

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО ШАРА

В. Ф. Бондарева

(Москва)

Показано, что в общем случае контактное давление имеет корневую особенность на границе раздела граничных условий. Эта особенность из решения выделена. Для ограниченной аддитивной части контактного давления получено уравнение Фредгольма второго рода, которое решается асимптотическим методом. В качестве примера доведена до числа задача о контакте весомого шара со сферическим жестким основанием близкого радиуса. Проводится сравнение с решением Герца.

Задача о контакте упругих тел поставлена и решена Герцем [1,2] в предположении, что при малых областях контакта контактирующие тела можно заменить упругими полупространствами.

Контактная задача для шара с заданной границей раздела краевых условий (штамп с угловыми точками) сведена в работах [3,4] к определению некоторых коэффициентов из парных рядов-уравнений, содержащих полиномы Лежандра; указан способ, позволяющий решение полученных парных рядов-уравнений свести к решению бесконечных систем линейных уравнений.

Ниже контактные задачи (в том числе и задача с заранее неизвестной границей раздела краевых условий) исследуются на основе полученного в [5] замкнутого решения первой краевой задачи для шара.

Можно показать [5], что осесимметричная нормальная к сфере $r = R$ нагрузка

$$\sigma_r = N(\theta) \quad \text{при } r = R, \quad 0 < \theta < \pi$$

создает на этой сфере радиальные перемещения

$$u(\theta) = \frac{R}{2\pi G} \int_0^\pi N(\alpha) H(\theta, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha \quad (1)$$

$$H(\theta, \alpha) = \frac{\pi}{2} \frac{1-2\nu}{1+\nu} + 4(1-\nu) U(1) + \operatorname{Re} \int_0^1 \left(\frac{A}{y^\lambda} + \frac{1}{y^2} \right) U(y) \, dy \quad (2)$$

Функция U , входящая в ядро (2), выражается через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$ и имеет следующий вид:

$$U(y) = U(y, \theta, \alpha) = \frac{K(k)}{h} - \frac{\pi}{2} (1 + y \cos \theta \cos \alpha) \quad (3)$$

$$h^2 = (1-y)^2 + 4y \sin^2 \frac{\theta + \alpha}{2}, \quad k^2 h^2 = 4y \sin \theta \sin \alpha$$

Константы A и λ в (2) зависят только от коэффициента Пуассона ν и даются так:

$$A = 8\nu^2 - 8\nu + 1 + i \frac{16\nu^3 - 16\nu^2 - 4\nu + 5}{\sqrt{3-4\nu^2}}, \quad \lambda = \frac{1-2\nu}{2} + i \frac{\sqrt{3-4\nu^2}}{2} \quad (4)$$

Рассмотрим задачу о вдавливании шара $r \leq R$ в жесткое осесимметричное основание, заданное в сферической системе координат (r, θ, φ) уравнением (фиг. 1)

$$r = R [1 + \rho(\theta)], \quad \rho(0) = 0 \quad (5)$$

Предполагается, что шар свободен от касательных усилий и деформируется под действием нормальной нагрузки

