Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ ПЕРВОГО РОДА НА СИСТЕМЕ ОТРЕЗКОВ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

**В. А. Бабешко**

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается интегральное уравнение свертки, заданное на произвольном числе конечных отрезков при весьма общих ядрах. Оно содержит в себе интегральные уравнения контактных задач для слоя, покоящегося на жестком и линейно-деформируемом основании, интегральные уравнения задач теории ползучести и некоторых классов динамических контактных задач. Многие смешанные задачи теории упругости, гидромеханики, математической физики приводятся к уравнению (1.1) (обзор [1]).

Уравнение (1.1) решается в замкнутой форме [2] лишь в весьма частных случаях. В большинстве случаев его приходится решать тем или иным приближенным методом. Почти во всех работах этого направления рассматривается уравнение (1.1) в предположении, что $N = 1$. Один из приближенных методов решения предполагает использование приближенной «факторизации» — специального представления некоторых функций, описывающих интегральное уравнение [3,4]; при этом эффективность полученного приближенного решения затем проверяется на частных примерах. Работы, в которых метод приближенной факторизации был бы обоснован, т. е. были бы даны оценки погрешности приближенного решения, автору неизвестны.

В данной работе установлены разрешимость уравнения в пространствах, важных в приложениях, классы корректности и обоснован метод приближенной факторизации. Одновременно дается прием, позволяющий строить приближенное решение уравнения (1.1), сколь угодно мало отличающееся в равномерной метрике от точного.

§ 1. Исследуется интегральное уравнение вида

$$\mathbf{K}q \equiv \sum_{k=1}^{N} \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} k(x-\xi)\, q_{2k-1}(\xi)\, d\xi = 2\pi f_{2m-1}(x) \equiv 2\pi f(x) \tag{1.1}$$

$$a_{2m-1} \leqslant x \leqslant a_{2m}, \quad |a_1| < \infty, \quad |a_{2N}| < \infty \quad (m = 1, 2, \ldots, N)$$

ядро $k(t)$ представимо в форме

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u)\, e^{iut} du \tag{1.2}$$

Будем считать, что

1) функция $K(u)$ непрерывна, вещественна и четна на оси $x$.

2) функция

$$K(u) > 0, \quad |u| < \infty$$

3) функция

$$K(u) = c^2 u^{-2\gamma} [1 + O(u^{-\delta})], \quad u \to \infty, \quad 0 < \gamma < 1 \tag{1.3}$$

Здесь $\delta$ удовлетворяет неравенствам

$$\delta > \gamma \quad \text{при } \gamma \geqslant 0.5, \qquad \delta > 1 - \gamma \quad \text{при } \gamma < 0.5$$

Введем ряд определений для необходимых в дальнейшем пространств.

1.1°. Обозначим через $H_\gamma$ множество функций $q(x)$ таких

$$\| q \|_H^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K(u) \, | Q(u) |^2 du < \infty, \quad Q(u) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) \, e^{iux} dx \qquad (1.4)$$

Очевидно, элементы из $H_\gamma$ принадлежат некоторой шкале гильбертовых пространств [5].

1.2°. Через $S(\sigma)$ и $s(\sigma)$ соответственно обозначим пространства комплексных последовательностей $X = \{x_n\}$, сходящихся с весом $n^\sigma$, причем в случае $s(\sigma)$ — к нулю, т. е.

$$\lim | n^\sigma x_n | = c \quad (n \to \infty), \quad \sigma \geqslant 0, \quad c < \infty$$

В каждом из пространств введем норму соотношением

$$\| X \| = \sup_n | n^\sigma x_n |$$

1.3°. Обозначим $C_k^\lambda(a, b)$ пространство функций, производная порядка $k$ от которых на $[a, b]$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \lambda < 1$ и нормой

$$\| f \|_{C_k^\lambda(a,b)} = \sum_{n=0}^{k} \max_x | f^{(k)}(x) | + \max_{x,y} | f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y) | \, | x - y |^{-\lambda}$$
$$x, y \in [a, b]$$

При $k = \lambda = 0$ имеем $C(a, b)$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций.

1.4°. $L_p(a, b)$ — пространство абсолютно суммируемых на $[a, b]$ со степенью $p \geqslant 1$ функций с обычной нормой.

1.5°. Будем говорить, что $f(x) \in E$, если для ее Фурье — трансформации $F(\lambda)$ справедливо соотношение

$$\| f \|_E = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F(\lambda)}{K(\lambda)} \right| d\lambda < \infty, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \, e^{i\lambda x} d\lambda \qquad (1.5)$$

Значение функции $f(x)$ на отрезке $[a_{2k-1}, a_{2k}]$ будем обозначать через $f_{2k-1}(x)$. Очевидно, $f(x) \in C(-\infty, \infty)$.

