac{dM}{ds}$$

Здесь ε, θ — компоненты конечной деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon &= e + 1/2(e^2 + \gamma^2) + z\kappa, & \kappa &= -\theta', & \sin \theta &= \gamma \\ \cos \theta &= 1 + e, & \gamma &= w' - v/R, & e &= v' + w/R \end{aligned}$$

где v, w — смещение кольца в направлении касательной и внешней нормали, R — радиус, q, q_1 — погонная гидростатическая нагрузка в момент бифуркации и в закритическом состоянии, N, Q, M — осевое усилие, перерезывающая сила и изгибающий момент. Соотношения между усилиями и деформациями, найденные путем интегрирования напряжений (1.2), по площади поперечного сечения при $P = -qR$, $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = e + 1/2(e^2 + \gamma^2) - z\theta'$ имеют вид

$$N = -qR + \frac{B(s)}{c} \varepsilon, \quad M = -K(s)\theta' \quad (-1/4\pi R \leq s \leq +1/4\pi R)$$

Здесь и в дальнейшем будем рассматривать выпучивание кольца с образованием двух полуволн. Этому случаю отвечает такое чередование упругих и пластических зон в окружном направлении, при котором в силу симметрии вместо замкнутого кольца можно рассматривать его дугу $-1/4\pi R \leq s \leq +1/4\pi R$.

Линеаризируя уравнения изгиба (3.1) и отбрасывая для тонкого кругового кольца в первом из уравнений слагаемое с множителем $(h/R)^2$, найдем

$$\frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{c^\circ} [(1+c^\circ)^2 - \nu(1-c^\circ)^2] \left(v' + \frac{w}{R} \right) \right\} = 0, \quad q^\circ = \frac{q}{q^*} \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{ds} \left[R^2 \frac{d^2}{ds^2} (K^\circ \theta') + (12\nu q^\circ + K^\circ) \gamma' \right] = 0, \quad q^* = \frac{4bh^3 E_2}{R^3}$$

В результате интегрирования первого уравнения системы (3.2) имеем

$$F(c^\circ) \left(v' + \frac{w}{R} \right) = C_1 = \text{const}, \quad F(c^\circ) = \frac{1}{c^\circ} [(1+c^\circ)^2 - \nu(1-c^\circ)^2] \quad (3.3)$$

Исходя из концепции продолжающегося нагружения будем искать решение дифференциального уравнения (3.3) в форме

$$v = v_0 \sin \frac{2s}{R} + v_*(s), \quad w = w_0 \cos \frac{2s}{R} + w_*(s) \quad (3.4)$$

учитывающей перемещения изгиба и всестороннего сжатия при бифуркации. Здесь v_* , w_* — дополнительные смещения упруго-пластического кольца

при равномерном внешнем давлении как криволинейного стержня переменной жесткости.

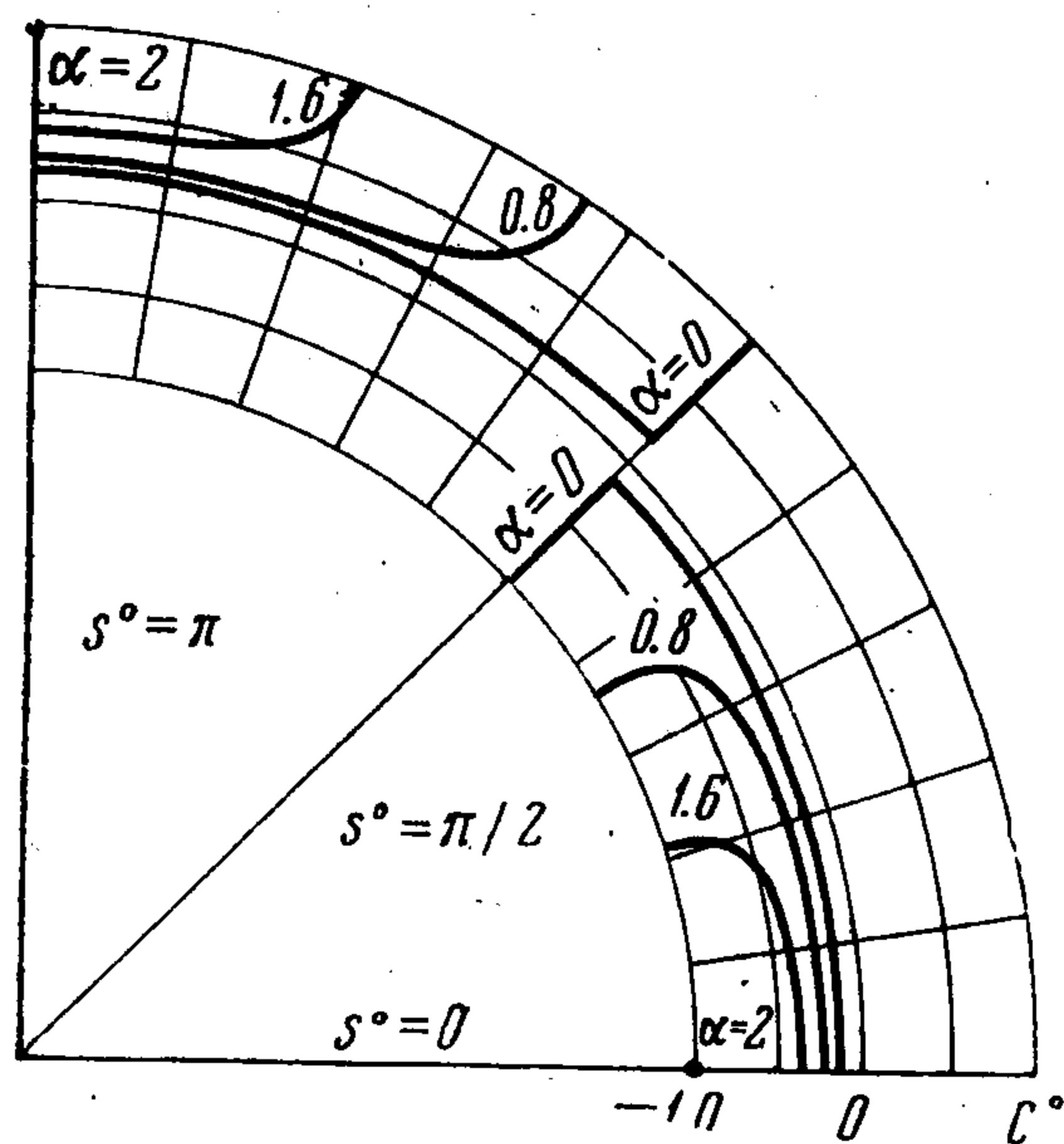
Пользуясь (3.3), (3.4) и полагая в пределах рассматриваемой четверти кольца $(v_*' + w_*/R) = e_*(s) = -e_0/F(c^\circ)$, получим

