Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТИВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. М. Александров, Б. И. Сметанин

(Ростов-на-Дону)

Изучается интегральное уравнение первого рода в конечных пределах с разностным ядром, имеющим логарифмическую особенность. К таким интегральным уравнениям приводятся многие плоские и пространственные смешанные задачи теории упругости и математической физики.

Предлагается метод эффективного решения этого уравнения при малых значениях входящего в ядро характерного безразмерного параметра λ. Выделяется главная часть решения при малых λ, а остаток ищется в виде некоторого ряда по полиномам Лагерра. Для определения коэффициентов этого ряда получена некоторая бесконечная алгебраическая система. Путем урезания этой системы находится приближенное решение интегрального уравнения с выделенными характерными особенностями.

В качестве примеров рассмотрены задачи о действии полосового штампа на упругое полупространство и вдавливании штампа в упругую полосу.

Толчком к созданию данного метода послужили некоторые работы Г. Я. Попова [1–3].

§ 1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{-1}^{1} q(\xi)\, M\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x), \qquad |x| \leqslant 1 \tag{1.1}$$

Здесь $\lambda \in (0, \infty)$ — безразмерный параметр.

Ядро уравнения представимо интегралом Фурье

$$M(y) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos uy\, du \tag{1.2}$$

Относительно функции $L(u)$ буем предполагать следующее.

1) $L(u)\,/\,u$ — четная, вещественная, непрерывная и строго положительная при всех $u \in (-\infty, \infty)$ функция

$$2)\ L(u) = 1 + \frac{c_1}{|u|} + \frac{c_2}{u^2} + O(|u|^{-3}) \quad \text{при } |u| \to \infty \tag{1.3}$$

$$3)\ L(u) \sim Au \quad \text{при } u \to 0 \quad (A = \text{const} > 0)$$

К интегральным уравнениям типа (1.1) — (1.3) сводятся, например, некоторые плоские контактные задачи для полосы, клина, ряд контактных задач для цилиндрических тел, задачи о вдавливании полосового или кольцевого штампов в упругое полупространство и т. д.

Относительно интегрального уравнения (1.1) — (1.3) имеет место [4–6].

Теорема 1.1. Пусть функция $f(x)$ такова, что $f'(x)$ удовлетворяет условию Гельдера при $|x| \leqslant 1$ с показателем α, где $0 < \alpha < 1$. Тогда уравнение (1.1) — (1.3) однозначно разрешимо в $L_p(-1, 1)$, $1 < p < 2$ при всех $\lambda \in (0, \infty)$ и решение его имеет вид

$$q(\xi) = (1 - \xi^2)^{-1/2} Q(\xi) \qquad (1.4)$$

где функция $Q(\xi)$, по крайней мере, непрерывна при $|\xi| \leqslant 1$.

Далее, учитывая известную теорему М. Г. Крейна [7], ограничимся рассмотрением случая $f(x) \equiv f$.

Теорема 1.2. Если при некотором $\lambda \in (0, \infty)$ функция $\omega(\beta) \in L_p(0, \infty)$, $1 < p < 2$ есть решение интегрального уравнения

$$\int_0^\infty \omega(\beta) M(\beta - b)\, d\beta = \int_{2/\lambda}^\infty \left[\omega(\beta) + \frac{f}{A\lambda}\right] M\left(\beta + b - \frac{2}{\lambda}\right) d\beta \quad (0 \leqslant b < \infty) \qquad (1.5)$$

то решение интегрального уравнения (1.1) при $f(x) \equiv f$ в классе $L_p(-1, 1)$ находится по формуле

$$q(x) = \omega\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \omega\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) + \frac{f}{A\lambda}, \qquad |x| \leqslant 1 \qquad (1.6)$$

Наоборот, если $q(x) \in L_p(-1, 1)$, $1 < p < 2$ есть решение уравнения (1.1) при $f(x) \equiv f$ и некотором $\lambda \in (0, \infty)$, то функция $\omega(b)$, определяемая в соответствии с (1.6), является решением в $L_p(0, \infty)$ уравнения (1.5).