1.6°. Через $C(\gamma)$ будем обозначать множество функций непрерывных с весом $(x - a_{2k-1})^\gamma (a_{2k} - x)^\gamma$ на отрезках $[a_{2k-1}, a_{2k}]$.

Функция $f(x) \in C(\gamma)$, если

$$\| f \|_{C(\gamma)} = \sup_k \max_x | (x - a_{2k-1})^\gamma (a_{2k} - x)^\gamma f(x) | < \infty$$
$$x \in [a_{2k-1}, a_{2k}]$$

§ 2. 1°. Уравнение (1.1) является обычным уравнением свертки, в котором неизвестная функция $q(x)$ обращается в нуль вне отрезков $[a_{2k-1}, a_{2k}]$, $k = 1, 2, \ldots, N$. В контактных задачах теории упругости [1] значения функции $q(x)$ на отрезках $[a_{2k-1}, a_{2k}]$ представляют неизвестные контактные напряжения $q_{2k-1}(x)$ под штампом. Известными на этом отрезке являются значения функции $f(x)$, которые при $x \in [a_{2k-1}, a_{2k}]$ будем обозначать через $f_{2k-1}(x)$. Функция $f(x)$ характеризует смещения точек поверхности слоя. Вне отрезков $[a_{2k-1}, a_{2k}]$ значения функции $f(x)$ неизвестны. Функции $f_{2k-1}(x)$ характеризуют форму основания штампа и глубину его внедрения в слой.

Описанные здесь механические предпосылки способствуют выбору необходимых классов функций, в которых должно быть исследовано уравнение (1.1).

Класс функций $q(x)$ обязан быть таким, чтобы:

1) функция $f(x)$ была бы ограничена при $|x| < \infty$;

2) энергия, накапливаемая упругим телом при вдавливании в него штампов, действующих на конечных отрезках, обязана быть конечной.

2°. Изучим свойства функции $k(t)$. Используя известные теоремы из теории интегралов Фурье [6], получим следующий результат.

*Лемма* 2.1. Справедливы при $t \to 0$ оценки

$$k(t) = O(t^{2\gamma-1}), \quad \gamma < 0.5; \qquad k(t) = O(\ln|t|), \quad \gamma = 0.5$$
$$k(t) = O(1), \quad \gamma > 0.5$$

При $|t| > \varepsilon > 0$ функция $k(t)$ непрерывна.

На основании леммы 2.1 доказывается теорема.

*Теорема* 2.1. Оператор $K$ действует из $L_p$ в $C(-T, T)$ непрерывно. Здесь $(2\gamma)^{-1} < p < \infty$, $\gamma \leqslant 0.5$; $1 < p < \infty$, $0.5 < \gamma$, $T < \infty$.

В условиях теоремы 2.1 выполняется, очевидно, требование 1) предыдущего пункта. Условия, позволяющие утверждать выполнение свойства 2) предыдущего пункта, дает

*Лемма* 2.2. Любое пространство $L_p$, $(\gamma + 0.5)^{-1} < p < \infty$, $\gamma \leqslant 0.5$ и $1 < p < \infty$, $0.5 < \gamma$ вложено в $H_\gamma$.

Доказательство леммы следует из ограниченности оператора Фурье-преобразования [7], действующего из $L_p$, $1 < p \leqslant 2$ в $L_q$, $q = p(p-1)^{-1}$.

*Теорема* 2.2. В пространстве $L_p$ $\{p = 2,\ \gamma \leqslant 0{,}25;\ (2\gamma)^{-1} < p \leqslant 2,\ 0.25 < \gamma \leqslant 0.5;\ 1 < p \leqslant 2,\ 0.5 < \gamma\}$ уравнение (1.1) не может иметь более одного решения.

*Доказательство*. Умножив уравнение (1.1) на $q(x) \in L_p$ и проинтегрировав по всей оси, получим

$$\|q\|_H^2 = \sum_{k=1}^{N} \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} f_{2k-1}(x)\, q_{2k-1}(x)\, dx \tag{2.1}$$

В силу теоремы 2.1 и леммы 2.2 соотношение (2.1) корректно. Из (2.1) следует, что если $f_{2k-1}(x) \equiv 0$, $x \in [a_{2k-1}, a_{2k}]$, то $q(x) \equiv 0$, $|x| < \infty$. Теорема доказана.

3°. Теорема 2.2 справедлива для более общего уравнения.

Пусть $M(u)$ — вещественная, четная непрерывная на вещественной оси функция, обладающая свойством

$$M(u) = O(u^{-2\gamma-\delta}), \qquad u \to \infty \tag{2.2}$$

Значение $\delta$ дано в § 1.