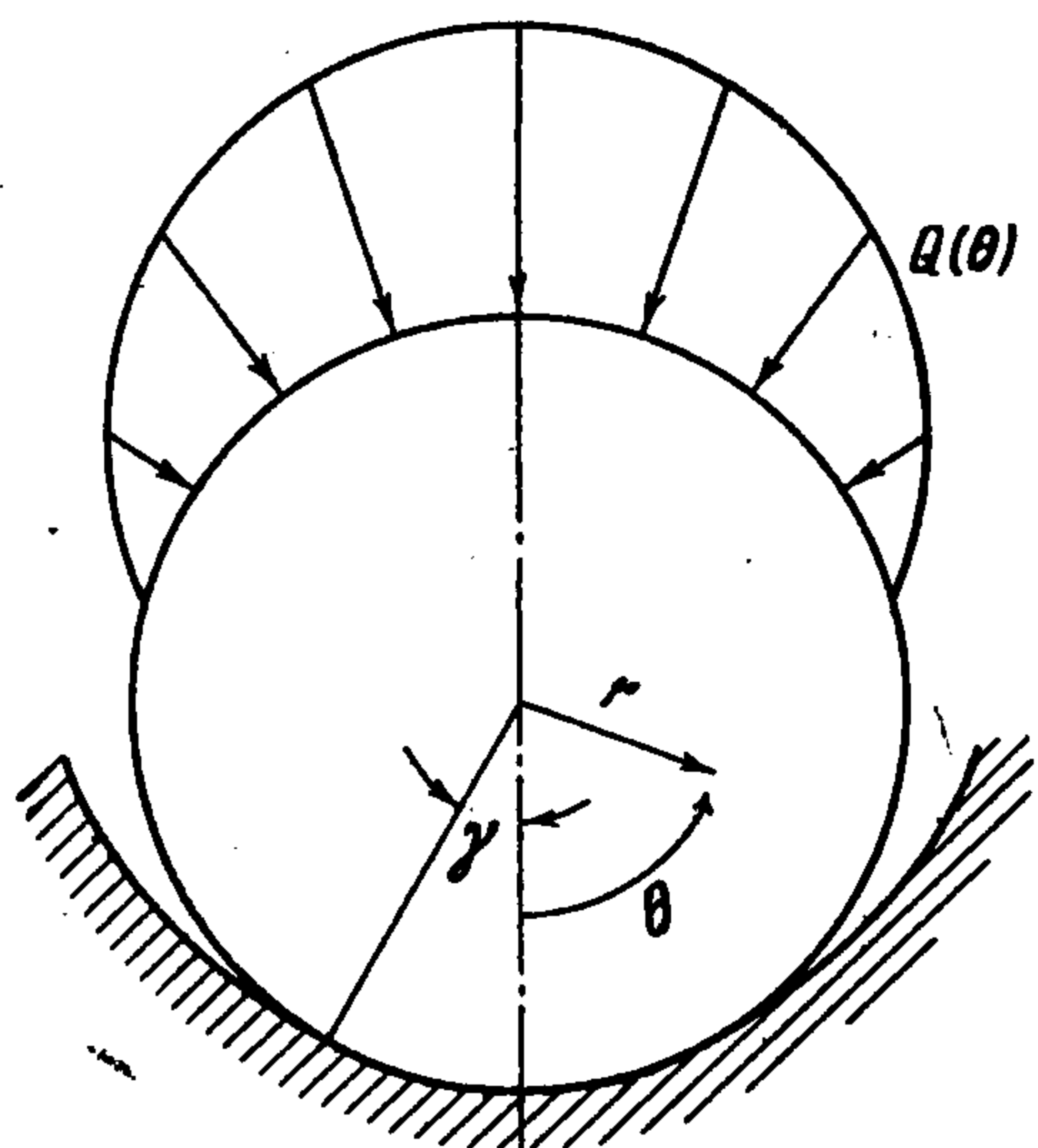
$$N(\theta) = \begin{cases} Q(\theta) & \text{при } \gamma < \theta < \pi \\ \sigma(\theta) & \text{при } 0 < \theta < \gamma \end{cases} \quad (6)$$

где $Q(\theta)$ — заданное, а $\sigma(\theta)$ — искомое контактное давление.

Окружность $\theta = \gamma$ на сфере $r = R$ ограничивает область контакта. Задача разрешима при условии

$$\int_0^\gamma \sigma(\alpha) \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = -\frac{Z}{2\pi R^2} \quad (7)$$

где Z — равнодействующая внешнего давления $Q(\theta)$.



Фиг. 1

Условие контакта шара со штампом (5) можно записать так:

$$u(\theta) = R [-a \cos \theta + \rho(\theta)], \quad 0 < \theta < \gamma \quad (8)$$

где a — сближение штампа с центром шара.

Подстановка граничных условий (6) и (8) в (1) приводит к интегральному уравнению относительно контактного давления

$$\frac{R}{2\pi G} \int_0^\gamma \sigma(\alpha) H(\theta, \alpha) \sin \alpha d\alpha = v(\theta), \quad 0 < \theta < \gamma \quad (9)$$

Здесь через $v(\theta)$ обозначена заданная с точностью до a функция

$$v(\theta) = R \left[-a \cos \theta + \rho(\theta) - \frac{1}{2\pi G} \int_\gamma^\pi Q(\alpha) H(\theta, \alpha) \sin \alpha d\alpha \right] \quad (10)$$

Преобразуем уравнение (9) в интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Произведем замену переменных

$$\operatorname{tg}^{1/2} \theta = \varepsilon x, \quad \operatorname{tg}^{1/2} \alpha = \varepsilon t, \quad \varepsilon = \operatorname{tg}^{1/2} \gamma$$

