

ОБ ОТРАЖЕНИИ ПЛОСКОПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

В. А. Баскаков, Г. И. Быковцев

(Воронеж)

Распространение волн в неограниченной идеальной упруго-пластической среде рассматривалось в работах [1-4].

Закономерности отражения упругих волн хорошо изучены и изложены в [5-6].

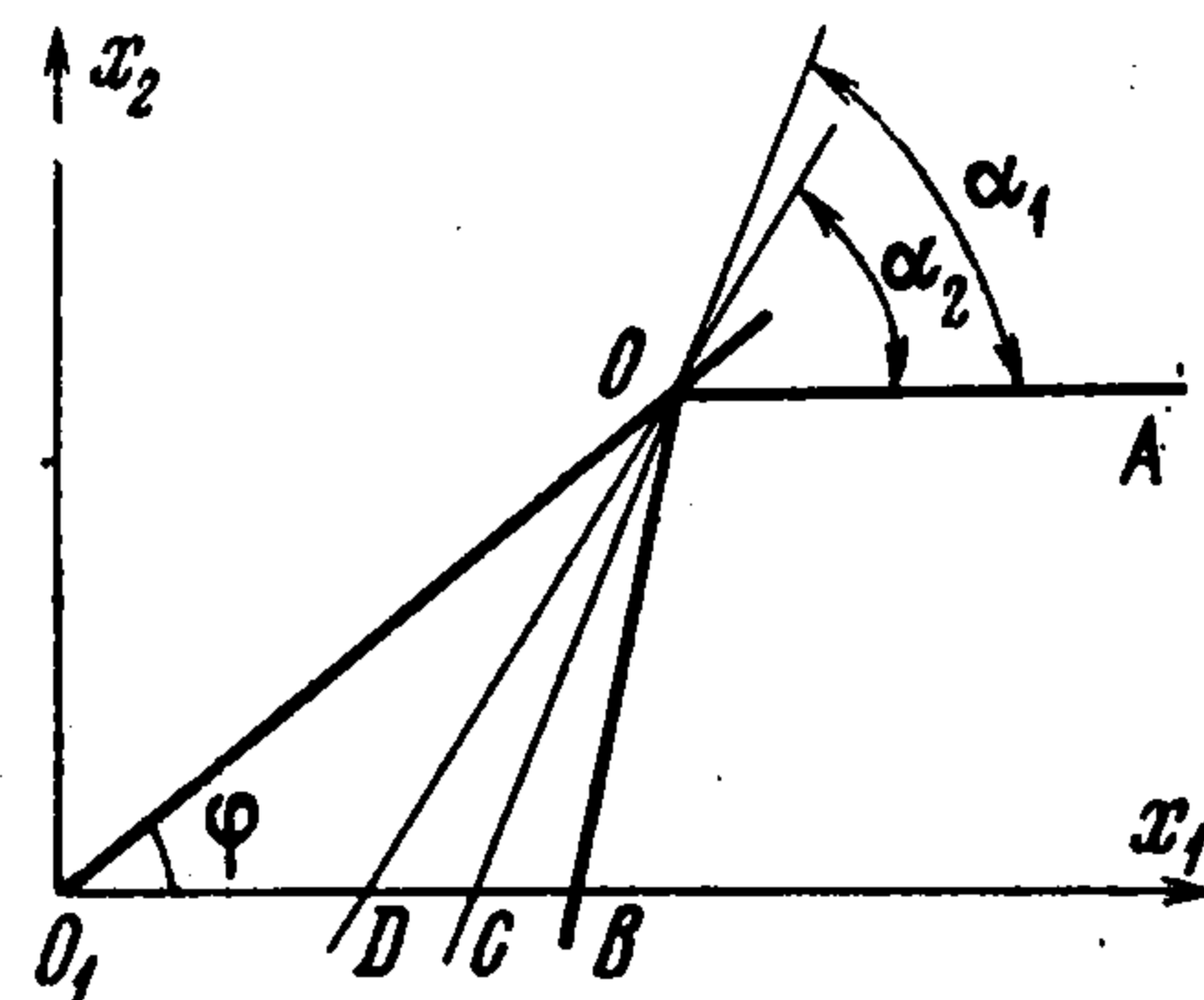
Ниже рассматривается задача об отражении волн в упрочняющейся упруго-пластической среде. Плоскополяризованная эквиволлюминальная ударная волна распространяется в упрочняющемся упруго-пластическом полупространстве, граница которого предполагается свободной от напряжений, падающая волна составляет с граничной плоскостью угол φ .

Получены аналитические выражения для напряженного и деформированного состояний в пластических зонах за фронтом отраженной волны, а расчеты, проведенные при помощи ЭЦВМ, позволили определить величину этих зон и изменение их в зависимости от углов падения φ и параметров упрочнения материала.

1. Рассмотрим ударную волну в виде ступеньки, распространяющуюся в упруго-пластическом линейно-упрочняющемся теле. Перед фронтом волны материал предполагается покоящимся ($v_i = 0$, $\sigma_{ij} = 0$, $e_{ij}^p = 0$). За фронтом волны $v_1 = v_2 = 0$, $v_3 = V$.

