

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕЗАКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

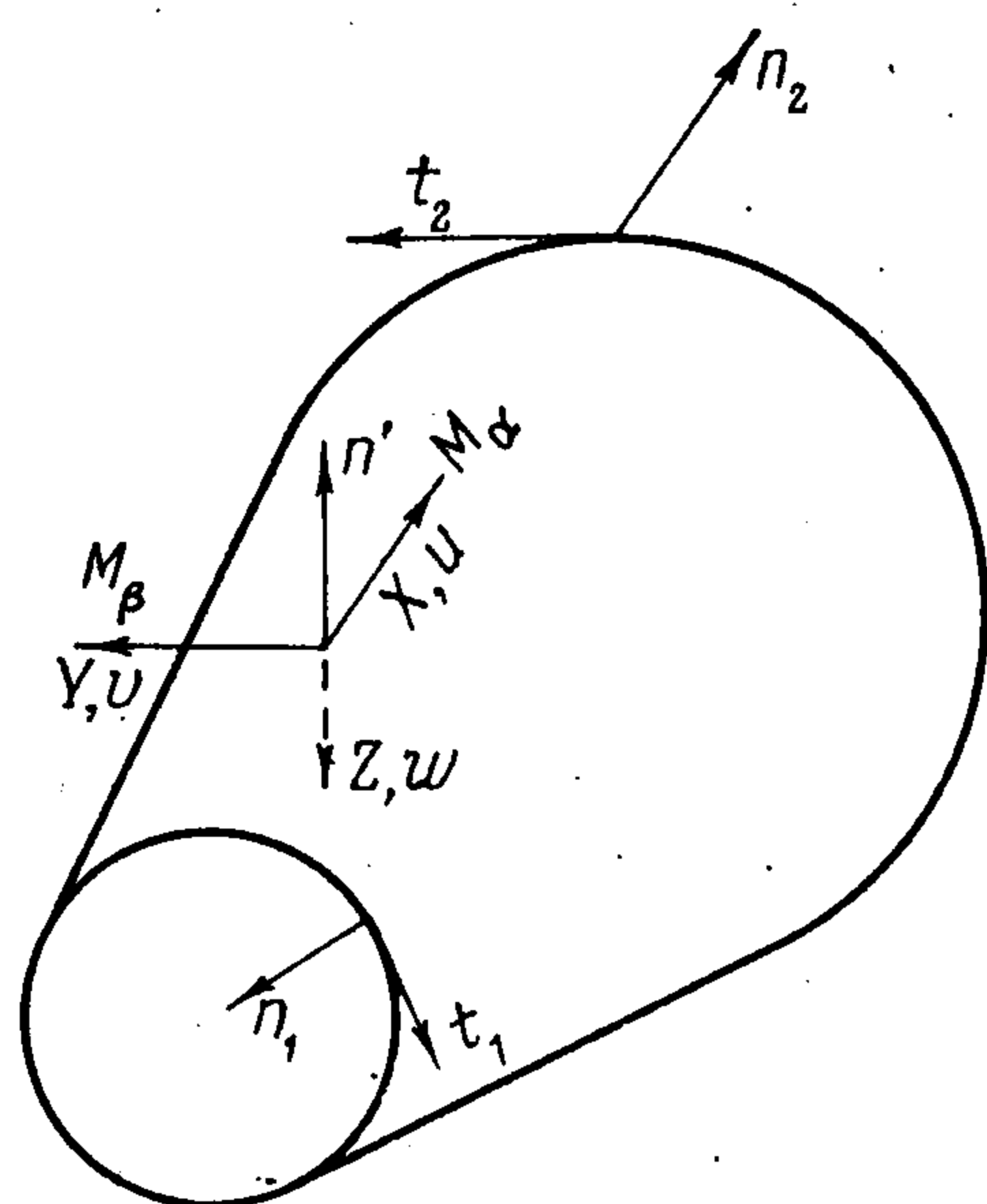
А. Л. Гольденвейзер, Е. М. Зверьев

(Москва)

Исследуется напряженное состояние тонкой упругой оболочки нулевой кривизны со свободными краями. Выводится, что условия безмоментности, сформулированные И. Н. Векуа для оболочек положительной кривизны, остаются в силе и для оболочек нулевой кривизны, если края последней — неасимптотические. Показано, что напряженность и деформативность оболочки сильно возрастает даже при малых нарушениях условий безмоментности.

1. Отнесем срединную поверхность оболочки нулевой кривизны к линиям кривизны. Обозначим параметры этой системы через (α, β) и примем, как в работе [1], что α — длина дуги по прямолинейной образующей. Остальные обозначения заимствуем также из [1].

Будет исследоваться замкнутая (не имеющая краев $\beta = \text{const}$) оболочка нулевой кривизны, оба поперечных края которой $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$



Фиг. 1

свободны от каких бы то ни было подкреплений. Оболочка нагружена поверхностной нагрузкой (с компонентами X, Y, Z) и краевыми силами, лежащими в касательной плоскости (силы n_1, t_1 приложены к краю $\alpha = \alpha_1$ и силы n_2, t_2 приложены к краю $\alpha = \alpha_2$). На фиг. 1 показаны положительные направления внешних сил, перемещений и векторов подвижного триедра.

2. Начнем с обсуждения вопроса о возможности найти решение поставленной задачи по безмоментной теории, т. е. при помощи интегрирования безмоментных уравнений равновесия с учетом тангенциальных

граничных условий, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$T_1 = n_1, S_1 = t_1 \quad \text{при } \alpha = \alpha_1. \quad (2.1)$$

$$T_1 = -n_2, S_1 = -t_2 \quad \text{при } \alpha = \alpha_2$$

Это значит, что требуется построить безмоментное напряженное состояние, соответствующее заданной поверхностной нагрузке X, Y, Z и краевым тангенциальным силам n_1, t_1, n_2, t_2 . Такую задачу для оболочек всюду положительной гауссовой кривизны рассмотрел И. Н. Векуа [2] и показал, что она имеет решение тогда и только тогда, когда поверхностная нагрузка и краевые силы не совершают работы на перемещениях