Доказательство. Рассмотрим систему трех интегральных уравнений [8]

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) M\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f \qquad (-\infty < x < \infty) \qquad (1.7)$$

$$\int_{-1}^{\infty} \omega\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right) M\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \int_{-\infty}^{-1} \left[\omega\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right) + v(\xi)\right] M\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi \quad (-1 \leqslant x < \infty)$$

$$\int_{-\infty}^{1} \omega\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right) M\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \int_{1}^{\infty} \left[\omega\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right) + v(\xi)\right] M\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi \quad (-\infty < x \leqslant 1)$$

Сложением (1.7) легко убедиться, что если известно решение этой системы, то решение уравнения (1.1) имеет вид

$$q(x) = \omega\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \omega\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) + v(x), \qquad |x| \leqslant 1 \qquad (1.8)$$

Осталось еще учесть, что первое уравнение (1.7) имеет решение

$$v(x) = f(A\lambda)^{-1} \qquad (1.9)$$

а второе и третье уравнения (1.7) очевидными заменами переменных приводятся к (1.5). Обратное утверждение теоремы сразу следует из единственности решения уравнения (1.1).

Следствие 1.1. Уравнение (1.5) однозначно разрешимо в $L_p(0, \infty)$ при всех $\lambda \in (0, \infty)$.

§ 2. При построении эффективных решений интегрального уравнения (1.1) естественно возникает мысль использовать малость или великость параметра λ. Это приводит к идее применения для исследования (1.1) асимптотических методов [8].

Асимптотические методы при больших λ основываются на выделении и точном обращении интегрального оператора, соответствующего логарифмической части [6] ядра $M(y)$. Именно, уравнение (1.1) записывается в виде

$$-\int_{-1}^{1} q(\xi)\ln\left|\frac{\xi-x}{\lambda}\right|d\xi = \pi f(x) + \int_{-1}^{1} q(\xi) F\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi, \qquad |x|\leqslant 1 \tag{2.1}$$

где функция $F(y)$ представляет собой при всех $\lambda > 0$ регулярную часть ядра; можно показать [6], что при условиях (1.3) она на отрезке $|y| \leqslant 2/\lambda$, по крайней мере, непрерывна. Далее интегральное уравнение (1.5) либо решается методом последовательных приближений по схеме

$$-\int_{-1}^{1} q_i(\xi)\left[\ln\left|\frac{\xi-x}{\lambda}\right| - F(0)\right]d\xi = \pi f(x) + \int_{-1}^{1} q_{i-1}(\xi)\left[F\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)+F(0)\right]d\xi$$
$$|x|\leqslant 1 \tag{2.2}$$

либо сводится к бесконечной алгебраической системе. Для этого решение $q(\xi)$ представляется в виде

$$q(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n T_n(\xi)(1-\xi^2)^{-1/2} \tag{2.3}$$

и используется тот факт, что полиномы Чебышева $T_n(\xi)$ являются собственными функциями оператора

$$B(Q) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Q(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\ln|\xi - x|\,d\xi \tag{2.4}$$

Асимптотические методы при малых λ основываются на использовании вместо уравнения (1.1) эквивалентного ему уравнения (1.5) и точном обращении стоящего слева интегрального оператора Винера — Хопфа. Конкретное решение уравнения (1.5) можно получить методом последовательных приближений по схеме

$$\int_{0}^{\infty}\omega_i(\beta)\,M(\beta-b)\,d\beta = \int_{2/\lambda}^{\infty}\left[\omega_{i-1}(\beta)+\frac{f}{A\lambda}\right]M\left(\beta+b-\frac{2}{\lambda}\right)d\beta, \quad 0\leqslant b<\infty \tag{2.5}$$

либо свести интегральное уравнение (1.5) к бесконечной алгебраической системе [5,8,9]. Метод сведения к бесконечной системе, разработанный В. А. Бабешко [5,9], непосредственно не дает возможности получить решение с выделенной сразу характерной особенностью $(1-x^2)^{-1/2}$ (см. (1.4)). Ниже будет дан новый метод сведения уравнения (1.5) к бесконечной системе, основанный на знании собственных функций некоторого интегрального оператора Винера — Хопфа, что позволяет сразу получить решение в форме (1.4).