Здесь v_i — скорости перемещений, σ_{ij} — напряжения, e_{ij}^p — пластические деформации, $V = \text{const}$.

Ось x_3 предполагается параллельной линии пересечения свободной поверхности (плоскости) с фронтом падающей волны OA , ось x_1 ортогональна x_3 и параллельна плоскости падающей волны (фиг. 1).



Фиг. 1

Из условий сохранения импульса следует, что за фронтом волны OA для компонент напряжений имеем

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = -\sqrt{\mu\rho} V \quad (1.1)$$

Здесь ρ — плотность материала, μ — модуль упругости.

Материал за фронтом падающей волны находится в упругом состоянии, если $|\sigma_{23}| = |\sqrt{\mu\rho} V| \leq k$, где k — предел текучести при чистом сдвиге.

При $|\sqrt{\mu\rho} V| > k$ (это возможно при достаточно интенсивном ударе по полупространству) за фронтом волны материал находится в начальный момент времени в пластическом состоянии, но в последующем фронт

пластической волны испускает упругий предвестник, на котором в случае плоской волны $|\sigma_{23}| = |\sqrt{\mu\rho} V| = k$. Если тело имеет свободную поверхность, то первым достигает свободной поверхности упругий предвестник. Поэтому в дальнейшем будем считать, что

$$\mu\rho V^2 \leq k^2 \quad (1.2)$$

Тогда пластические деформации равны нулю за фронтом падающей волны.

Если материал после отражения волны от свободной поверхности остается упругим, то отраженная волна будет также иметь вид ступеньки. Вектор нормали к отраженной волне OB имеет компоненты

$$v_1 = \sin 2\varphi, \quad v_2 = -\cos 2\varphi \quad (1.3)$$

За фронтом отраженной волны OB из условий сохранения импульса получим

$$\sigma_{13} = \sqrt{\mu\rho} [v_3] \sin 2\varphi, \quad \sigma_{23} = -\sqrt{\mu\rho} V - \sqrt{\mu\rho} [v_3] \cos 2\varphi, \quad v_3 = V - [v_3] \quad (1.4)$$

Нормаль к свободной поверхности имеет компоненты $n_1 = \sin \varphi$, $n_2 = -\cos \varphi$, условие на свободной поверхности OO_1 имеет вид

$$\sigma_{13} \sin \varphi - \sigma_{23} \cos \varphi = 0 \quad (1.5)$$

Отсюда $[v_3] = -V$ и соотношения (1.4) теперь запишутся в виде

$$\sigma_{13} = -\sqrt{\mu\rho} V \sin 2\varphi, \quad \sigma_{23} = \sqrt{\mu\rho} V (\cos 2\varphi - 1), \quad v_3 = 2V$$

Подсчитывая интенсивность напряжений за фронтом волны OB , получим

$$\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = 4\mu\rho V^2 \sin^2 \varphi \quad (1.6)$$

Так как V удовлетворяет неравенству (1.2), то максимальное касательное напряжение не превышает k , если $\varphi \leq 1/6\pi$. Если $\varphi > 1/6\pi$, то материал за фронтом волны OB может перейти в пластическое состояние, тогда построенное выше решение не имеет места.

2. Так же как и в упругом материале, при отыскании решения упруго-пластической задачи можно положить, что

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \quad e_{11} = e_{12} = e_{22} = e_{33} = 0, \quad v_1 = v_2 = 0$$

а величины σ_{13} , σ_{23} , v_3 не зависят от x_3 .

Систему уравнений, описывающую поведение упрочняющегося упруго-пластического тела, запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{i3,i} - \rho v_3 \cdot &= 0, & (k + rk)e_{i3}^p &= (\sigma_{i3} - qe_{i3}^p) \kappa \\ \kappa &= (e_{i3}^p e_{i3}^p)^{1/2}, & \sigma_{i3}^p &= \mu v_{3,i} - 2\mu e_{i3}^p \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $i = 1, 2$ и принимается правило суммирования по повторяющимся индексам, точка означает частное дифференцирование по времени, r и q — параметры упрочнения.

При изучении отражения волн от свободной поверхности можно положить, что σ_{i3} , e_{i3}^p , v_3 , κ зависят только от

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_2 - ct}{x_1 - ct \operatorname{ctg} \varphi}, \quad c = \sqrt{\mu/\rho} \quad (2.2)$$

При этом система уравнений (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_{13}' - \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{23}' + \sqrt{\mu\rho} (\operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{ctg} \alpha) v_3' &= 0 \\ (\sigma_{13} - qe_{13}^p) \kappa' - (k + r\kappa) e_{13}^{p'} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{13}' + 2\mu e_{13}^{p'}) (\operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{ctg} \alpha) + \sqrt{\mu\rho} v_3' &= 0 \\ (\sigma_{23}' + 2\mu e_{23}^{p'}) (\operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{ctg} \alpha) - \sqrt{\mu\rho} \operatorname{ctg} \alpha v_3' &= 0 \\ \kappa' &= (e_{13}^{p'} e_{13}^{p'})^{1/2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь штрих означает производную по α .

Подставляя значения κ' из (2.4) в (2.3), получим

$$(\sigma_{13} - qe_{13}^p) (\sigma_{13}' - qe_{13}^{p'}) = (k + r\kappa)^2 \quad (2.5)$$

Соотношение (2.5) определяет вид поверхности нагружения. Принимается, что имеется два механизма упрочнения: кинематическое и изотропное.