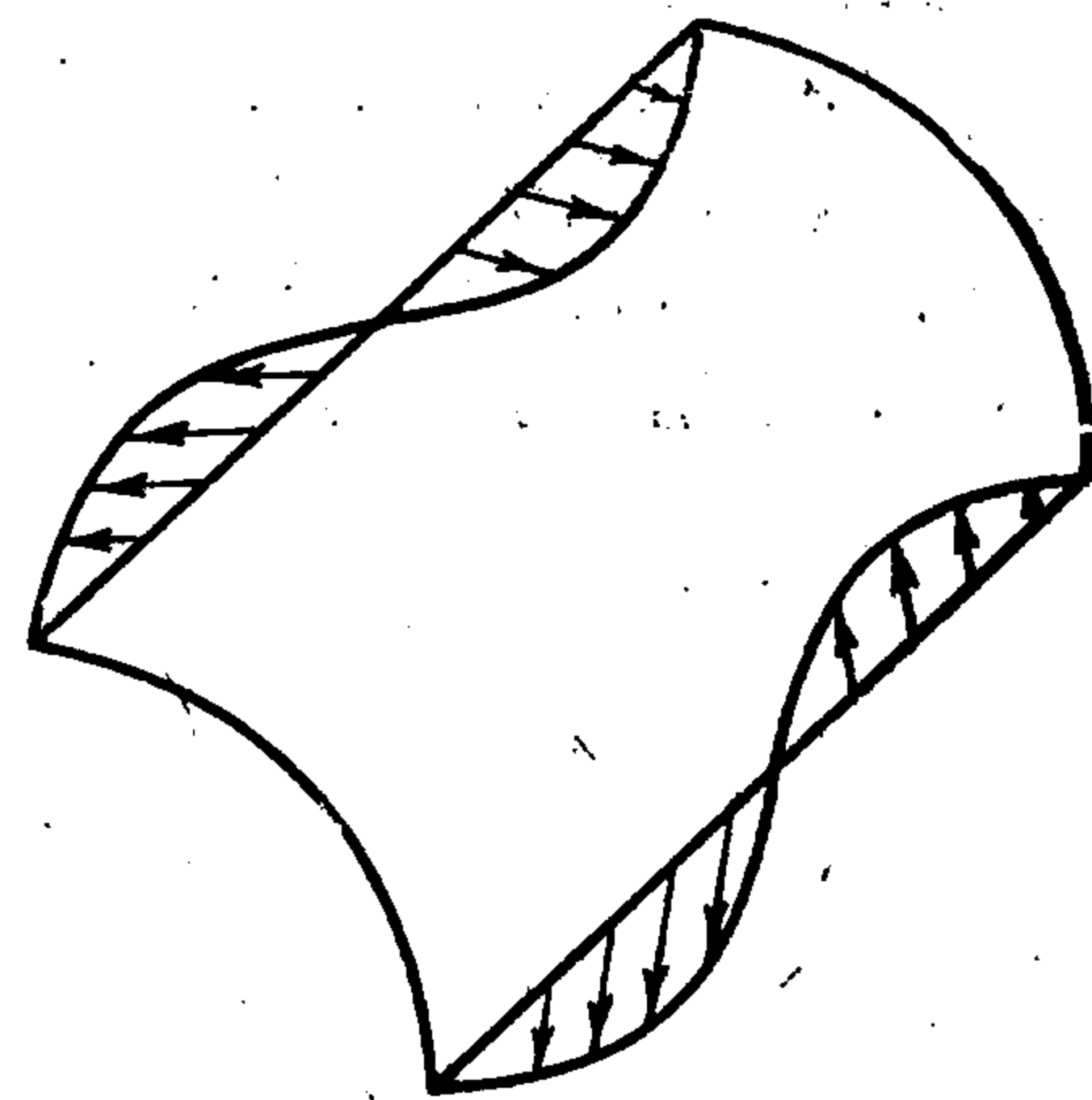
любых бесконечно малых изгибаний, возможных для срединной поверхности оболочки, при условии, что смещения ее края (или краев) ничем не стеснены. Здесь будет обсуждаться справедливость теоремы И. Н. Векуа для оболочек нулевой кривизны.

Прежде всего надо отметить, что если оболочка нулевой кривизны имеет прямолинейные края, то теорема И. Н. Векуа становится не верной. Это можно показать построением примера.

Пример. Рассмотрим незамкнутую оболочку нулевой кривизны, края которой $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \beta_1$, $\beta = \beta_2$ — свободны. Пусть поверхностные силы отсутствуют ($X = Y = Z \equiv 0$), криволинейные края $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$ — незагружены, а напряженное состояние порождается только тангенциальными силами, приложенными к прямолинейным краям оболочки (фиг. 2).

Безмоментное напряженное состояние, отвечающее этим требованиям, удовлетворяет следующим безмоментным уравнениям равновесия произвольной оболочки нулевой кривизны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (BT_1) + \frac{\partial S}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 + BX &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BS) + \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S + BY &= 0 \quad (2.2) \\ \frac{T_2}{R} + Z &= 0, \quad S_1 = -S_2 = S \end{aligned}$$



Фиг. 2

Здесь B — второй коэффициент первой квадратичной формы, R — отличный от бесконечности главный радиус кривизны.

Общее решение уравнений (2.2) записывается при помощи равенств

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{B} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{f_1}{B^2} \right) d\alpha + \frac{f_2}{B} - \frac{1}{B} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left[B \frac{\partial}{\partial \beta} (RZ) - B^2 Y \right] d\alpha \right\} d\alpha - \\ &\quad - \frac{1}{B} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} RZ + BX \right) d\alpha \quad (2.3) \\ S &= \frac{f_1}{B^2} + \frac{1}{B^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left[B \frac{\partial}{\partial \beta} (RZ) - B^2 Y \right] d\alpha, \quad T_2 = -RZ \end{aligned}$$

в которых f_1, f_2 — произвольные функции переменной β . Отсюда видно, что если $X = Y = Z \equiv 0$, а криволинейные края не загружены, т. е. если T_1, S должны удовлетворять однородным (при $n_1 = n_2 = t_1 = t_2 \equiv 0$) условиям (2.1), то уравнения равновесия имеют только тривиальное решение $T_1 = S = T_2 \equiv 0$. Следовательно, безмоментное напряженное состояние, вызванное силами, приложенными к прямолинейным краям оболочки нулевой кривизны, построить нельзя, какими бы ни были эти (отличные от нуля) силы.

Обратимся к перемещениям бесконечно малых изгибаний поверхности нулевой кривизны. Определяющие их уравнения записываются так ([1], стр. 126):

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + B \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) = 0, \quad \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u - \frac{w}{R} = 0$$

Величины B и R имеют тот же смысл, что и в (2.2), причем для оболочки нулевой кривизны справедливы формулы ([1], стр. 124, 125)

$$B = b_0 + \alpha b_1, \quad R = r_0 + \alpha r_1, \quad B/R = b/r$$

Здесь b, b_0, b_1, r, r_0, r_1 — функции одного β . Учитывая это, получим для перемещений u, v, w такие общие формулы

$$u = \Phi_1, \quad v = P \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} + B \Phi_2, \quad w = \frac{R}{B} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} u \right)$$

$$P = -B \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{1}{B^2} d\alpha \quad (2.4)$$

в которых Φ_1 и Φ_2 — произвольные функции β .