Рассмотрим возмущенное уравнение (1.1) вида

$$\mathbf{K}q + \lambda \mathbf{M}q = 2\pi f, \quad \mathbf{M}q \equiv \sum_{k=1}^{N} \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} m(x-\xi)\, q_{2k-1}(\xi)\, d\xi \tag{2.3}$$

Здесь $\lambda$ — комплексный параметр, а функция $m(x)$ имеет вид

$$m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} M(u)\, e^{iux} du \tag{2.4}$$

*Теорема* 2.3. Пусть

$$\| MK^{-1} \|_{C(-\infty,\infty)} = \max | M(u)\, K^{-1}(u) | = \varkappa < 1 \quad (|u| \leqslant \infty) \tag{2.5}$$

Тогда для уравнения (2.3) справедлива теорема 2.2, если $\lambda$ лежит внутри круга

$$| \lambda | < \varkappa^{-1} \tag{2.6}$$

Доказательство теоремы 2.3 аналогично доказательству теоремы 2.2, если в уравнении (2.3) разделить вещественную и мнимую части и рассматривать их как отдельные уравнения.

Теоремы 2.2, 2.3 доказывают единственность для уравнений (1.1), (2.3). Следующие параграфы посвящены доказательству существования решения.

§ 3. Существование решения уравнения (1.1) установим при помощи хорошо известного метода возмущений. Для этого расщепим специальным образом оператор $\mathbf{K}$ на два: $\mathbf{K}_s$ и $\mathbf{M}_s$; из них первый окажется обратимым, а второй малым в некотором пространстве. После этого доказательство существования решения не представит труда.

1°. Расщепление начнем с построения специального представления функции $K(u)$.

*Лемма* 3.1. Справедливо представление

$$K(u) = K_s(u) + M_s(u), \qquad -\infty \leqslant u \leqslant \infty \tag{3.1}$$

Функция $K_s(u)$ удовлетворяет условиям 1) — 3) § 1, является мероморфной, в комплексной плоскости имеет однократные полюсы $\zeta_n$ и однократные достаточно большие по модулю нули $z_n$. Первые $s$ нулей могут иметь конечную кратность выше первой.

Нули $z_n$ и полюса $\zeta_n$ верхней полуплоскости с учетом кратности обладают асимптотикой

$$z_n \sim i(\beta n + b) \quad \beta,\, b,\, g > 0; \qquad \zeta_n \sim i(\beta n + g) \quad n \to \infty \tag{3.2}$$

Функция $M_s(u)$ обладает свойством (2.2) и, кроме того

$$\| M_s \|_{C(-\infty,\infty)} = \max_u | M_s(u) | \to 0, \qquad s \to \infty \tag{3.3}$$

Представление (3.1) может быть получено на основании одной теоремы замкнутости [8], которая в данной работе используется в форме следующей леммы.

*Лемма* 3.1. Пусть четная, вещественная, непрерывная на всей вещественной оси функция $\varphi(u)$ обращается в нуль на бесконечности. Тогда она допускает приближение в $C(-\infty, \infty)$ функциями

$$\varphi_k(u) = (u^2 + \lambda_k^2)^{-1}, \qquad \lambda_k = \sigma k + \tau > 0$$

Применим лемму 3.1 к функции

$$\varphi(u) = \frac{K(u) - K_0(u)}{K_0(u)}, \quad K_0(u) = \frac{\Gamma(g/\beta + iu/\beta)\,\Gamma(g/\beta - iu/\beta)}{\Gamma(b/\beta + iu/\beta)\,\Gamma(b/\beta - iu/\beta)} \tag{3.4}$$

$$b - g = \gamma\beta, \qquad c = \beta^\gamma$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Выбирая $i\lambda_k$ отличными от полюсов функции $K_0(u)$, получим

$$\varphi(u) = \sum_{k=1}^{s} c_k\varphi_k(u) + R_s(u), \quad R_s(u) = O(u^{-8}), \quad u \to \infty \tag{3.5}$$

Здесь $R_s(u)$ — остаточный член приближения, $c_k$ — коэффициенты приближения.

Так как $\| R_s(u) \|_{C(-\infty,\infty)} \to 0$ при $s \to \infty$, то можно найти такое $s_0$, что при $s > s_0$ будет иметь место представление (3.1) со всеми указанными свойствами. При этом

$$K_s(u) = K_0(u)\left[1 + \sum_{k=1}^{s} c_k\varphi_k(u)\right], \quad M_s(u) = K_0(u)\,R_s(u) \tag{3.6}$$

2°. Займемся теперь исследованием уравнения (1.1) с ядром (1.2), в котором роль функции $K(u)$ играет $K_s(u)$.

Уравнение (1.1) с мероморфной функцией $K_s(u)$ уже исследовались при $N = 1$ в работах [9–11].