Дифференцируя уравнение (2.5) по α , найдем

$$(\sigma_{13} - qe_{13}^p) (\sigma_{13}' - qe_{13}^{p'}) - r(k + r\kappa) \kappa' = 0 \quad (2.6)$$

Система уравнений (2.3) и (2.6) имеет нетривиальное решение σ_{i3}' , $e_{i3}^{p'}$, v_3' при условии, что

$$\begin{aligned} [\operatorname{ctg} \alpha (\sigma_{13} - qe_{13}^p) + (\sigma_{23} - qe_{23}^p)]^2 - (k + r\kappa)^2 \times \\ \times [(\operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{ctg} \alpha)^2 (a + 1) - a (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)] = 0 \\ a = (r + q) / 2\mu \geq 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Удовлетворяя условие (2.5) подстановкой

$$\begin{aligned} \sigma_{13} - qe_{13}^p &= -(k + r\kappa) \cos \psi \\ \sigma_{23} - qe_{23}^p &= -(k + r\kappa) \sin \psi \end{aligned} \quad (2.8)$$

соотношение (2.7) преобразуем к виду

$$\cos(\alpha - \psi) = \left((1 + a) \frac{\sin^2(\alpha - \varphi)}{\sin^2 \varphi} - a \right)^{1/2} = \eta(\alpha) \quad (2.9)$$

Соотношение (2.9) определяет ψ как функцию α . Решая уравнения (2.3), (2.6) при условии (2.9), получим

$$\begin{aligned} k + r\kappa &= C \eta^{-\beta}(\alpha) \exp \left\{ -\beta \int_{\alpha_1 - \varphi}^{\alpha - \varphi} \left(\frac{\sin^2 \varphi - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - b \sin^2 \varphi} \right)^{1/2} d\alpha \right\} \\ b &= \frac{a}{1 + a} = \frac{r + q}{2\mu + r + q}, \quad \beta = \frac{r}{2\mu + r + q}, \quad \beta < b \end{aligned} \quad (2.10)$$

Смысл α_1 будет понятен из дальнейших рассмотрений, C — постоянная интегрирования. Остальные неизвестные величины σ_{i3} , e_{i3}^p , v_3

выражаются через κ и ψ в форме

$$\begin{aligned} e_{13}^p &= \frac{1}{2\mu + r + q} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{(k + r\kappa) \cos \psi (\eta' + \sin(\alpha - \psi))}{\cos(\alpha - \psi)} d\alpha + C_1 \\ e_{23}^p &= \frac{1}{2\mu + r + q} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{(k + r\kappa) \sin \psi (\eta' + \sin(\alpha - \psi))}{\cos(\alpha - \psi)} d\alpha + C_2 \\ v_3 &= \frac{2}{\sqrt{\mu\rho} \sin \varphi} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{(k + r\kappa) \sin(\alpha - \varphi) (\eta' + \sin(\alpha - \psi))}{\sin^2(\alpha - \psi)} d\alpha + C_3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

и по формулам (2.8); C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования.

3. При определении решения задачи об отражении волны (1.1) в упруго-пластическом материале свободная поверхность является источником целого пакета волн. Это нейтральная ударная волна, которая может распространяться только со скоростью $c = \sqrt{\mu/\rho}$ и поэтому совпадает с положением отраженной ударной волны OB в упругом случае. На этой волне пластические деформации непрерывны.

За фронтом этой волны (нейтральная область: $\sigma_{i3} = \text{const}$, $e_{i3}^p = \kappa = 0$) напряжения определяются по формуле (1.4), где интенсивность волны $[v_3]$ следует определять из условия пластичности, откуда

$$[v_3] = -V (\cos 2\varphi \pm \sqrt{z^2 - \sin^2 2\varphi}), \quad z^2 = k^2 / \mu\rho V^2 \quad (3.1)$$

Компоненты напряжений принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= -\sqrt{\mu\rho} V \sin 2\varphi (\cos 2\varphi \pm \sqrt{z^2 - \sin^2 2\varphi}) \\ \sigma_{23} &= -\sqrt{\mu\rho} V [1 - \cos 2\varphi (\cos 2\varphi \pm \sqrt{z^2 - \sin^2 2\varphi})] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Напряженное состояние (3.2) имеет место при $2\varphi \geq \alpha \geq \alpha_1$. Угол $\alpha = \alpha_1$ определяет положение отраженной пластической волны нагрузки OC . Из непрерывности напряжений при $\alpha = \alpha_1$, получаем, что α_1 должно удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} z \cos \psi &= \sin 2\varphi (\cos 2\varphi \pm \sqrt{z^2 - \sin^2 2\varphi}) \\ z \sin \psi &= 1 - \cos 2\varphi (\cos 2\varphi \pm \sqrt{z^2 - \sin^2 2\varphi}) \\ \cos(\alpha_1 - \psi) &= \eta(\alpha_1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Пластическая волна OC распространяется со скоростью $c_1 < c$. Скорость c_1 может быть определена из закона Брюстера

$$c_1 \sin \varphi = c \sin(\alpha_1 - \varphi) \quad (3.4)$$

С другой стороны, она может быть найдена из системы уравнений (2.1), записанной в разрывах, при условии, что $e_{i3}^p = \kappa = 0$, с применением кинематических условий совместности первого порядка. Таким образом, получим, что

$$c_1 = c \sqrt{1 - (\sigma_{i3} v_i^{(1)})^2 k^{-2} (1 + a)^{-1}} \quad (3.5)$$

Здесь σ_{i3} удовлетворяют (3.2), а $v_i^{(1)}$ — компоненты вектора нормали к фронту волны OC ($v_1^{(1)} = \sin \alpha_1$, $v_2^{(1)} = -\cos \alpha_1$).