При $\beta = \text{const}$, т. е. на прямолинейных краях, u, v линейно меняются по α и не представляет труда подобрать на этих краях внешние тангенциальные силы так, чтобы они не совершали работы на перемещениях u, v . Отсюда следует, что к замкнутой оболочке нулевой кривизны теорема И. Н. Векуа не применима.

3. Рассмотрим замкнутую оболочку нулевой кривизны. Работа L всех внешних сил на ее перемещениях выражается формулой

$$L = \int_{\beta_1}^{\beta_2} (-un_1 - vt_1) B_1 d\beta + \int_{\beta_1}^{\beta_2} (un_2 + vt_2) B_2 d\beta +$$

$$+ \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (Xu + Yv + Zw) B d\alpha d\beta, \quad B_i = B|_{\alpha=\alpha_i} \quad (i=1, 2)$$

Внесем сюда выражения (2.4) для u, v, w и будем выполнять интегрирование по частям относительно β с тем, чтобы избавиться от $d\Phi_1/d\beta$ и $dv/d\beta$. Предполагая, что соответствующие подынтегральные выражения непрерывны по β , получим

$$L = - \int_{\beta_1}^{\beta_2} t_1 B_1^2 \Phi_2 d\beta + \int_{\beta_1}^{\beta_2} t_2 B_2^2 \Phi_2 d\beta - \int_{\beta_1}^{\beta_2} n_1 B_1 \Phi_1 d\beta +$$

$$+ \int_{\beta_1}^{\beta_2} n_2 B_2 \Phi_1 d\beta + \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[BY - \frac{\partial}{\partial \beta} (RZ) \right] B \Phi_2 d\alpha d\beta +$$

$$+ \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(BX + \frac{\partial B}{\partial \alpha} RZ \right) \Phi_1 d\alpha d\beta - \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi_1 \frac{\partial}{\partial \beta} P \left[BY - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial \beta} (RZ) \right] d\alpha d\beta - \int_{\beta_1}^{\beta_2} \Phi_1 \frac{\partial}{\partial \beta} (t_2 B_2 P_2) d\beta + \left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v RZ d\alpha + \right.$$

$$\left. + \Phi_1 t_2 B_2 P_2 + \Phi_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} P \left[BY - \frac{\partial}{\partial \beta} (RZ) \right] d\alpha \right\}_{\beta_1}^{\beta_2} \quad (3.1)$$

$$P_2 = P|_{\alpha=\alpha_2}$$

Если при обходе контура поперечного сечения будут выполняться очевидные требования периодичности, то в правой части равенства (3.1) исчезнет обинтегрированная часть, заключенная в фигурные скобки.

Примем это и потребуем, чтобы L обращалось в нуль при любых φ_1, φ_2 , т. е. чтобы внешние силы не совершали работы на перемещениях любых изгибаний. Это, очевидно, равносильно требованию, чтобы под интегралами (по β) обратились в нуль коэффициенты при φ_1 и φ_2 в отдельности. Отсюда

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[B \frac{\partial}{\partial \beta} (RZ) - B^2 Y \right] d\alpha + t_1 B_1^2 - t_2 B_2^2 = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} P \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (RZ) - BY \right] d\alpha + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(BX + \frac{\partial B}{\partial \alpha} RZ \right) d\alpha -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \beta} (t_2 B_2 P_2) - n_1 B_1 + n_2 B_2 = 0$$

4. Все безмоментные напряженные состояния, т. е. решения безмоментных уравнений равновесия (2.2), определяются формулами (2.3). Потребовав, чтобы выполнялись первые два из граничных условий (2.1), получим для произвольных функций f_1, f_2 такие формулы

$$f_1 = t_1 B_1^2, \quad f_2 = n_1 B_1$$

Внеся это в (2.3) и потребовав, чтобы выполнялись два последних условия (2.1), будем иметь два следующих необходимых и достаточных условия существования искомого безмоментного напряженного состояния

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[B \frac{\partial}{\partial \beta} (RZ) - B^2 Y \right] d\alpha + t_1 B_1^2 - t_2 B_2^2 = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{B^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha} B \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (RZ) - BY \right] d\alpha d\alpha + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(BX + \frac{\partial B}{\partial \alpha} RZ \right) d\alpha +$$

$$+ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{B_1^2}{B^2} t_1 \right) d\alpha - n_1 B_1 + n_2 B_2 = 0 \quad (4.2)$$

Равенства (4.1), (4.2) эквивалентны (3.2). В отношении (4.1) это очевидно. В (4.2), заметив, что в силу (2.4)

$$\frac{1}{B^2} = - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{P}{B} \right)$$

можно интегрированием по частям избавиться от внутреннего интеграла в первом слагаемом левой части. Полученное равенство с помощью (4.1) легко преобразовывается к виду (3.2). Таким образом доказано, что для замкнутой оболочки нулевой кривизны с поперечными краями, проходящими вдоль линий кривизны, теорема И. Н. Векуа верна (надо только требовать, чтобы компоненты поверхностной нагрузки и краевые силы были достаточно гладкими функциями точек поперечного сечения оболочки).

5. Рассмотрим теперь задачу в моментной постановке и на примере круговой цилиндрической оболочки средней длины исследуем как меняется асимптотика (по h) напряженно-деформированного состояния в зависимости от того выполняются или нарушаются условия теоремы И. Н. Веккуа.

Положение точки на срединной поверхности зададим при помощи относительного расстояния ξ , отсчитываемого в долях радиуса оболочки r вдоль образующей, и угловой координаты θ и примем, что полная срединная поверхность определяется неравенствами

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

Краевую нагрузку положим равной нулю ($n_1 = t_1 = n_2 = t_2 = 0$), а поверхностную нагрузку зададим так:

$$X = X_m \cos m\theta, \quad Y = Y_m \sin m\theta, \quad Z = Z_m \cos m\theta \quad (5.1)$$

выбрав $m = 2$ с тем, чтобы она была самоуравновешена на всей оболочке и чтобы ее изменяемость не была велика.

Поперечные края оболочки $\xi = -1$ и $\xi = 1$ будем считать свободными и для простоты ограничимся случаем, когда $Y_m(\xi)$, $Z_m(\xi)$ — четные функции, а $X_m(\xi)$ — нечетная функция ξ . Тогда задача будет симметрична относительно сечения $\xi = 0$ и можно рассматривать только явления, происходящие в области $0 \leq \xi \leq 1$.