Интегральное уравнение приводится к бесконечной системе линейных уравнений, которая оказывается однозначно разрешимой [11]. Разрешимость системы удается доказать благодаря свойствам минимальности экспоненциальных функций на конечном отрезке, установленным в [12] (стр. 133) и [13].

Существуют и другие способы сведения интегрального уравнения или соответствующей краевой задачи [14,15] к бесконечной системе. Получающиеся при этом бесконечные системы идентичны полученным в [9–11,16], однако способ получения не позволяет доказать их разрешимость в целом.

Будем искать решение интегрального уравнения (1.1) с правой частью (1.5) в форме ряда

$$q_{2k-1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\eta)}{K_s(\eta)} e^{i\eta x} d\eta + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{p(l)} [x_l(2k-1, v)(x - a_{2k-1})^v \exp iz_l(x - a_{2k-1}) +$$

$$+ y_l(2k-1, v)(a_{2k} - x)^v \exp iz_l(a_{2k} - x)]\, i^v \tag{3.7}$$

$$a_{2k-1} \leqslant x \leqslant a_{2k}$$

Здесь $p(l)+1$ — кратность нуля $z_l$, лежащего в верхней полуплоскости; предполагается, что нумерация нулей $z_l$ и полюсов $\zeta_l$ верхней полуплоскости произведена в порядке возрастания модулей и аргументов (в случае равенства модулей).

Представив ядро $k(t)$ в форме ряда по вычетам и использовав (3.7), придем после интегрирования к бесконечной системе для

$$X_k=\{x_l(2k-1,v)\},\qquad Y_k=\{y_l(2k-1,v)\}$$

$$AX_k+C_kY_k+\sum_{m=1}^{k-1}[B(1,m)X_m+B(2,m)Y_m]=L_k$$

$$AY_k+C_kX_k+\sum_{m=k+1}^{N}[D(1,m)Y_m+D(2,m)X_m]=G_k \tag{3.8}$$

$$X_0=Y_0=X_{N+1}=Y_{N+1}=0,\qquad k=1,2,\ldots,N$$

$$AX_k=\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{p(l)}a_{r,l}(v)\,x_l(2k-1,v)\right\}$$

начиная с некоторого $l$, все $p(l)\equiv 0$.

Здесь

$$A=\{a_{r,l}(v)\}=\{D^v(\zeta_r-z_l)^{-1}\},\quad D^vf(z_l)=d^vf(z_l)/dz_l^{\,v}$$

$$C_k=\{c_{r,l}(v)\}=\{D^v(\zeta_r+z_l)^{-1}\exp iz_l(a_{2k}-a_{2k-1})\}$$

$$B(1,m)=\{b_{r,l}(1,v)\}=\{D^v(\zeta_r-z_l)^{-1}\langle\exp i\zeta_r(a_{2k-1}-a_{2m-1})-$$
$$-\exp i[z_l(a_{2m}-a_{2m-1})+\zeta_r(a_{2k-1}-a_{2m})]\rangle\}$$

$$B(2,m)=\{b_{r,l}(2,v)\}=\{D^v(\zeta_r+z_l)^{-1}\langle\exp i[z_l(a_{2m}-a_{m-1})+$$
$$+\zeta_r(a_{2k-1}-a_{2m-1})]-\exp i\zeta_r(a_{2k-1}-a_{2m})\rangle\}$$

$$D(1,m)=\{d_{r,l}(1,v)\}=\{D^v(\zeta_r-z_l)^{-1}\langle\exp i\zeta_r(a_{2m}-a_{2k})-$$
$$-\exp i[z_l(a_{2m}-a_{2m-1})+\zeta_r(a_{2m-1}-a_{2k})]\rangle\}$$

$$D(2,m)=\{d_{r,l}(2,v)\}=\{D^v(\zeta_r+z_l)^{-1}\langle\exp i[z_l(a_{2m}-a_{2m-1})+$$
$$+\zeta_r(a_{2m}-a_{2k})]-\exp i\zeta_r(a_{2m-1}-a_{2k})\rangle\}$$

$$L_k=\{l_r(k)\}=\left\{\sum_{m=1}^{k-1}t_r(m)-c_r(k)\right\},\qquad G_k=\{g_r(k)\}=\left\{\sum_{m=k+1}^{N}\tau_r(m)-s_r(k)\right\}$$

$$c_r(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\eta)\exp i\eta a_{2k-1}}{(\zeta_r-\eta)K_s(\eta)}d\eta,\quad s_r(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\eta)\exp i\eta a_{2k}}{(\zeta_r+\eta)K_s(\eta)}d\eta$$

$$t_r(m)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\eta)}{K_s(\eta)(\zeta_r-\eta)}\{\exp i[\zeta_r(a_{2k-1}-a_{2m})+\eta a_{2m}]-$$
$$-\exp i[\zeta_r(a_{2k-1}-a_{2m-1})+\eta a_{2m-1}]\}d\eta$$

$$\tau_r(m)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\eta)}{K_s(\eta)(\zeta_r+\eta)}\{\exp i[\zeta_r(a_{2m-1}-a_{2k})+\eta a_{2m-1}]-$$
$$-\exp i[\zeta_r(a_{2m}-a_{2k})+\eta a_{2m}]\}d\eta$$