Далее нам понадобятся некоторые результаты из работ Г. Я. Попова и С. А. Лутченко [1,3]. Ими показана справедливость следующих соотношений:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}}L_m^{-1/2}(2\tau)K_0(\tau-t)\,d\tau = \frac{\pi}{\gamma_m}e^{-t}L_m^{-1/2}(2t) \tag{2.6}$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{U_{2m}(\sqrt{1-e^{-\tau\pi}})}{\sqrt{1-e^{-\tau\pi}}}e^{-\tau\pi}k_0(\tau-t)\,d\tau = \frac{e^{-\pi t/2}U_{2m}(1-e^{-\pi t})^{1/2}}{1/2+m} \tag{2.7}$$

Здесь $K_0(z)$ — функция Макдональда, $L_m^{\alpha}(x)$ — полиномы Лагерра, $U_m(x)$ — полиномы Чебышева второго рода

$$k_0(z) = -\ln|\operatorname{th}(\pi z/4)|, \qquad \gamma_m = \sqrt{2/\pi}\,(2m)!!\,[(2m-1)!!]^{-1} \tag{2.8}$$

§ 3. Представим интегральное уравнение (1.5) в виде

$$\int_0^\infty \varphi(\tau) K_*(\tau - t)\,d\tau = -\int_0^\infty \varphi(\tau) N(\tau - t)\,d\tau + \tag{3.1}$$

$$+\int_0^\infty \left[\varphi(\tau + s) + \frac{1}{2} fs\right] K(\tau + t)\,d\tau \qquad (0 \leqslant t < \infty)$$

Здесь обозначено

$$\frac{\beta}{A} = \tau, \quad \frac{b}{A} = t, \quad \frac{2}{A\lambda} = s, \quad M(y) = K\left(\frac{y}{A}\right), \quad \omega(A\tau) = \varphi(\tau)$$

$$K(z) = K_*(z) + N(z) = \int_0^\infty \frac{L(w/A)}{w} \cos wz\,dw \tag{3.2}$$

в качестве $K_*(z)$ можно с одинаковым успехом взять $K_0(z)$, либо $k_0(z)$. Суть предлагаемого ниже метода от этого не изменится. Дальше, для определенности, будет принято $K_*(z) = K_0(z)$.

Будем искать решение уравнения (3.1) в виде

$$\varphi(\tau) = \varphi_0(\tau) + \varphi_1(\tau) \tag{3.3}$$

где $\varphi_0(\tau)$ и $\varphi_1(\tau)$ соответственно определяются из интегральных уравнений

$$\int_0^\infty \varphi_0(\tau) K_0(\tau - t)\,d\tau = \frac{1}{2} fs \int_0^\infty K_0(\tau + t)\,d\tau \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{3.4}$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(\tau) K_0(\tau - t)\,d\tau = -\int_0^\infty [\varphi_0(\tau) + \varphi_1(\tau)] N(\tau - t)\,d\tau + \tag{3.5}$$

$$+\frac{1}{2} fs \int_0^\infty N(\tau + t)\,d\tau + \int_0^\infty [\varphi_0(\tau + s) + \varphi_1(\tau + s)]\, K(\tau + t)\,d\tau \qquad (0 \leqslant t < \infty)$$

Решение уравнения (3.4) может быть получено методом Винера — Хопфа [10] и имеет вид

$$\varphi_0(t) = 0.5\, fs\, [\Phi(\sqrt{t}) + (\pi t)^{-1/2} e^{-t} - 1] \tag{3.6}$$

Здесь $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.