Применим метод расчленения, описанный в [1], т. е. будем искать общее напряженное состояние Q в виде суммы четырех слагаемых

$$Q = Q^{(p)} + Q^{(m)} + Q^{(b)} + Q^{(e)}$$

где $Q^{(p)}$ — напряженное состояние, соответствующее частному интегралу, $Q^{(m)}$ — безмоментное напряженное состояние, $Q^{(b)}$ — чисто моментное напряженное состояние, $Q^{(e)}$ — простой краевой эффект (во всех случаях под Q подразумевается совокупность усилий, моментов, перемещений, углов поворота рассматриваемого напряженного состояния). Все эти напряженные состояния построены в [1] (гл. 6, 15, 17) и для соответствующих величин формулы записываются так ¹

$$\begin{aligned} S_1^{(p)} &= -r \int_1^\xi (mZ_m + Y_m) d\xi \sin m\theta \\ T_1^{(p)} &= r \int_1^\xi \left[-X_m + m \int_1^\xi (mZ_m + Y) d\xi \right] d\xi \cos m\theta \\ T_1^{(m)} &= C_1 \cos m\theta, \quad S_1^{(m)} = 0, \quad G_1^{(m)} = -C_1 r \frac{m^2}{3} \cos m\theta, \quad N_1^{(m)} = 0 \\ T_1^{(b)} &= -\eta^4 C_2 \frac{m^3(m^2-1)(m-1)}{6r(1-\sigma^2)} \xi^2 \cos m\theta \\ S_1^{(b)} &= \eta^4 C_2 \frac{m^2(m^2-1)(m-1)}{3r(1-\sigma^2)} \xi \sin m\theta \end{aligned} \quad (5.2)$$

¹ Для чисто моментного напряженного состояния в [1] даны только перемещения, но определяемые ими усилия и моменты подсчитываются без труда, как это описано в гл. 17.

$$\begin{aligned}
 G_1^{(b)} &= \eta^4 C_2 \frac{m(m-1)}{3(1-\sigma^2)} \bar{\sigma} \cos m\theta, & N_1^{(b)} &= 0 \\
 2Ehw^{(e)} &= (C_3 \cos \zeta + C_4 \sin \zeta) e^\zeta \cos m\theta \\
 T_1^{(e)} &= -\eta^2 m^2 v^{-2} r^{-1} (C_4 \cos \zeta - C_3 \sin \zeta) e^\zeta \cos m\theta \\
 T_2^{(e)} &= -r^{-1} (C_3 \cos \zeta + C_4 \sin \zeta) e^\zeta \cos m\theta \\
 S_1^{(e)} &= -\eta^{1/2} \sqrt{2} m v^{-1} r^{-1} [(C_3 - C_4) \cos \zeta + (C_3 + C_4) \sin \zeta] e^\zeta \sin m\theta \\
 G_1^{(e)} &= -\eta^2 v^{-2} (C_4 \cos \zeta - C_3 \sin \zeta) e^\zeta \cos m\theta \\
 N_1^{(e)} &= \eta^{1/2} \sqrt{2} v^{-1} r^{-1} [(C_3 - C_4) \cos \zeta + (C_3 + C_4) \sin \zeta] e^\zeta \cos m\theta \\
 v^4 &= 3(1 - \sigma^2), & \zeta &= 1/2 \sqrt{2} v (\xi - 1) \eta
 \end{aligned}$$

Под η подразумевается малый параметр

$$\eta = \sqrt{h/R} \quad (5.3)$$

Принято во внимание, что искомые величины по θ меняются по закону $\sin m\theta$ или $\cos m\theta$; поэтому вместо произвольных функций в формулы входят константы: C_1 и C_2 — константы безмоментного напряженного состояния и чисто моментного напряженного состояния (в каждом из них в силу симметрии задачи сохраняется только по одной константе), C_3 и C_4 — константы простого краевого эффекта у края $\xi = 1$.

Для круговой цилиндрической оболочки со свободными краями при нагрузке вида (5.1) условия теоремы И. Н. Векуа принимают вид

$$\int_{-1}^1 (mZ_m + Y_m) d\xi = 0, \quad \int_{-1}^1 [X_m + \xi m(mZ_m + Y_m)] d\xi = 0 \quad (5.4)$$

В рассматриваемом случае они эквивалентны равенствам

$$S_1^{(p)}|_{\xi=1} = T_1^{(p)}|_{\xi=1} = 0 \quad (5.5)$$

Однако будет считаться, что равенства (5.5) могут нарушаться в главных или второстепенных членах. Поэтому примем, что

$$T_1^{(p)}|_{\xi=1} = \eta^\mu \sum \eta^s T_{1(s)}^{(p)}, \quad S_1^{(p)}|_{\xi=1} = \eta^\mu \sum \eta^s S_{1(s)}^{(p)} \quad (5.6)$$

Здесь μ — целое число, с помощью которого будет задаваться точность выполнения условий (5.5): считается, что равенства (5.5) выполняются с погрешностью порядка

$$\varepsilon = O(\eta^\mu)$$

На краю $\xi = 1$ надо выполнить условия отсутствия усилий и моментов, что приведет к следующей алгебраической системе уравнений для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\begin{aligned}
 T_1^{(p)} + \eta^{-a} C_1^* - \eta^{-b+2} 4r^{-1} C_2^* - \eta^{-c+2} 4v^{-2} r^{-1} C_4^* &= 0 \\
 S_1^{(p)} + \eta^{-b+2} C_2^* - \eta^{-c+1} \sqrt{2} v^{-1} r^{-1} (C_3^* - C_4^*) &= 0 \\
 \eta^4 G_{1*} - \eta^{-a+4} 4/3 r C_1^* + \eta^{-b+2} 2/9 C_2^* - \eta^{-c+2} v^{-2} C_4^* &= 0 \\
 \eta^4 N_{1*} + \eta^{-c+1} 1/2 \sqrt{2} v^{-1} r^{-1} (C_3^* - C_4^*) &= 0
 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_1 &= \eta^{-a} C_1^*, & C_2 &= \eta^{-b-2} C_2^*, & C_3 &= \eta^{-c} C_3^* \\ C_4 &= \eta^{-c} C_4^*, & G_1^{(p)} &= \eta^4 G_{1*}, & N_1^{(p)} &= \eta^4 N_{1*} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Поправками от крутящих моментов в усилиях S_1 и N_1 для простоты изложения пренебрегаем. Для величин G_{1*} , N_{1*} , входящих в два последних уравнения (5.7), нетрудно было бы выписать их выражения, но они громоздки и для дальнейшего не будут нужны. Отметим только, что в обозначениях (5.8) для $N_1^{(p)}$ и $G_1^{(p)}$ степени η подобраны так, что

$$G_{1*} = O(T_1^{(p)}), \quad N_{1*} = O(T_1^{(p)}) \quad (5.9)$$

Будем считать, что в формулах (5.8) показатели a , b , c — целые числа, а константы C_i^* являются величинами вида $O(\eta^0)$. Тогда формулами (5.8) определится асимптотика констант C_i , а, следовательно, в силу формул (5.2) и искомая асимптотика напряженного состояния оболочки.