Для законности перехода от интегрального уравнения к бесконечной системе необходимо [11–13] установить возможность представления функции $K_s(u)$ в виде отношения двух целых функций $P(iu)$ и $Q(iu)$, индикатриссы роста которых обязаны равняться $\sigma\,|\sin\varphi|$, $\sigma > 0$.

Для целых функций, представляющих $K_s(u)$ по формуле (3.6) с асимптотикой нулей (3.2), указанные свойства индикатрисс роста установлены в [17] (стр. 144).

Свойства операторов, порожденных матрицами $A$, $B$, $C, D$, рассмотрены в работах [9–11, 18].

Для дальнейшего понадобится следующая лемма.

*Лемма* 3.2. Оператор $A^{-1}R$ непрерывен из любого $S(\sigma)$, $\sigma > 0$ в $S(1-\gamma)$. Здесь $R$ — любой из операторов $C$, $B$, $D$. Элементы матрицы $A^{-1}$ — двусторонней обратной к $A$ — даются соотношением

$$A^{-1} = \{\tau_{l,r}(v)\} = \{H_r(-z_l, v)\,[K_-^{-1}(\zeta_r)]'^{-1}\}$$

$$H_r(-z_l, v) = \frac{(-1)^v}{p(l)!}\left[\frac{(\alpha+z_l)^{p(l)+1}}{K_+(\alpha)(\alpha+\zeta_r)}\right]^{(p(l)-v)} C_{p(l)}^{\;v}\Bigg|_{\alpha=-z_l}$$

$$C_n^{\,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$v = 0$ при $p(l) = 0$.

Здесь $K_{\pm}(u) = K_s^{\pm}(u)$ — результат факторизации [19] функции $K_s(u)$, т. е. представление последней в форме произведения функций, регулярных в верхней и нижней плоскостях

$$K_s(u) = K_s^{+}(u)\,K_s^{-}(u), \qquad K_s^{+}(-u) = K_s^{-}(u)$$

Очевидно

$$K_s^{+}(u) = \Gamma(g/\beta - iu/\beta)\,\Gamma^{-1}(b/\beta - iu/\beta)\left[1 + \sum_{k=1}^{s} c_k\varphi_k(u)\right]_+$$

*Лемма* 3.3. Оператор вложения $S(\sigma)$ в $s(\lambda)$, $\lambda < \sigma$ вполне непрерывен.

Лемма легко доказывается, если учесть, что $s(\lambda)$ есть пространство с базисом [20].

3°. Для доказательства разрешимости системы (3.8) рассмотрим уравнение (1.1) с правой частью вида

$$f_{2m-1}(x) = \int_{a_{2m-1}}^{\infty} k(x-\xi)\,\sigma_{2m-1}(\xi)\,d\xi + \int_{-\infty}^{a_{2m}} k(x-\xi)\sigma_{2m}(\xi)\,d\xi \qquad (3.9)$$

$$a_{2m-1} \leqslant x \leqslant a_{2m}$$

Здесь

$$\sigma_{2m-1}(\xi) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{p(l)} V_l(2m-1, v)\,(\xi - a_{2k-1})^v \exp iz_l(\xi - a_{2m-1})$$

$$\sigma_{2m}(\xi) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{p(l)} V_l(2m, v)\,(a_{2m} - \xi)^v \exp iz_l(a_{2m} - \xi) \qquad (3.10)$$

Относительно последовательностей $V(k) = \{V_l(k, v)\}$ предполагается, что они являются произвольными элементами из $s(\sigma)$

$$1-2\gamma < \sigma < 1, \quad \gamma \leqslant 0.5; \qquad 0 < \sigma < 1, \quad 0.5 < \gamma$$

В результате этих предположений функции $\sigma_k(\xi)$ принадлежат классу единственности, указанному в теореме 2.2.

Сведем, как это было сделано в § 3, п. 2, интегральное уравнение (1.1) с правой частью (3.9) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Решение интегрального уравнения будем искать в виде (3.7) при $F(\eta) \equiv 0$. В результате получим бесконечную систему (3.8), в правой части которой стоят элементы

$$L_k = AV(2k-1), \qquad G_k = AV(2k) \tag{3.11}$$

Подействуем слева на систему (3.8) с правой частью (3.11) матрицей $A^{-1}$. В результате придем к уравнению второго рода, которое символически можно представить в форме

$$X + \mathrm{U}X = V \tag{3.12}$$

Здесь $V$ — элемент пространства $2N$-мерной бесконечной последовательности, $l$ — компонента которого есть $V_l(1, s)$, $V_l(2, s)$, ..., $V_l(2N, s)$. Элемент $X$ также принадлежит этому пространству.