Кроме того, введем обозначения

$$q(x) = \frac{4\varepsilon^2 \sigma^\circ(x)}{(1 + \varepsilon^2 x^2)^{3/2} G}, \quad w(x) = \frac{2v^\circ(x)}{(1 + \varepsilon^2 x^2)^{1/2} R}, \quad \theta_1 = \frac{1-v}{2\pi}$$

$$S(x, t) = \frac{t}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 x^2)(1 + \varepsilon^2 t^2)}} \left[\frac{1}{2} \frac{1-2v}{1+v} - 2(1-v) \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \frac{1 - \varepsilon^2 x^2}{1 + \varepsilon^2 x^2} \frac{1 - \varepsilon^2 t^2}{1 + \varepsilon^2 t^2} \right) + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^1 \left(\frac{A}{y^\lambda} + \frac{1}{y^2} \right) U^\circ(y) dy \right] \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\sigma^\circ(x) &= \sigma(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \varepsilon x), & v^\circ(x) &= v(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \varepsilon x) \\ U^\circ(y) &= U^\circ(y, x, t) = U(y, 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \varepsilon x, 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \varepsilon t)\end{aligned}$$

После указанных преобразований уравнение (9) примет следующий вид:

$$\int_0^1 q(t) \left[\frac{4t}{x+t} K\left(\frac{2\sqrt{xt}}{x+t}\right) + \frac{\varepsilon}{\theta_1} S(x, t) \right] dt = \frac{\varepsilon}{\theta_1} w(x), \quad 0 < x < 1 \quad (12)$$

При этом условие равновесия (7) переписывается так:

$$\int_0^1 q(t) \frac{(1 - \varepsilon^2 t^2) t}{(1 + \varepsilon^2 t^2)^{3/2}} dt = -\frac{Z}{2\pi R^2 G} \quad (13)$$

Отметим, что осесимметричная контактная задача для упругого полупространства приводит к интегральному уравнению

$$\int_0^1 q(t) \frac{4t}{x+t} K\left(\frac{2\sqrt{xt}}{x+t}\right) dt = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (14)$$

Решение этого уравнения дано М. Я. Леоновым [6] в квадратурах

$$q(x) = \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi^2} \int_0^{1/2\pi} d\psi \int_0^{1/2\pi} \Delta f(\sqrt{1 - (1-x^2)\sin^2\psi \sin\alpha}) \times \\ \times \sin\psi \sin\alpha d\alpha \quad (15)$$

где

$$\Delta f(t) = \frac{1}{t} f'(t) + f''(t), \quad c = \frac{1}{\pi^2} \left[f(0) + \int_0^1 \frac{f'(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} \right] \quad (16)$$

Можно показать, что (15) допускает эквивалентное представление

$$q(x) = \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \Delta f(t) L(x, t) dt \quad (17)$$

$$L(x, t) = \frac{t}{x+t} K\left(\frac{2\sqrt{xt}}{x+t}\right) - F\left(\frac{x}{t}, t\right) \quad (18)$$

Отметим следующее свойство неполного эллиптического интеграла первого рода:

$$F(k, x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{1}{k} F\left(\frac{1}{k}, kx\right) \quad (19)$$

Оно помогает установить, что

$$xL(x, t) = tL(t, x) \quad (20)$$

Продолжим исследование интегрального уравнения первого рода (12) методом регуляризации. Рассмотрим интеграл в правой части (17) как оператор и подействуем им слева на (12). Тогда получим эквивалентное (12)

уравнение

$$q(x) - \frac{\varepsilon}{\theta_1 \pi^2} \int_0^1 q(t) B(x, t) dt = \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\varepsilon}{\theta_1 \pi^2} \int_0^1 \Delta w(t) L(x, t) dt$$

$$0 < x < 1 \quad (21)$$

где

$$B(x, t) = \int_0^1 \left[\frac{1}{z} S_z'(z, t) + S_{zz}''(z, t) \right] L(x, z) dz \quad (22)$$

Введем в рассмотрение функцию $p(x)$, такую что

$$q(x) = \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\varepsilon}{\theta_1 \pi^2} p(x) \quad (23)$$

Она является решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$p(x) - \frac{\varepsilon}{\theta_1 \pi^2} \int_0^1 p(t) B(x, t) dt = g(x), \quad 0 < x < 1 \quad (24)$$

$$g(x) = - \int_0^1 \Delta w(t) L(x, t) dt + c \int_0^1 \frac{B(x, t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (25)$$

Для определения c служит условие (13), которое согласно (23) можно записать так:

$$c \left[\frac{2}{1+\varepsilon^2} - \frac{\operatorname{arctg} \varepsilon}{\varepsilon} \right] + \frac{\varepsilon}{\theta_1 \pi^2} \int_0^1 p(t) \frac{(1-\varepsilon^2 t^2)t}{(1+\varepsilon^2 t^2)^{3/2}} dt = - \frac{Z}{2\pi R^2 G} \quad (26)$$