Подбор показателей a , b , c в (5.7) надо выполнить так, чтобы из него при $\eta \rightarrow 0$ вытекал итерационный процесс решения системы (5.7), в котором система уравнений исходного приближения разрешима и не зависит от η . Этому требованию удовлетворяют такие показатели:

$$a = -\mu, \quad b = 2 - \mu, \quad c = 2 - \mu \quad (5.10)$$

Чтобы доказать это, представим искомые константы в виде

$$C_i^* = \sum_{s=0} \eta^s C_{i(s)}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.11)$$

Тогда, подставив (5.11) в (5.7), учтя (5.6) и приравнявая нулю в каждом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях η , получим

$$\begin{aligned} T_{1(s)}^{(p)} + C_{1(s)} - 4r^{-1} C_{2(s)} - 4v^{-2} r^{-1} C_{4(s)} &= 0 \\ S_{1(s)}^{(p)} + 4r^{-1} C_{2(s)} - \sqrt{2} v^{-1} r^{-1} (C_{3(s+1)} - C_{4(s+1)}) &= 0 \\ G_{1(s-4+\mu)}^{(p)} - \frac{4}{3} r C_{1(s-4)} + \frac{2}{9} C_{2(s)} - v^{-2} C_{4(s)} &= 0 \\ N_{1(s-4+\mu)}^{(p)} + \frac{1}{2} \sqrt{2} v^{-1} r^{-1} (C_{3(s+1)} - C_{4(s+1)}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Считается, что

$$G_{1*} = \sum \eta^s G_{1(s)}^{(p)}, \quad N_{1*} = \sum \eta^s N_{1(s)}^{(p)}$$

Последовательность систем алгебраических уравнений (5.12), в которой величины с отрицательными индексами надо считать равными нулю, позволяет определять группы констант

$$C_{i(s)} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5.13)$$

рекуррентным образом, в порядке возрастания (s) .

Пусть константы (5.13) найдены при $s = 0, 1, \dots, k - 1$. Тогда, считая их, а также величины с верхним индексом (p) известными, можно найти (5.13) и при $s = k$. Для этого надо положить $s = k$ в уравнениях (5.12) и присоединить к полученным равенствам четвертое уравнение (5.12), положив в нем $s = k - 1$. Это приводит к системе из пяти уравнений с пятью неизвестными C_{ik} ($i = 1, 2, 3, 4$) и $C_{3(k+1)} - C_{4(k+1)}$, которая, как легко проверить, всегда имеет решение.

Нетрудно показать, что константы (5.13) можно найти и при $s = 0$. Положив в (5.12) $s = 0$ и присоединив сюда четвертое равенство (5.12) при $s = -1$, будем иметь для этих величин

$$\begin{aligned} C_{1(0)} &= -T_{1(0)}^{(p)} - \frac{11}{9} S_{1(0)}^{(p)} + 4r^{-1} G_{1(\mu-4)}^{(p)} - \frac{22}{9} N_{1(\mu-4)}^{(p)} \\ C_{2(0)} &= -\frac{1}{4} r (S_{1(0)}^{(p)} + 2N_{1(\mu-4)}^{(p)}) \\ C_{3(0)} = C_{4(0)} &= -\frac{1}{18} v^2 r S_{1(0)}^{(p)} + v^2 G_{1(\mu-4)}^{(0)} - \frac{1}{9} v^2 r N_{1(\mu-4)}^{(p)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Требуемое утверждение доказано.

6. Рассмотрим асимптотику напряженно-деформированного состояния оболочки, вытекающую из формул (5.9).

Формулы перехода от усилий T и моментов G к напряжениям можно записать так:

$$\sigma_T = \frac{1}{2} T / h, \quad \sigma_G = \frac{3}{2} G / h^2 \quad (6.1)$$

под T подразумевается любое усилие, а под G — любой момент.

Отсюда при помощи формул (5.2), (5.3), (5.8), (5.9) получаем такую асимптотику напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_T^{(p)} &= \eta^{-2} O(T^{(p)}), & \sigma_G^{(p)} &= \eta^0 O(T^{(p)}) \\ \sigma_T^{(m)} &= \eta^{\mu-2} O(T^{(p)}), & \sigma_G^{(m)} &= \eta^\mu O(T^{(p)}) \\ \sigma_T^{(e)} &= \eta^{\mu-4} O(T^{(p)}), & \sigma_G^{(e)} &= \eta^{\mu-4} O(T^{(p)}) \\ \sigma_T^{(b)} &= \eta^{\mu-2} O(T^{(p)}), & \sigma_G^{(b)} &= \eta^{\mu-4} O(T^{(p)}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Асимптотику перемещений для частного интеграла и безмоментного напряженного состояния можно получить исходя из соотношений упругости

$$\begin{aligned} 2Eh \frac{\partial u}{\partial \alpha} &= T_1 - \sigma T_2, & 2Eh \left[\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + B \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) \right] &= T_2 - \sigma T_1 \\ 2Eh \left(\frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u - \frac{v}{R} \right) &= 2(1 + \sigma) S_1 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Считая, что изменяемость перемещений невелика, т. е. что дифференцирование не изменяет их асимптотический порядок, можно написать

$$2EhU^{(p)} = O(T^{(p)}), \quad 2EhU^{(m)} = O(T^{(m)}) = \eta^\mu O(T^{(p)}) \quad (6.4)$$

где U — любое из перемещений.

Эти оценки не годятся для чисто моментного напряженного состояния, для которого главные части левых частей равенств (6.3) исчезают и для краевого эффекта, для которого неверно предположение о малой изменчивости перемещений. Для чисто моментного напряженного состояния вместо (6.3) надо пользоваться соотношениями вида

$$2Eh\kappa_1 = 3h^{-2} (G_1 - \sigma G_2), \quad 2Eh\kappa_2 = 3h^{-2} (G_2 - \sigma G_1)$$

$$2Eh\tau = 3h^{-2} (1 + \sigma) H_1$$

откуда, выразив κ_1 , κ_2 , τ через перемещения, получим

$$2EhU^{(b)} = \eta^{-4} O(G^{(b)}) = \eta^{\mu-4} O(T^{(p)}) \quad (6.5)$$

Асимптотика перемещений краевого эффекта вытекает из формул (5.2), (5.3), (5.8). Ее можно выразить формулой

$$2EhU^{(e)} = O(T_2^{(e)}) = \eta^{\mu-2} O(T^{(p)}) \quad (6.6)$$

Под $U^{(e)}$ надо подразумевать наибольшее из перемещений краевого эффекта, т. е. перемещение $w^{(e)}$.