$$F(c^\circ) (2v_0 + w_0) \cos \frac{2s}{R} = (C_1 + e_0) R$$

Вычисляя постоянную интегрирования C_1 из условий $v_0 = w_0 = 0$, $e_0 = 0$, справедливых в момент предшествующий бифуркации, и вводя в рассмотрение неопределенный параметр $\alpha = e_0 R / (2v_0 + w_0)$, придем к выражению

$$F(c^\circ) \cos s^\circ = \alpha, \quad s^\circ = 2s/R, \quad -\pi/2 \leq s^\circ \leq +\pi/2 \quad (3.5)$$

Трансцендентное уравнение (3.5) определяет положение границы упругой и пластической зон с точностью до параметра α и совпадает с соответствующим уравнением для сжатого стержня. На фиг. 5 представлен характер кривых $c^\circ(s^\circ, \alpha)$, построенных по этому уравнению.



Фиг. 5

Для нахождения критического значения всестороннего внешнего давления воспользуемся методом Бубнова — Галеркина. Разыскивая решение второго уравнения системы (3.2) в форме $\gamma = \gamma_0 \sin^2 \alpha$ и выполняя квадратуры, найдем

$$q^0 = \frac{1}{2\nu} T(\alpha) \quad (3.6)$$

где $T(\alpha)$ — функция параметра α , определяемая выражением (1.18).

Пользуясь результатами решения задачи об устойчивости стержня, заключаем, что минимальное критическое давление кругового кольца реализуется при $\alpha = \alpha_* = 4\nu$, $K^0 = K_*^0 = 2\nu$, $T(\alpha_*) = 2\nu$ и соответствует касательно-модульной нагрузке

$$q^0 = 1, \quad q = q_*, \quad \lambda = (3E_2 / \sigma_*)^{1/2}, \quad \lambda = R / i$$

Здесь σ_* — критическое напряжение сжатия, λ — гибкость, i — радиус инерции сечения кольца.

Для получения решения задачи о выпучивании упруго-пластического кольца «по Карману» следует положить окружную деформацию сжатия равной нулю. При $e^0 = 0$, $\alpha = 0$ ширина пластических зон в пределах каждой четверти кольца оказывается постоянной (фиг. 5) и процедура вычислений по формулам (3.5), (3.6) приводит к критическому внешнему давлению, отвечающему приведенно-модульной нагрузке.

Поступила 23 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. S h a n l e y F. R. The Column Paradox. J. Aeronaut. Sci., 1946, vol. 13, No. 12; 1947, vol. 14, No. 5 (Рус. перев.: Анализ веса и прочности самолетных конструкций. М., Оборонгиз, 1957.).
2. Р а б о т н о в Ю. Н. О равновесии сжатых стержней за пределами пропорциональности. Инж. сб., 1952, т. 11.
3. P f l ü g e r A. Zur plastischen Knickung gerader Stäbe. Ingrg — Arch., 1952, Bd 20, H. 5.
4. П а н о в к о Я. Г. О современной концепции упруго-пластического продольного изгиба. Сб. «Проблемы устойчивости в строительной механике», М., Стройиздат, 1965.
5. С и м е о н о в С. В. Об устойчивости упруго-пластического стержня. Инж. ж. МТТ, 1968, № 5.
6. К а ч а н о в Л. М. Основы теории пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
7. Р ж а н и ц ы н А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.