Разложим $\varphi_0(t)$ в ряд по полиномам Лагерра

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{2} fs \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sum_{m=0}^\infty A_m L_m^{-1/2}(2t) \tag{3.7}$$

коэффициенты A_m представимы в форме

$$A_m = \gamma_m [(-1)^m \sqrt{2} - a_m], \qquad a_m = \sqrt{2/\pi}\, \gamma_m^{-1} F(-m, 1; 1/2; 2) \tag{3.8}$$

Здесь $F(\alpha, \beta; \gamma; \delta)$ — гипергеометрическая функция, постоянные a_m могут быть найдены также из следующей рекуррентной формулы:

$$a_m + a_{m+1} = -(2m - 1)!!\, [(2m + 2)!!]^{-1} \qquad (m = 0, 1, \ldots;\ a_0 = 1)$$

Разложим теперь в ряды по полиномам Лагерра функции $N(\tau - t)$, $N(\tau + t)$, $K_0(\tau + t)$. Будем иметь

$$N(\tau \pm t) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m b_m^{\pm}(\tau) e^{-t} L_m^{-1/2}(2t) \tag{3.9}$$

$$K_0(\tau + t) = \pi \sum_{m=0}^{\infty} d_m(\tau) e^{-t} L_m^{-1/2}(2t) \tag{3.10}$$

$$b_m^{\pm}(\tau) = \int_0^{\infty} N(\tau \pm t) \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} L_m^{-1/2}(2t)\, dt \tag{3.11}$$

Функции $d_m(\tau)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ имеют вид [1]

$$d_m(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-\tau} \int_0^{\infty} \frac{t^{m-1/2} e^{-t\tau}}{(t+2)^{1+m}}\, dt \tag{3.12}$$

Вычисляя интеграл [11] в (3.12) получим

$$d_m(\tau) = \sqrt{2/\pi}\,(2m-1)!!\, D_{-2m-1}(2\sqrt{\tau}) \qquad (m = 0, 1, \ldots) \tag{3.13}$$

Здесь $D_n(x)$ — функции параболического цилиндра. При n целом отрицательном $D_n(x)$ выражаются [11] через функцию $\mathrm{E\,rfc}\,(x / \sqrt{2})$. Можно показать, что $d_m(\tau)$ должны удовлетворять соотношению

$$\int_0^{\infty} d_m(\tau)\, d\tau = (-1)^m \sqrt{2} - a_m \qquad (m = 0, 1, \ldots) \tag{3.14}$$

Функцию $\varphi_1(t)$ будем искать в форме, аналогичной (3.7)

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2} fs \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sum_{m=0}^{\infty} B_m L_m^{-1/2}(2t) \tag{3.15}$$

Вносяя соотношения (3.7), (3.9), (3.10) и (3.15) в уравнение (3.5) и используя формулу (2.6), получим для определения B_m следующую бесконечную систему:

$$B_m = -C_m + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + B_n)(-R_{nm} + H_{nm} + M_{nm}) \qquad (m = 0, 1, \ldots) \tag{3.16}$$

Здесь введены обозначения

$$C_m = \frac{\gamma_m^2}{\pi} \int_0^{\infty} b_m^{-}(\tau)\, d\tau, \qquad R_{nm} = \frac{\gamma_m^2}{\pi} \int_0^{\infty} b_m^{-}(\tau) \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} L_n^{-1/2}(2\tau)\, d\tau$$

$$H_{nm} = e^{-s} \gamma_m \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau} d_m(\tau)}{\sqrt{\tau + s}} L_n^{-1/2}[2(\tau + s)]\, d\tau \tag{3.17}$$

$$M_{nm} = \frac{e^{-s}\gamma_m^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau} b_m^{+}(\tau)}{\sqrt{\tau + s}} L_n^{-1/2}[2(\tau + s)]\, d\tau \qquad (m, n = 0, 1, \ldots)$$

Постоянные C_m и R_{nm} с использованием интеграла 7.414 (8) [11] и известных соотношений

$$\int_0^\infty \cos uxdx = \pi\delta(u), \quad \int_0^\infty \sin uxdx = \frac{1}{u} \quad (\delta(u) \text{ — дельта-функция})$$

могут быть представлены в следующем удобном для вычислений виде:

$$C_m = \frac{\sqrt{2}(-1)^m \gamma_m}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varkappa(u)}{u(1+u^2)^{1/4}} \sin\left[\left(2m+\frac{1}{2}\right)\psi\right] du$$

$$R_{nm} = \frac{2(-1)^{n+m}\gamma_m}{\pi\gamma_n} \int_0^\infty \frac{\varkappa(u)}{(1+u^2)^{1/4}} \cos\left[2(n-m)\psi\right] du \tag{3.18}$$

$$\varkappa(u) = \frac{1}{u} L\left(\frac{u}{A}\right) - \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}, \quad \psi = \operatorname{arctg} u, \quad n, m = 0, 1, \ldots$$