Совершенно ясно, что введение это пространства лишь упрощает форму записи бесконечной системы; существо же бесконечной системы (3.12) заключается в том, что оператор $\mathrm{U}$ в силу лемм 3.2, 3.3 вполне непрерывен в любом $s(\lambda)$, $\lambda < 1 - \gamma$.

Это обстоятельство является существенным при доказательстве разрешимости системы (3.12), а вместе с ней и интегрального уравнения (1.1).

Действительно, по построению система (3.12) эквивалентна интегральному уравнению (1.1) с правой частью (3.9). Так как уравнение (1.1) не может иметь более одного решения, то в силу указанных ранее свойств, используемых здесь рядов Дирихле, и бесконечная система (3.12) не может иметь более одного решения в любом $s(\lambda)$, $\lambda > 0$. Но правая часть системы (3.12) есть произвольный элемент банахова пространства. Таким образом, уравнение (3.12) есть уравнение второго рода в банаховом пространстве с вполне непрерывным оператором, не допускающее более одного решения при любой правой части. А это означает [21], что индекс оператора и оба дефектных числа — нули, т. е. уравнение (3.12), однозначно разрешимо при любой правой части

$$V \in s(\lambda), \qquad \lambda < 1 - \gamma$$

Для построения решения системы (3.12) ее можно свести [22, 11] к некоторой конечной системе линейных уравнений, определитель которой, как установлено выше, не равен нулю.

Оказывается, решение $X$ системы (3.12) в конечном итоге можно представить в форме

$$X = (I + \mathrm{U})^{-1} V, \qquad \|X\|_{s(\lambda)} \leqslant \|(I + \mathrm{U})^{-1}\| \cdot \|V\|_{s(\lambda)} \tag{3.13}$$

Применим полученные результаты к системе (3.8).

*Лемма* 3.4. Пусть $f(x) \in E$. Тогда решение системы (3.8) принадлежит $S(1-\gamma)$ и имеет место оценка

$$\|X\|_{S(1-\gamma)} \leqslant \Lambda \|f\|_E, \qquad \Lambda = \mathrm{const} \tag{3.14}$$

Доказательство следует из того, что свободный член системы второго рода принадлежит пространству $S$ $(1-\gamma)$, а резольвента $(I+{}_k\mathrm{U})^{-1}$ непрерывна в нем.

Принимая во внимание результат леммы 3.4 и применяя его к ряду (3.7), доказываем следующую теорему.

*Теорема* 3.1. Пусть $f(x)\in E$. Тогда при $K(u)=K_s(u)$ имеет место оценка

$$\|q\|_{C(\gamma)}\leqslant\|\mathbf{K}_s^{-1}\|\|f\|_E \tag{3.15}$$

Доказательство этой теоремы опускаем.

Результат леммы 3.4 вместе с формулой Эйлера — Маклорена для ряда (3.7) позволяют достаточно просто получить (3.15).

Укажем, что $\|\mathbf{K}_s^{-1}\|$ можно вычислять при большом $a$ для $N=1$, используя формулы работы [23], которые остаются в силе при $0<\gamma<1$.

§ 4. Перейдем теперь к доказательству разрешимости уравнения (1.1) с общим ядром. Рассмотрим уравнение (2.3), в котором $K(u)$ и $M(u)$ совпадают соответственно с $K_s(u)$ и $M_s(u)$. При $\lambda=1$ уравнение (2.3) совпадает, очевидно, с (1.1).

В силу свойства (3.2) можно подобрать такое $s>0$, что выполнятся условия теоремы 2.2. Это означает, что уравнение (2.3) для всех $\lambda$ из круга (2.6) не может иметь в $L_p$, указанном теоремой 2.2, более одного решения (а может и вообще не иметь!).

Заметим, что $C(\tau)$, $\tau<2\gamma$, $\gamma<0.5$; $\tau<1$, $\gamma\geqslant0.5$ вложено в указанное $L_p$.

Покажем, что уравнение (2.3) имеет в $C(\gamma)$ решение. Пусть $f(x)\in E$. Тогда в силу леммы 3.4 уравнение (2.3) с учетом оценки (2.2) при выбранном $s>0$ можно представить в символической форме вида

$$q+\lambda\mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{M}_s q=\mathbf{K}_s^{-1}f \tag{4.1}$$

Здесь $q(x)$ — вектор-функция, определенная на конечных отрезках $[a_{2k-1}, a_{2k}]$. Оператор $\mathbf{K}_s^{-1}$ строится на основании решения (3.13) бесконечной системы линейных уравнений.