Легко показать, что соотношение (3.4) с учетом (3.5) эквивалентно системе (3.3).

При $\alpha_1 \geq \alpha \geq \alpha_2$ имеет место решение (2.8), (2.10) — (2.11), где постоянные C, C_1, C_2, C_3 определяются из условия непрерывности решения при $\alpha = \alpha_1$, получим

$$C = k\eta^{\beta}(\alpha_1), \quad C_1 = C_2 = 0, \quad C_3 = V[1 + (\cos 2\varphi \pm \sqrt{z^2 - \sin^2 2\varphi})] \quad (3.6)$$

При $\alpha_2 \geq \alpha \geq \varphi$ (фиг. 1) имеет место тривиальное решение

$$\sigma_{13} = [qe_{13}^p - (k + r\kappa) \cos \psi]_{\alpha=\alpha_2}, \quad \sigma_{23} = [qe_{23}^p - (k + r\kappa) \sin \psi]_{\alpha=\alpha_2} \quad (3.7)$$

Угол $\alpha = \alpha_2$ определяет положение отраженной пластической волны разгрузки OD .

Величину α_2 определим из условия непрерывности напряжений на волне разгрузки OD и граничного условия (1.5), получим

$$\left(\frac{a}{1+a} - \beta\right) \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{(k+r\kappa) \sin(\psi - \varphi) (\eta' + \sin(\alpha - \psi))}{\cos(\alpha - \psi)} d\alpha - (k+r\kappa) \sin(\psi - \varphi) = 0 \quad (3.8)$$

Таблица 1

α	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0	56.56	79.36	98.69	60.00	84.53	109.74	135.00
0.1	53.79	79.14	99.14	112.91	122.46	129.48	135.00
0.2	56.83	79.41	98.84	87.59	89.22	112.06	136.36
0.3	54.65	79.23	99.21	113.32	123.24	130.59	136.36
0.4	57.05	79.46	98.96	95.27	93.34	114.15	137.61
0.5	55.28	79.31	99.26	113.68	123.94	131.58	137.61
0.6	57.25	79.50	99.06	99.77	96.97	116.06	138.75
0.7	55.78	79.37	99.31	114.00	124.58	132.50	138.75
0.8	57.42	79.53	99.14	102.79	100.15	117.81	139.80
0.9	56.18	79.42	99.36	114.29	125.17	133.34	139.80
1.0	57.57	79.56	99.21	105.00	102.96	119.42	140.77
10	56.51	79.46	99.39	114.55	125.70	134.12	140.77
10 ²	57.70	79.58	99.26	106.68	105.43	120.90	141.67
10 ³	56.78	79.49	99.43	114.79	129.19	134.84	141.67
10 ⁴	57.82	79.61	99.31	108.02	107.63	122.26	142.51
10 ⁵	57.02	79.53	99.46	115.01	126.66	135.52	142.51
10 ⁶	57.93	79.62	99.35	109.11	109.59	123.53	143.30
10 ⁷	57.23	79.56	99.49	115.21	127.08	136.15	143.30
10 ⁸	58.03	79.64	99.39	110.01	111.34	124.70	144.04
10 ⁹	57.40	79.58	99.51	115.39	127.48	136.74	144.04
10 ¹⁰	58.12	79.66	99.43	110.77	112.91	125.81	144.74
10 ¹¹	57.56	79.61	99.53	115.56	127.85	137.29	144.74
10 ¹²	59.62	79.93	99.91	118.80	135.65	150.13	163.24
10 ¹³	59.61	79.93	99.91	118.96	136.49	151.72	153.24
10 ¹⁴	59.96	79.99	99.99	119.88	139.54	158.66	174.35
10 ¹⁵	59.96	79.99	99.99	119.88	139.56	158.72	174.35
10 ¹⁶	59.99	79.99	100.00	119.98	139.95	159.89	178.34
10 ¹⁷	59.99	79.99	100.00	119.98	139.95	159.89	178.34

Зная α_2 , из соотношения

$$c_2 \sin \varphi = c \sin (\alpha_2 - \varphi)$$

определяется скорость c_2 распространения волны OD .

Значения α_1 при $z = 1$ (при отражении упругого предвестника) были вычислены при различных a на ЭЦВМ и приведены в табл. 1. Для каждого значения a и φ в табл. 1 приведены два значения, верхнее соответствует знаку плюс в уравнениях (3.3), а нижнее — знаку минус. В соотношении (2.9) всегда выбирается знак плюс перед корнем, так как только в этом случае $\alpha_2 > \varphi$.