В дальнейшем условимся говорить, что величина Q на r порядков выше P , если $P = QO(\eta^r)$ (если относительная толщина оболочки равна 0.01, то слова «увеличение на порядок» имеют обычный смысл, т. е. означают появление дополнительного множителя, соизмеримого десяти).

Положим в (6.2), (6.4), (6.5), (6.6) $\mu = 4$, т. е. будем считать, что условия теоремы И. Н. Векуа выполняются с точностью до величин порядка

$$\varepsilon = O(\eta^4) = O(h^2).$$

Тогда напряжения частного интеграла будут на два порядка больше напряжений чисто моментного напряженного состояния и краевого эффекта, т. е. расчет по безмоментной теории, который в данном случае становится возможным, дает формально правильную картину напряжений. Существенные поправки при расчете по моментной теории получатся только в перемещениях, так как $U^{(b)}$ и $U^{(p)}$, $U^{(m)}$ в данном случае одного порядка. (Это естественно, так как по безмоментной теории перемещения незакрепленной оболочки вообще определяются не единственным образом.)

Формально, незакрепленная оболочка при нагрузке, удовлетворяющей условиям теоремы И. Н. Векуа, ведет себя так же, как и закрепленная оболочка (можно показать, что последняя имеет такой же асимптотический порядок напряжений и деформативности). Однако этот факт не имеет почти никакой практической ценности, так как асимптотика напряженно-деформированного состояния незакрепленной оболочки неустойчива (малые отклонения в нагрузке приводят к существенному изменению напряжений или перемещений). Например, при $\mu = 1$, т. е. при нарушении условий безмоментности в величинах порядка $O(\eta) = O(h^{1/2})$ (ошибка, со-

измеримая 10% при относительной толщине оболочки 0.01), напряжения увеличатся на порядок (грубо говоря в 10 раз), а перемещения увеличатся на три порядка (в 1000 раз).

При $\mu = 0$, когда условия безмоментности нарушаются в главных членах, напряжения возрастут на два порядка, причем будет преобладать чисто моментное напряженное состояние, а перемещения возрастут на четыре порядка (конечно, если останется верной линейная теория оболочек, т. е. если нагрузки будут значительно меньше тех, которые обычно несут оболочки).

7. Для проверки результатов асимптотического анализа задача решалась численно по моментной двумерной теории оболочек. Алгоритм такого решения подробно изложен в монографии [1] (гл. 10).

Нагрузка была задана в форме

$$X = \sin n\xi \cos 2\theta, \quad Y = \cos n\xi \sin 2\theta, \quad Z = \cos n\xi \cos 2\theta \quad (7.1)$$

Параметры, входящие в расчет, выбраны следующими:

$$\eta^2 = h/r = 0.01, \quad \sigma = 1/3, \quad 2Eh/(1 - \sigma^2) = 1, \quad r = 1$$

Из двух условий безмоментности напряженного состояния оболочки (5.4), при нагрузке (7.1), второе выполняется тождественно, а первое приводится к виду

$$\sin n = 0 \quad (7.2)$$

и будет выполнено, если $n = \pi k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

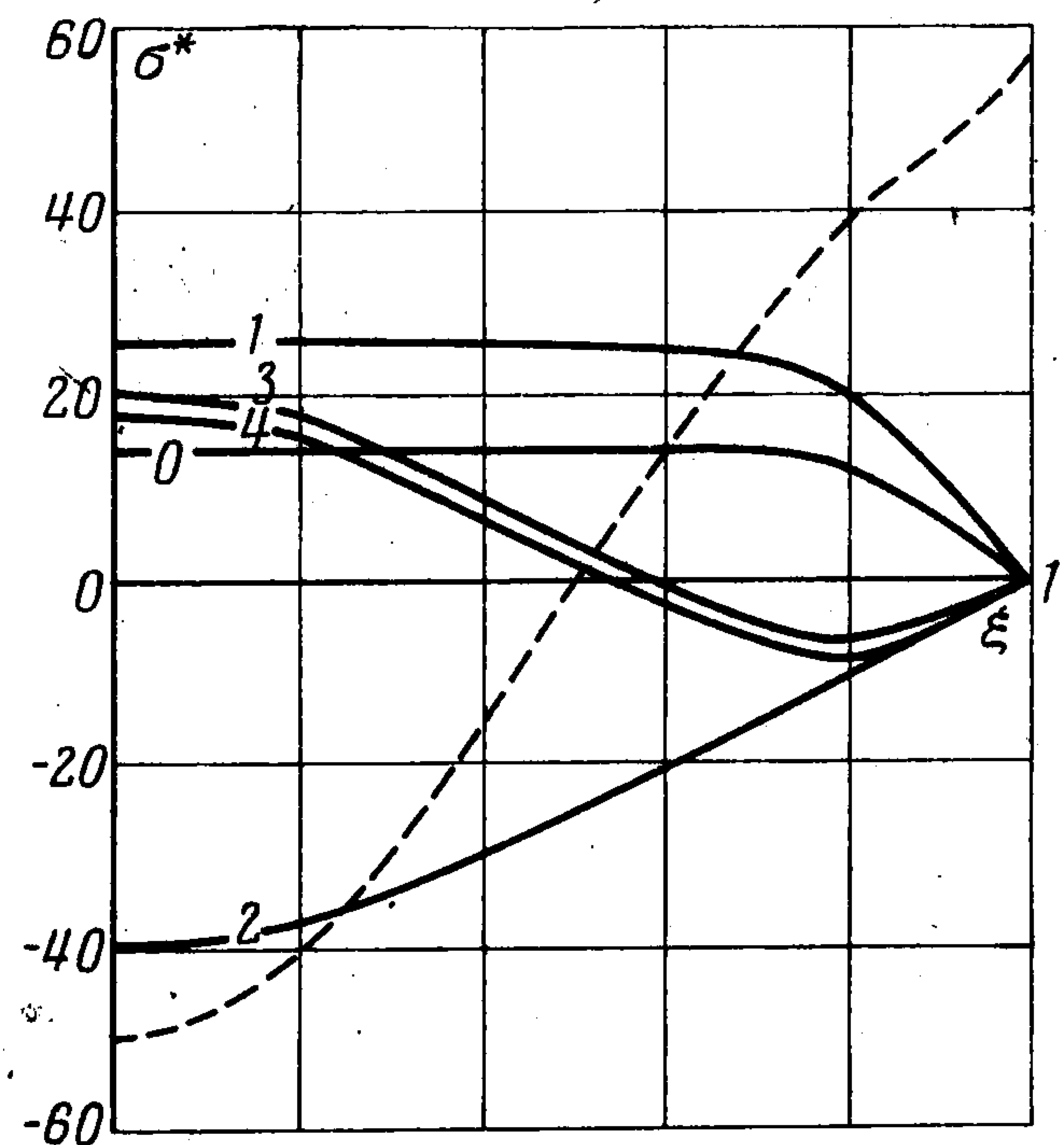
В расчете было положено $k = 1$ и также рассматривались случаи, когда (7.2) нарушается на величину 0.1^μ ($\mu = 3, 2, 1, 0$). Для этого числу n присваивались поочередно следующие значения (0.999π ; 0.99π ; 0.9π ; 0.5π) и для каждого производился расчет. При $n = \pi$ условия безмоментности выполняются точно, но безмоментная теория сама по себе имеет погрешность по меньшей мере порядка $O(h^2) = O(\eta^4)$ (см. [1], гл. 15) и значению $n = \pi$ поставлено в соответствие $\mu = 4$.