Наиболее сложной в этой работе оказалась следующая лемма.

*Лемма* 4.1. Оператор $\mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{M}_s$ вполне непрерывен в $C(\tau)$, $\gamma\leqslant\tau<\varkappa^\circ$, $\varkappa^\circ=\inf(\delta, 2\gamma)$, $\gamma<0.5$; $\varkappa^\circ=\inf(\delta, 1)$, $\gamma\geqslant0.5$.

*Доказательство*. Оператор $\mathbf{K}_s^{-1}$ строится применением некоторого итерационного процесса к бесконечной системе уравнений и последующего решения однозначно обратимой конечной системы [11]. Именно таким путем и удается исследовать оператор $\mathbf{K}_s^{-1}$. Оператор $\mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{M}_s$ представляет суперпозицию операторов, аналогичных приведенным ниже

$$\mathbf{P}q\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M_s(u)}{K_s(u)}Q(u)\,e^{iux}du$$

$$\mathbf{R}q\equiv\sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon}\frac{e^{-it(a_{2k}-x)}+e^{-it(x-a_{2k-1})}}{K_s^+(t)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M_s(u)\,Q(u)\,du\,dt}{K_s^+(u)(u-t)} \tag{4.2}$$

Здесь $\varepsilon>0$ не превышает полуширину полосы регулярности функции $K_s(u)$.

Полную непрерывность операторов **P**, **R** необходимо проверять на отрезках $[a_{2k-1}, a_{2k}]$, $k = 1, 2, \ldots, N$ в пространстве $C(\tau)$. Это означает, что множества функций $\mathbf{P}q$, $\mathbf{R}q$ при $\|q\|_{C(\tau)} < B$ с весом $(a_{2k} - x)^\tau (x - a_{2k-1})^\tau$ обязаны быть компактными на каждом из отрезков $[a_{2k-1}, a_{2k}]$ в метрике пространства $C$.

Участвующая в (4.2) функция $Q(u)$ дается соотношением (1.4).

Оценка вида

$$K_s^+(z) = cz^{-\gamma}[1 + O(z^{-1})], \qquad |z| \to \infty, \qquad |\arg z + \pi/2| > 0$$

облегчает проверку указанного свойства оператора $R$.

Лемма 4.1 позволяет доказать разрешимость уравнения (4.1), которое, как сказано в начале параграфа, не может иметь более одного решения (а может и вообще не иметь) при

$$|\lambda| < \varkappa^{-1} = 1 + \theta, \qquad \theta > 0 \tag{4.3}$$

Пусть в уравнении (2.3) функция $f$ дается соотношением

$$f = \mathbf{K}_s\varphi, \qquad \varphi(x) \in C(\tau), \qquad \gamma \leqslant \tau < \varkappa^\circ \tag{4.4}$$

Выбранная функция $\varphi(x)$ принадлежит $L_p$, указанному в теореме 2.2. Такой выбор функции $f$ позволяет представить уравнение (4.1) в форме

$$q + \lambda \mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{M}_s q = \varphi \tag{4.5}$$

(4.5) есть уравнение второго рода с вполне непрерывным оператором в банаховом пространстве, способное иметь не более одного решения при любой правой части из этого пространства для любого $\lambda$ из круга (4.3). Рассуждая, как и в § 3 п. 3°, заключаем, что (4.5) однозначно разрешимо при всех $|\lambda| < \varkappa^{-1}$, в том числе и при $\lambda = 1$.

Решение уравнения (4.5) можно получить методом последовательных приближений. Процесс сходится для всех $|\lambda| < \varkappa^{-1}$. Это следует из того, что спектральный радиус $\rho$ оператора (4.5) (радиус круга, не содержащего точек спектра оператора), не меньше чем $\varkappa^{-1}$.

Таким образом

$$\|q\|_{C(\gamma)} \leqslant C\|\varphi\|_{C(\gamma)}, \qquad C = \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (\mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{M}_s)^m \right\| \tag{4.6}$$

Возвращаясь теперь к уравнению (2.3), заключаем, что оно однозначно разрешимо в $C(\gamma)$ для всех $f$ таких, что

$$\mathbf{K}_s^{-1} f \in C(\gamma) \tag{4.7}$$

Условие (4.7), как видно из теоремы 3.1, будет иметь место при $f \in E$. При этом

$$\|q\|_{C(\gamma)} \leqslant \|\mathbf{K}^{-1}\| \cdot \|f\|_E, \qquad \|\mathbf{K}^{-1}\| = C\|\mathbf{K}_s^{-1}\| \tag{4.8}$$

В приложениях наиболее часто встречается [1] случай $\gamma = 0.5$. Можно показать, что в этом частном случае для справедливости соотношения (4.7) достаточно, чтобы

$$f \in C_1^\lambda \qquad (\lambda > 0.5) \tag{4.9}$$

Для этих правых частей имеет место оценка

$$\| q \|_{C(0.5)} \leqslant M \| f \|_{C_1^\lambda} \tag{4.10}$$

Неравенства (4.8.10) являются соотношениями корректности для интегрального уравнения (1.1). Они указывают, что малое изменение правой части уравнения (1.1) в $E$, ($C_1^\lambda$) приводит к малому изменению решения в $C(\gamma)$, ($C(0.5)$).