Таблица 2

a	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0	56.56	72.77	87.55	100.83	113.38	124.54	135.00
0.1	56.83	73.22	88.21	101.89	114.40	125.88	136.36
0.2	57.05	73.66	88.88	102.80	115.50	127.09	137.61
0.3	57.25	74.05	89.48	103.60	116.48	128.19	138.75
0.4	57.42	74.38	90.02	104.33	117.38	129.20	139.80
0.5	57.57	74.69	90.50	105.00	118.21	130.13	140.77
0.6	57.70	74.96	90.94	105.60	118.97	131.00	141.67
0.7	57.82	75.20	91.33	106.16	119.67	131.81	142.51
0.8	57.93	75.43	91.70	106.68	120.33	132.55	143.30
0.9	58.03	75.62	92.04	107.16	120.94	133.27	144.04
1.0	58.12	75.80	92.34	107.61	121.50	133.92	144.74
10	59.63	79.12	98.27	116.92	134.71	150.76	163.24
10 ²	59.96	79.89	99.80	119.63	139.32	158.51	174.35
10 ³	59.99	79.99	99.99	119.98	139.95	159.90	178.34

Значения α_2 при $z = 1$ при различных a приведены в табл. 2. Значения α_2 вычислялись из уравнения (3.8) методом последовательных приближений. Предварительно решалось уравнение $\sin (\psi - \varphi) = 0$, отсюда подсчитывалось значение α_2 , затем определялось значение интеграла в уравнении (3.8). Для определения второго приближения решалось уравнение

$$(k + r\kappa) \sin (\psi - \varphi) = I [a (1 + [a]^{-1}) - \beta]$$

где I — значение интеграла при α_2 , определенном из первого приближения, и т. д.

Вычисления показали, что все последующие приближения практически совпадают с первым приближением. Поэтому в табл. 2 приведено только одно значение α_2 , которое соответствует знакам плюс и минус в уравнениях (3.3).

На фиг. 2 и 3 показаны значения α_1^+ , α_1^- и α_2 при $a = 0$ и $a = 1$, аналогичные графики имеют место во всех других случаях.

Отметим, что, как следует из табл. 1, 2, при увеличении a все кривые сближаются, и при $a = 100$ и $a = 1000$ они практически совпадают и равны 2φ .

Отметим, что величины α_1 , определенные из уравнений (3.3), и значение α_2 , вычисленные из (3.8), должны удовлетворять неравенству

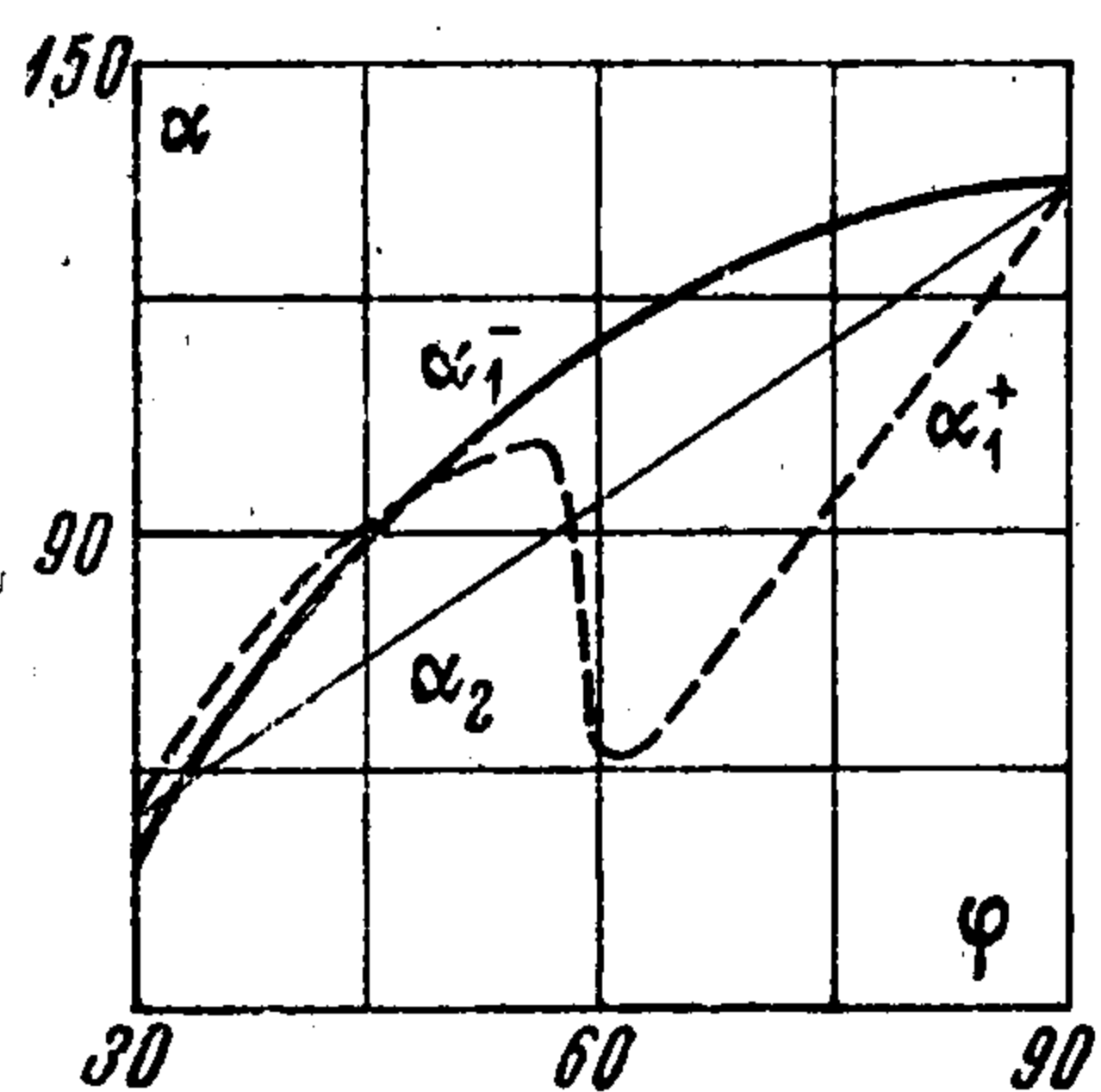
$\varphi \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq 2\varphi$, так как в противном случае волна разгрузки опередит волну нагрузки.