Постоянные H_{nm} с учетом (3.13) могут быть вычислены при помощи интегрирования по частям и использования формулы 3.364(3) [11]. Приведем выражения, определяющие эти постоянные, для некоторых значений n и m

$$H_{00} = \frac{2}{\pi} s\left[K_0(s) + K_1(s)\right] - 2\left(\frac{2s}{\pi}\right)^{1/2} e^{-s}$$

$$H_{10} = \frac{s^2}{3\pi}\left[\left(\frac{3}{s} - 4\right) K_0(s) + \left(\frac{1}{s} - 4\right) K_1(s)\right] + \frac{s}{3}\left(\frac{2s}{\pi}\right)^{1/2}\left(4 - \frac{3}{s}\right) e^{-s}$$

$$H_{01} = 4H_{10} + 2\left(\frac{2s}{\pi}\right)^{1/2} e^{-s} \tag{3.19}$$

$$H_{11} = \frac{2s^3}{15\pi}\left[\left(\frac{15}{s^2} - \frac{36}{s} + 16\right) K_0(s) + \left(\frac{3}{s^2} - \frac{28}{s} + 16\right) K_1(s)\right] + $$
$$+ \frac{s^2}{15}\left(\frac{2s}{\pi}\right)^{1/2}\left(-\frac{15}{s^2} + \frac{60}{s} - 32\right) e^{-s}$$

Здесь $K_\nu(s)$ — функции Макдональда. Постоянные M_{nm} с учетом (3.11) могут быть преобразованы к виду

$$M_{nm} = \frac{(-1)^m \sqrt{2}\gamma_m}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varkappa(u)}{(1+u^2)^{1/4}} \chi_{nm}(u)\, du \tag{3.20}$$

$$\chi_{nm}(u) = e^{-s}\operatorname{Re}\left\{e^{-i(2m+1/2)\psi} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau(1+iu)}}{\sqrt{\tau+s}} L_n^{-1/2}\left[2(\tau+s)\right] d\tau\right\}$$

Функции $\chi_{nm}(u)$ могут быть вычислены с использованием формулы 3.362(2) [11]. Например

$$\chi_{0m}(u) = \frac{2}{(1+u^2)^{1/4}} \operatorname{Re}\left\{e^{-[(2m+1)\psi+su]i} \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{s(1+iu)}\right)\right\} \quad (m = 0, 1, \ldots) \tag{3.21}$$

Перейдем теперь к вопросу о решении системы (3.16). Как показывают расчеты, при $\lambda \leqslant 1$ с достаточной для практики точностью в правой части системы можно пренебречь слагаемыми, содержащими неизвестные коэффициенты B_n. После чего сумму в правой части на основании соотношений (3.6), (3.7) можно представить в форме интеграла. Когда $\lambda \leqslant 2$, при решении системы можно пренебречь в правой части слагаемыми, содержащими M_{nm}. После решения системы функция $q(x)$ найдется по формулам (1.6), (3.2), (3.3), (3.6), (3.15). Для интегральной характеристики решения

$$P = \int_{-1}^{1} q(x)\, dx$$

может быть получено следующее выражение:

$$P = f\left[P_0 + 2\sum_{m=0}^{\infty} B_m \int_0^s \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} L_m^{-1/2}(2\tau)\, d\tau\right]$$
$$P_0 = (2s+1)\,\Phi(\sqrt{s}) - s + 2\sqrt{s/\pi}e^{-s} \qquad (3.22)$$

§ 4. В качестве примеров рассмотрим следующие контактные задачи теории упругости: а) задачу о вдавливании гладкого полосового штампа в полупространство [1,4,8,12] и б) задачу о вдавливании штампа в полосу, лежащую без трения на жестком основании [13]. Функция $L(u)$ для задач а) и б) соответственно имеет вид

$$\text{(а)}\quad L(u) = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}, \qquad \text{(б)}\quad L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \qquad (4.1)$$

Систему (3.16) будем решать методом урезания. Удержав в рядах (3.16) конечное число членов и решив найденную таким путем систему, получим приближенное решение задачи. Как показывают численные расчеты, для получения практически точного решения при $\lambda \leqslant 2$ достаточно ограничиться решением системы из двух-трех уравнений.