Результаты расчета представлены на графиках.

На фиг. 3 сплошными линиями изображены графики величины σ^* в зависимости от ξ . Соответствующие значения μ указаны на кривых. Величина σ^* связана с σ_G — напряжением от момента G_1 — следующими формулами:

$$\sigma_G = \sigma^* \cos 2\theta \quad (\mu = 2, 3, 4)$$

$$\sigma_G = 10^{2-\mu} \sigma^* \cos 2\theta \quad (\mu = 0, 1)$$



Фиг. 3

в которых масштабный фактор выбран в полном соответствии с теоретической асимптотикой (6.2). Эта асимптотика подтверждается тем, что во всех вариантах σ^* имеет одинаковый порядок (отношение наибольших ординат не больше трех).

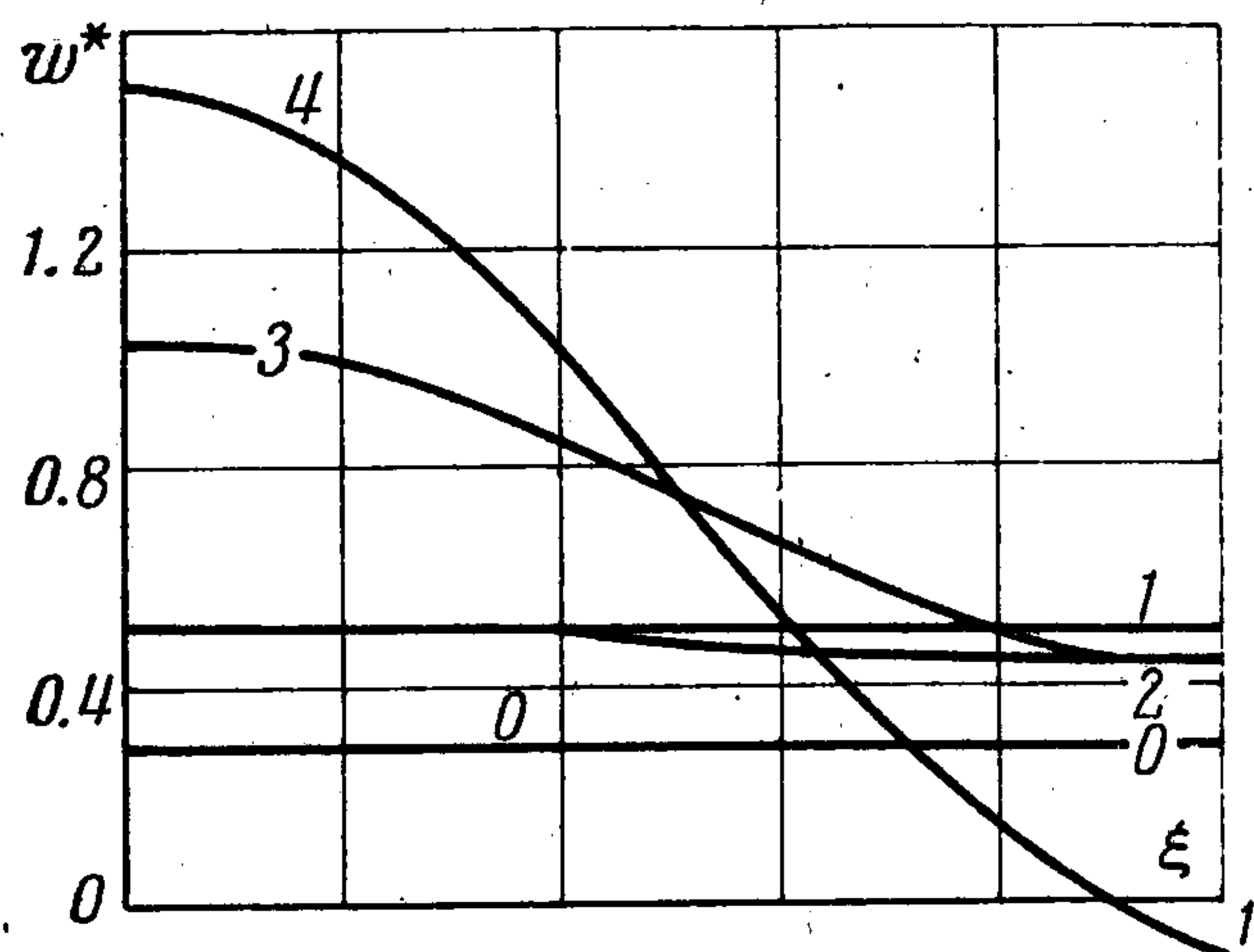
Пунктиром на фиг. 3 изображен график амплитудных значений напряжений σ_T от наибольшего тангенциального усилия T_2 для $\mu = 4$. Сравнив σ_T с σ_G при $\mu = 4$, видим, что $\sigma_T > \sigma_G$. Это значит, что при выполнении условий безмоментности напряженное состояние действительно можно назвать безмоментным, хотя это выражено не резко.

Если же сравнить σ_T с σ_G при $\mu = 2$, то увидим, что их максимальные ординаты мало отличаются. Это также соответствует асимптотике (6.2), из которой вытекает, что при $\mu = 2$ напряжения от усилий и моментов становятся соизмеримыми.