Условия $\varphi \leq \alpha_2 \leq 2\varphi$ и $\varphi \leq \alpha_1 \leq 2\varphi$ всегда выполняются.

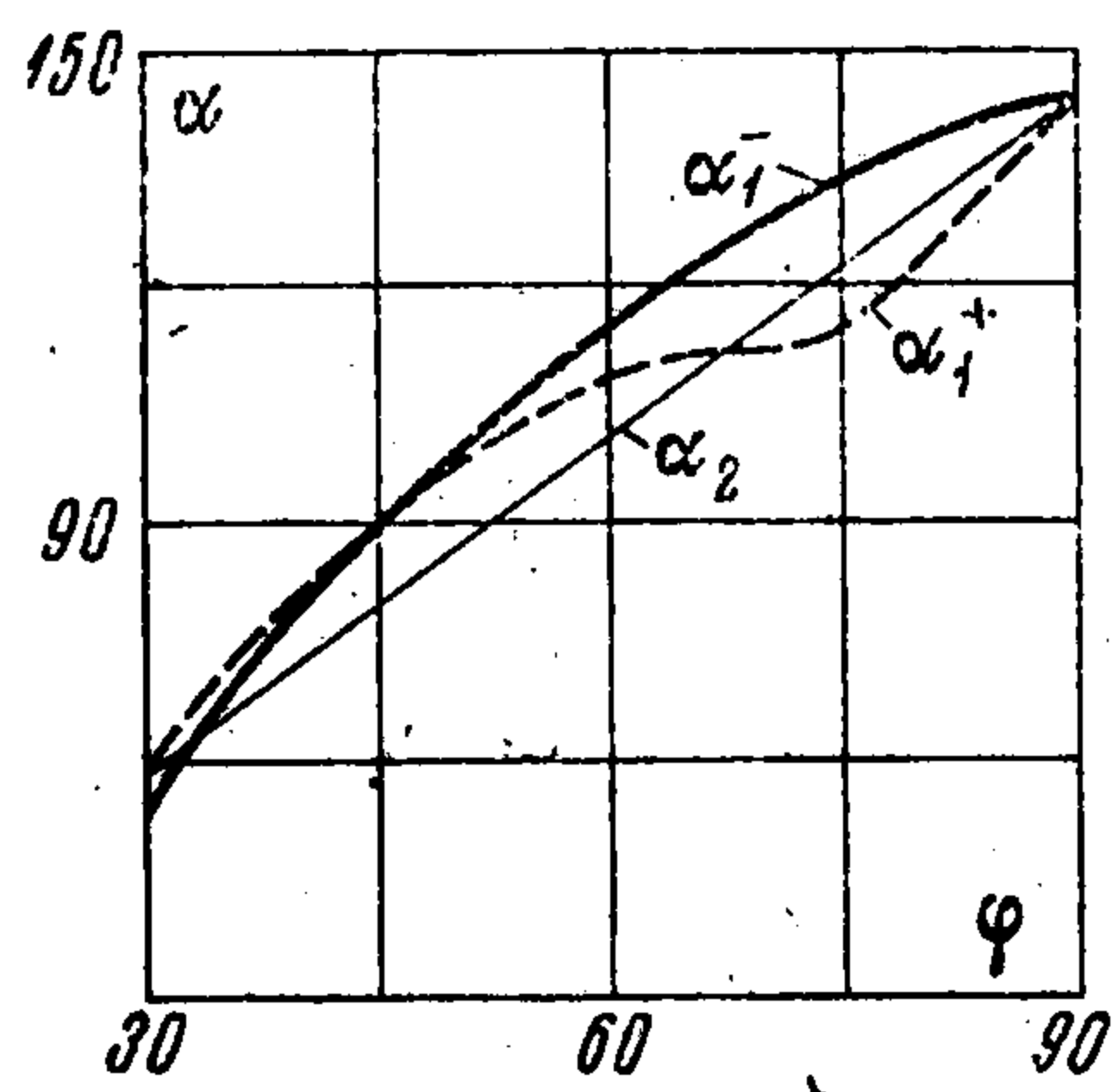
Пусть $\alpha_1 = \alpha_2$, тогда

$$\begin{aligned} 4(1+a) \{ \sin^2 \varphi [1 + \sin \varphi (1 + (\cos 2\varphi \pm \cos 2\varphi))]^2 - \\ - \cos^4 \varphi (1 - (\cos 2\varphi \pm \cos 2\varphi))^2 \} = \\ = \sin^2 2\varphi (1 - (\cos 2\varphi \pm \cos 2\varphi))^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