Для рассматриваемых задач а) и б) решения урезанных систем при $\lambda = 2$, составленных соответственно из одного, двух и трех уравнений, имеют вид

а) (1) $B_0 = 0.0212$, (2) $B_0 = 0.00210$, $B_1 = 0.00212$
(3) $B_0 = 0.00328$, $B_1 = 0.00171$, $B_2 = 0{,}00121$
б) (1) $B_0 = -0.0431$ (2) $B_0 = -0.0556$, $B_1 = 0.0800$
(3) $B_0 = -0.0471$, $B_1 = 0.0828$, $B_2 = 0.00985$

Из (3.22) получим приближенное выражение для определения силы

$$P = f\{P_0 + 2\sqrt{\pi}\,\Phi(\sqrt{s})\,B_0 + [4\sqrt{s}\,e^{-s} - \sqrt{\pi}\,\Phi(\sqrt{s})]\,B_1 + {} + [{}^3/_4\sqrt{\pi}\Phi(\sqrt{s}) - 4s\sqrt{s}\,e^{-s}]\,B_2\} \qquad (4.2)$$

Приводим значения величин $P_* = f^{-1}P$, $Q_1 = f^{-1}Q(1)$ и $Q_2 = f^{-1}Q(0)$ (первое, второе и третье приближения), вычисленные при $\lambda = 2$ для задач а) и б) по формулам этой работы и по формулам, полученным методом больших λ [8].

	P_*		Q_1		Q_2	
	а)	б)	а)	б)	а)	б)
(1)	2.00	2.84	0.585	0.737	0.685	1.069
(2)	1.95	2.73	0.567	0.776	0.668	0.971
(3)	1.95	2.75	0.569	0.795	0.668	0.970
[8]	1.96	2.75	0.580	0.795	0.669	0.964

В заключение заметим, что указанный метод может быть с успехом использован для исследования задачи о вдавливании достаточно широкого кольцевого штампа в упругое полупространство, если принять во внимание, что собственные функции интегрального оператора Винера — Хопфа

$$A_*\varphi = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \varphi(\tau)\,d\tau \int\limits_0^\infty \frac{\Gamma(^1/_4 + ^1/_2 iu)\,\Gamma(^1/_4 - ^1/_2 iu)}{\Gamma(^3/_4 + ^1/_2 iu)\,\Gamma(^3/_4 - ^1/_2 iu)} \cos u(\tau - t)\,du \tag{4.3}$$

известны [2].

Поступила 3 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. П о п о в Г. Я. Об одном приближенном способе решения интегрального уравнения дифракции электромагнитных волн на полосе. Ж. техн. физ., 1965, т. 35, вып. 3.
2. П о п о в Г. Я. Об одном приближенном способе решения контактной задачи о кольцевом штампе. Изв. АН АрмССР. Механика, 1967, т. 20, № 2.
3. Л у т ч е н к о С. А., П о п о в Г. Я. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости для клина. Прикл. механ., 1970, т. 6, вып. 3.
4. Б а б е ш к о В. А. Асимптотические свойства решений одного класса интегральных уравнений, возникающих в теории упругости и математической физике. Докл. АН СССР, 1969, т. 186, № 6.
5. Б а б е ш к о В. А. Об одном типе интегральных уравнений, возникающих в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
6. А л е к с а н д р о в В. М., Б е л о к о н ь А. В. Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений, встречающихся при изучении смешанных задач математической физики для областей с цилиндрическими границами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
7. К р е й н М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3.
8. А л е к с а н д р о в В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
9. Б а б е ш к о В. А. Об одном асимптотическом методе при решении интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
10. Н о б л Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
11. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
12. Р в а ч е в В. Л. Давление на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
13. А л е к с а н д р о в В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.