§ 5. Применим полученные результаты для обоснования метода приближенной факторизации. Пусть имеются два интегральных уравнения вида

$$\mathrm{K}_1 q_1 = 2\pi f, \qquad \mathrm{K}_2 q_2 = 2\pi f$$

Предполагается, что ядра их имеют вид (1.2), причем фурье-трансформации $K_1(u)$ и $K_2(u)$ соответственно удовлетворяют условиям 1) — 3) § 1, а $f \in E$.

*Теорема* 5.1. Пусть величина $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon = \max | K_1(u) - K_2(u) | K_1^{-1}(u) (1 + | u |)^\alpha \quad (u \in [-\infty, \infty])$$

$$\alpha > 1 - \gamma, \quad \gamma < 0.5; \quad \alpha > \gamma, \quad 0.5 \leqslant \gamma$$

удовлетворяет условию

$$\varepsilon < \| \mathrm{K}_1^{-1} \|^{-1} L^{-1}$$

Тогда имеет место оценка

$$\| q_2 - q_1 \|_{C(\gamma)} \leqslant \varepsilon L \| \mathrm{K}_1^{-1} \| (1 - \varepsilon L \| \mathrm{K}_1^{-1} \|)^{-1} \| q_1 \|_{C(\gamma)}$$

$$L = \frac{2B(1 - p\gamma, 1 - p\gamma)}{\alpha p - 1} \sum_{k=1}^{N} (a_{2k} - a_{2k-1})^\varkappa \qquad \left(\varkappa = \frac{1 - 2p\gamma}{p}\right)$$

$$\alpha^{-1} < p < \gamma^{-1}, \quad 0.5 \leqslant \gamma; \qquad p = 2, \quad \gamma < 0.5$$

Здесь $B(x, y)$ — бета-функция Эйлера; величина $\| K_1^{-1} \|$ дается соотношением (4.8).

Теорема доказывается при помощи хорошо известного в теории возмущений приема, основанного на методе последовательных приближений; необходимо только иметь в виду, что оператор $\mathrm{K}_1 - \mathrm{K}_2$ действует из $C(\gamma)$ в $E$ непрерывно и его норма не превосходит величину $\varepsilon L$.

В заключение автор благодарит за ряд советов своего учителя И. И. Воровича, по настоянию которого выполнена эта работа.

Поступила 13 V 1970

## ЛИТЕРАТУРА


1. Александров В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
2. Симоненко И. Б. О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях типа свертки. Изв. вузов. Математика. 1959, № 2.
3. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
4. Koiter W. T. Solution of some elasticity problems by asymptotic methods. Сб. «Приложение теории функций в механике сплошной среды», т. 1, М., «Наука», 1965.
5. Крейн С. Г., Петунин Ю. И. Шкалы банаховых пространств. Усп. матем. н., 1966, т. 21, вып. 2 (128).
6. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
7. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 2, М., «Мир», 1965.
8. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., «Наука», 1965.
9. Бабешко В. А. Об одном асимптотическом методе при решении интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
10. Бабешко В. А. Об одном эффективном методе решения интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
11. Бабешко В. А. Об одном типе интегральных уравнений, возникающих в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
12. Леонтьев А. Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, т. 39.
13. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956.
14. Игнатенко М. М., Кириллов В. Х. О решении некоторых задач математической физики. Дифференциальные уравнения. 1969, т. 5, № 7.
15. Витюк В. Ф. Дифракция поверхностных волн на доке конечной ширины. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
16. Александров В. М. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
17. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М., Физматгиз, 1962.
18. Бабешко В. А. Об интегральном уравнении некоторых динамических контактных задач теории упругости и математической физики. ПММ 1969, т. 33, вып. 1.
19. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Усп. матем. н., 1958, т. 13, вып. 5.
20. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа, М.— Л., Гостехиздат, 1951.
21. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 2.
22. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа, изд. 5. М.— Л., Физматгиз, 1962.
23. Бабешко В. А., Асимптотические свойства решений одного класса интегральных уравнений, возникающих в теории упругости и математической физике, Докл. АН СССР, 1969, т. 186, № 6.