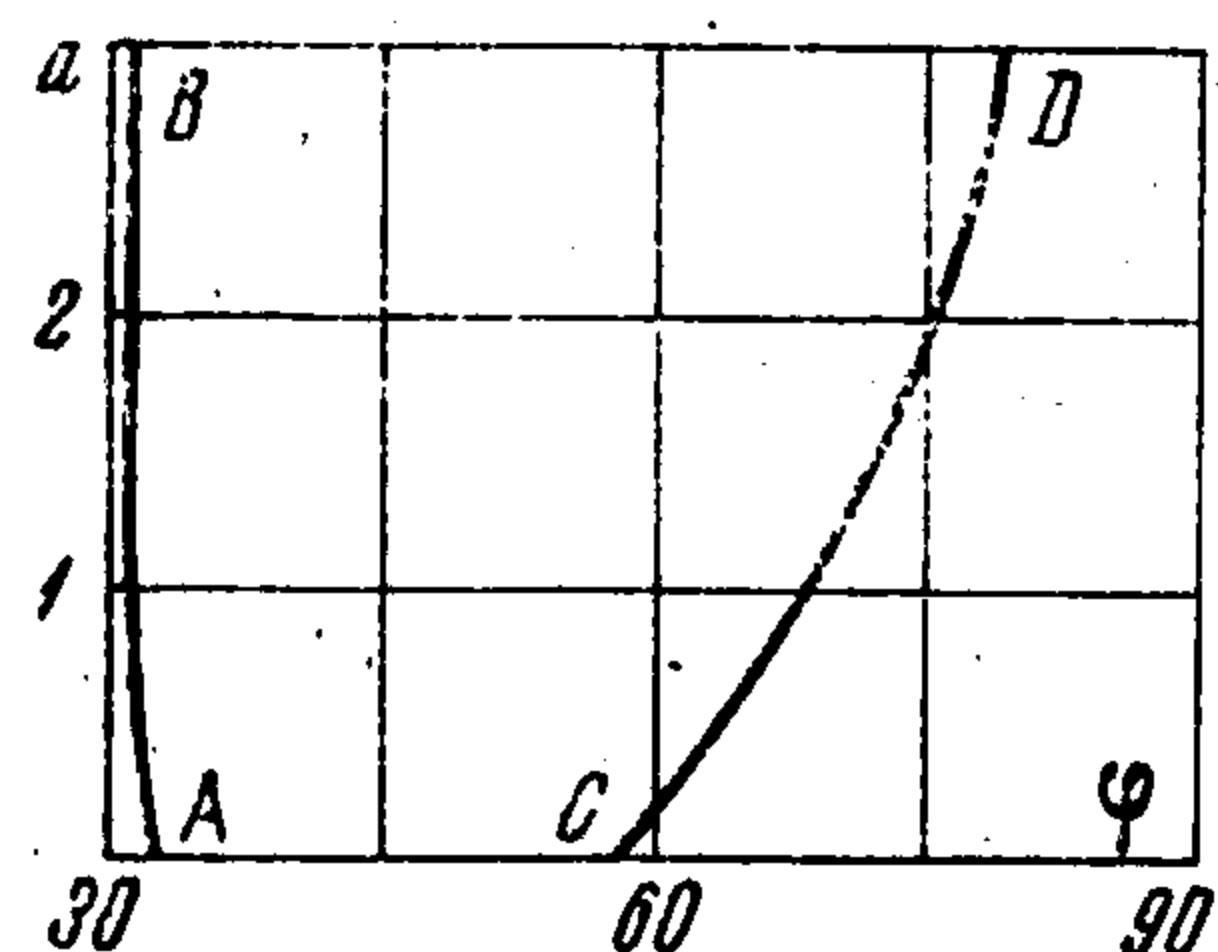
Уравнение (3.9) определяет зависимость φ от a , при которых $\alpha_1 = \alpha_2$. На фиг. 4 построены две ветви, соответствующие решениям уравнения (3.9) при выборе знаков плюс и минус.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Из данных, приведенных в табл. 1 и 2, следует, что если точка (a, φ) лежит слева от кривой AB , то условие $\alpha_2 \leq \alpha_1$ выполняется только при выборе знака плюс в уравнениях (3.3).

Если точка (a, φ) лежит справа от кривой CD , то условие $\alpha_1 \geq \alpha_2$ выполняется только при выборе знака минус.

Отметим, что если в уравнениях (3.3) имеет место знак минус, то в пакете отраженных волн поверхностей сильного разрыва не существует.

Если точка (a, φ) лежит между кривыми AB и CD , то могут реализоваться оба решения.