На фиг. 4 изображена вспомогательная функция w^* . Она связана с прогибом w следующим образом:

$$w = 10^{4-\mu} w^* \cos 2\theta \quad (\mu = 0, 1, 2, 3), \quad w = 4 \cdot 10^{4-\mu} w^* \cos 2\theta \quad (\mu = 4)$$

Здесь масштабный фактор выбран в соответствии с теоретической асимптотикой (6.4) — (6.6). Исключение представляет случай $\mu = 4$, для него введен дополнительный множитель. Графики подтверждают теорию. Несколько выпадает случай $\mu = 4$. В связи с этим заметим, что он и должен быть особым: из (6.4) — (6.6) следует, что



Фиг. 4

при $\mu < 4$ w вдали от края определяется в основном чисто моментным напряженным состоянием, а при $\mu = 4$ — суммой чисто моментного и безмоментного напряженных состояний.

8. Подскок напряженности, а следовательно, и деформативности при нарушении условий (5.4) неизбежен. Он вытекает из статических соображений и не может быть связан с дефектами теории оболочек.

Вырежем из круговой цилиндрической оболочки, несущей нагрузку (7.1), часть (фиг. 5), определяемую неравенствами

$$-1 \leq \xi \leq 1, \quad \frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$$

Поперечные края оболочки свободны. Поэтому поверхностную нагрузку, приложенную к вырезанной части, должны уравновешивать усилия и моменты, приложенные к краям $\theta = \frac{1}{4}\pi$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$.

Когда задача симметрична относительно сечения $\xi = 0$, то они имеют вид ([1], стр. 220—222)

$$T_2 = T_{22} \cos 2\theta, \quad G_2 = G_{22} \cos 2\theta, \quad S_2' = S_{22}' \sin 2\theta, \quad N_2' = N_{22}' \sin 2\theta \quad (8.1)$$

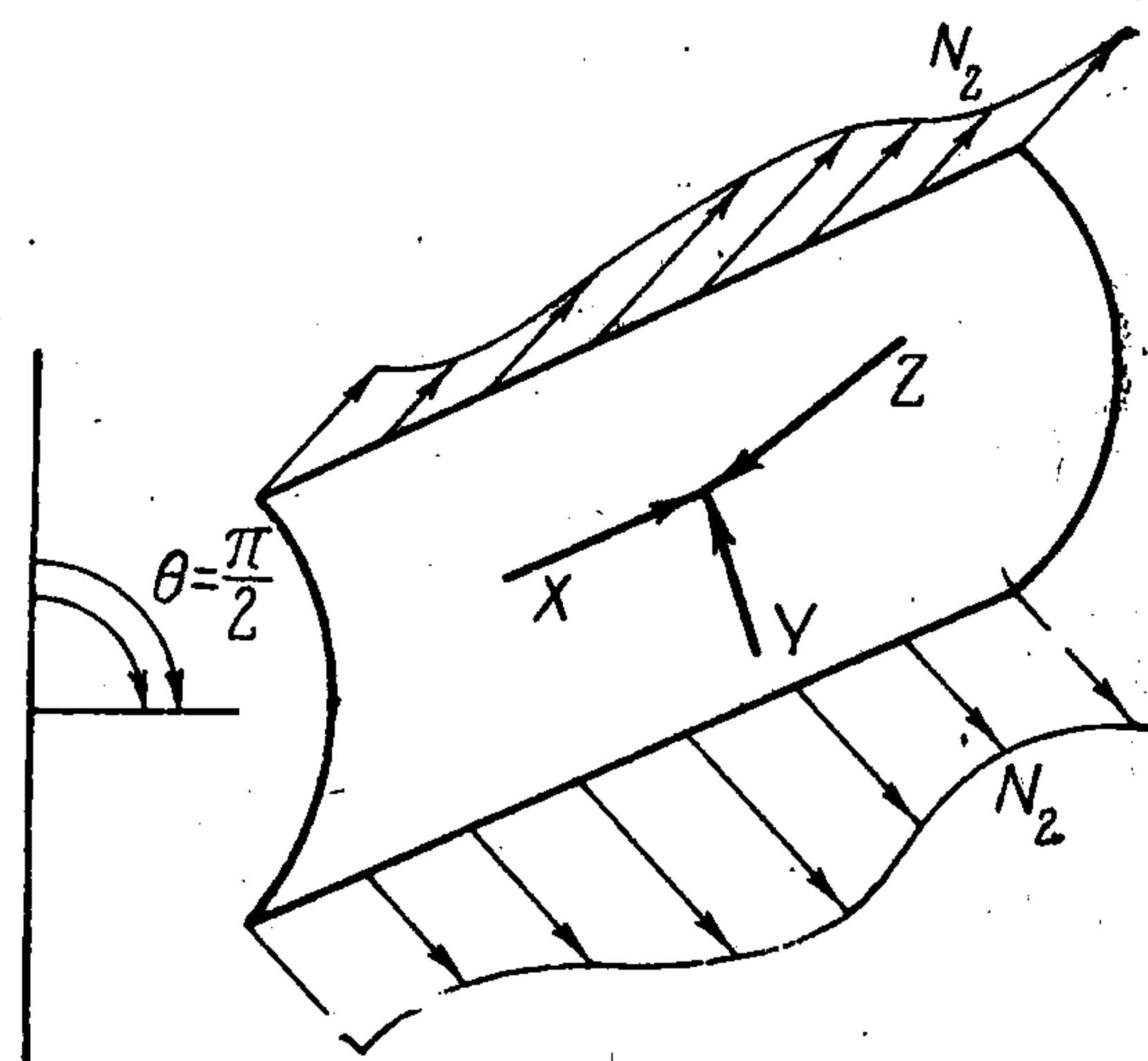
и поэтому на прямолинейных краях $T_2 = G_2 = 0$.

Спроектируем силы, действующие на вырезанный кусок, на луч $\theta = \frac{1}{2}\pi$, проведенный перпендикулярно к оси оболочки.

$$\int_{-1}^1 \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} [Z \cos(\theta - \frac{1}{2}\pi) + Y \sin(\theta - \frac{1}{2}\pi)] r d\theta d\xi = \sqrt{2} \int_{-1}^1 N_2' r d\xi$$

Подставив сюда (7.1), получим

$$2 \sin n = - \int_{-1}^1 N_2' d\xi \quad (8.2)$$



Фиг. 5

Отсюда, в предположении малой изменчивости входящих сюда функций, следует, что

$$N_2' = O(\sin n)$$

Но величина $\sin n$ по предположению и есть погрешность выполнения условий безмоментности. Поэтому

$$N_2' = O(\eta^\mu) \quad (8.3)$$

Из четвертого уравнения равновесия

$$\frac{\partial H_1}{\partial \xi} - \frac{\partial G_2}{\partial \theta} + rN_2 = 0$$

из (8.3) и формул (6.1) получим оценку

$$\sigma_G = O(\eta^{\mu-4})$$

которая полностью согласована с оценкой (6.2).

Поступила 25 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
2. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.