В построенных выше решениях предполагалось, что в пакете отраженных волн может быть только одна ударная волна OB , которая является нейтральной, т. е. пластические деформации на фронте этой волны непрерывны. В общем случае при плоскополяризованном движении в линейно-упрочняющейся среде могут существовать пластические ударные волны, на фронте которых пластические деформации претерпевают разрыв. Для существования пластической ударной волны необходимо, чтобы перед фронтом волны имели место соотношения

$$s_{ij} = qe_{ij}^p \pm \frac{[v_i]v_j + [v_j]v_i}{\sqrt{[v_k][v_k]}} (k + r\kappa) \quad (3.10)$$

Здесь s_{ij} — компоненты девиатора напряжений.

В рассматриваемом случае соотношение (3.10) можно представить в виде

$$\sigma_{iz} = qe_{iz}^p \pm (k + r\kappa) v_i^{(3)} \quad (3.11)$$

Здесь $v_i^{(3)}$ — компоненты вектора нормали к фронту ударной волны ($v_1^{(3)} = \sin \alpha_3$, $v_2^{(3)} = -\cos \alpha_3$), угол $\alpha = \alpha_3$ определяет положение ударной волны. Покажем, что условия существования волны (3.11) при отражении от свободной поверхности не могут быть выполнены.

Можно показать, что ударная волна $\alpha = \alpha_3$ распространяется со скоростью

$$c_3 = \sqrt{\mu_1/\rho}, \quad \mu_1 = \mu a (1 + a)^{-1}$$

Из соотношения (3.4), записанного для ударной волны $\alpha = \alpha_3$, получим уравнение для определения ее положения

$$\cos(\psi - \alpha_3) = \eta(\alpha_3) = 0 \quad (3.12)$$

Перед фронтом ударной волны, так же как и в рассмотренном выше решении, распространяются волны OB , OC , OD . Положение волн OB и OC остается неизменным, а положение волны разгрузки OD теперь следует определять из условия (3.11), которое в сочетании с соотношением (2.8) можно представить в виде

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_3) = \cos(\psi - \alpha_2) \quad (3.13)$$

Здесь $\alpha = \alpha_2$ определяет положение волны разгрузки OD .

Из (3.13) видно, что волна разгрузки OD либо совпадает с ударной пластической волной, так как $\alpha_2 = \alpha_3$ является решением этого уравнения, либо определяется (после некоторых преобразований) с учетом (3.12) из уравнения

$$(\sin^2 \varphi - a - 1) \operatorname{tg}(\alpha_2 - \varphi) = (\sin^2 \varphi + a + 1) \operatorname{tg}(\alpha_3 - \varphi) \quad (3.14)$$

Но значения α_2 , определенные из (3.14), не принадлежат промежутку $[\varphi, 2\varphi]$ и поэтому их следует отбросить.

Рассмотрим первый корень $\alpha_2 = \alpha_3$. Выше было показано, что при $\alpha_1 \geq \alpha \geq \alpha_2$ имеет место решение (2.8), (2.10), (2.11), (3.6). Соотношение (2.10) может быть представлено в виде

$$k + r\kappa = k \left(\frac{\eta(\alpha_1)}{\eta(\alpha)} \right)^\beta \exp \left\{ -\beta \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left(\frac{1 - \eta^2(\alpha)}{\eta^2(\alpha)} \right)^{1/2} d\alpha \right\} \quad (3.15)$$

Рассмотрим значение $k + r\kappa$ при $\alpha = \alpha_3$. Несобственный интеграл

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_3} \left(\frac{1 - \eta^2(\alpha)}{\eta^2(\alpha)} \right)^{1/2} d\alpha$$

сходится. Величина $\eta(\alpha_3)$, согласно (3.12), обращается в нуль, откуда получаем, что $k + r\kappa$ неограниченно возрастает при $\alpha \rightarrow \alpha_3$.

Из (2.8) и (2.11) следует, что σ_{iz} , ϵ_{iz}^p , v_z также неограниченно возрастают при $\alpha \rightarrow \alpha_3$.

Таким образом, если рассматривать только ограниченные решения в пакете отраженных волн, то отраженной ударной пластической волны не существует.

Поступила 16 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. M a n d e l J. Ondes plastiques dans un milieu indéfini à trois dimension. J. Méchanique, 1962, vol. 1, No. 1, pp. 3—30 (Рус. перев.: Пластические волны в неограниченной трехмерной среде. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1963, № 5, стр. 119—141.)
2. Б ы к о в ц е в Г. И., И в л е в Д. Д., М а р т ы н о в а Т. Н. О распространении волн в упруго-пластических телах при кусочно-линейных условиях пластичности. Материал Всес. симпоз. по распространению упруго-пластических волн в сплошных средах (Баку, октябрь 1964). Изд-во АН АзССР, 1966.
3. Б ы к о в ц е в Г. И., К р е т о в а Л. Д. О волнах ускорений в идеальных упруго-пластических телах. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1.
4. Т о м а с Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах, М., «Мир», 1964.
5. Ф р а н к Ф., М и з е с Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, гл. 12. С о б о л е в С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний, М.—Л., ОНТИ, 1937.
6. П р а г е р В. Введение в механику сплошных сред. М., Изд-во иностр. лит., 1963.