Подставляя (23) в уравнение (12) и учитывая, что

$$w(0) = -2a - \frac{1}{\pi G} \int_0^\pi Q(\alpha) H(0, \alpha) \sin \alpha d\alpha \quad (27)$$

получим связь сближения a с множителем c

$$w(0) = c \left[\frac{\theta_1 \pi^2}{\varepsilon} + \int_0^1 \frac{S(0, t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right] + \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 p(t) \left[2\pi + \frac{\varepsilon}{\theta_1} S(0, t) \right] dt \quad (28)$$

Можно показать, что ядро $B(x, t)$ ограничено при $t \neq x$ и имеет логарифмическую особенность при $t = x$. Будем предполагать, как обычно, что $w(x) \in C^2$ на отрезке $[0, 1]$. Тогда $g(x) \in C$ на $[0, 1]$.

Ядро $B(x, t)$ имеет интегрируемый квадрат по совокупности переменных x и t

$$\int_0^1 \int_0^1 |B(x, t)|^2 dx dt = b^2 < \infty$$

и, более того

$$\int_0^1 |B(x, t)|^2 dt \leq T < \infty$$

Кроме того, ядро $B(x, t)$ непрерывно по x в целом [7] на отрезке $[0, 1]$.

Согласно перечисленным свойствам интегрального уравнения (24) его решение $p(x) \in C$ на $[0, 1]$, и вследствие теоремы И. Шура при $\varepsilon \leq \theta_1 \pi^2 / b$ оно может быть представлено равномерно сходящимся рядом Неймана по степеням ε , причем ряд сходится не медленнее, чем прогрессия с знаменателем $\varepsilon b / \theta_1 \pi^2$ согласно [7].

Перейдем к решению интегрального уравнения (24).

Можно показать, что функция $S(x, t)$ (11) представима равномерно сходящимся при $\varepsilon < 1$, $0 \leq x, t \leq 1$ рядом

$$S(x, t) = t \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, t) \varepsilon^n + \ln \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} g_{2n}(x, t) \varepsilon^{2n} \right] \quad (29)$$

где $f_n(x, t)$ и $g_{2n}(x, t)$ — функции непрерывные и имеющие интегрируемую вторую производную. В частности

$$\begin{aligned} f_0(x, t) &= -\kappa \ln \max(x, t) + c_0, & f_1(x, t) &= 4c_1(x+t) E\left(\frac{2\sqrt{xt}}{x+t}\right) \\ f_2(x, t) &= \frac{1}{4}c_2(x^2+t^2) \ln \max(x, t) + \left(\frac{1}{2}\kappa - \frac{1}{4}c_2\right) \max(x^2, t^2) + \\ &+ \frac{1}{4}c_3(x^2+t^2) \\ g_0(x, t) &= -\kappa, & g_2(x, t) &= \frac{1}{4}c_2(x^2+t^2) \end{aligned}$$

Здесь $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода, а коэффициенты c_i выражаются через константы A и λ (4) так:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} \frac{1-2\nu}{1+\nu} - 4(1-\nu) + \frac{1}{2} \operatorname{Re} A \int_0^1 \frac{y^{2-\lambda}-1}{1-y} dy \\ c_1 &= \frac{1}{2}\pi [\operatorname{Re} A (2-\lambda) - 3\kappa], & c_2 &= 10\kappa - 2 \operatorname{Re} A (2-\lambda) (1+\lambda) \\ c_3 &= -2c_0 + 16(1-\nu) + 20\kappa - 4 \operatorname{Re} A (2-\lambda) - \\ &- 4 \operatorname{Re} A \int_0^1 \frac{y^{2-\lambda}-1-(2-\lambda)(y-1)-\frac{1}{2}(2-\lambda)(1-\lambda)(y-1)^2}{y} \left[\frac{1}{(1-y)^3} - 1 \right] dy \end{aligned}$$

где

$$\kappa = (1-2\nu)^2$$

Подставляя ряд (29) в (22), получим для ядра интегрального уравнения аналогичное разложение

$$B(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, t) \varepsilon^n + \ln \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} G_{2n}(x, t) \varepsilon^{2n} \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} F_0(x, t) &= -\kappa L(x, t), & G_2(x, t) &= c_2 t \sqrt{1-x^2} \\ F_1(x, t) &= c_1 \int_0^1 L(x, s) \frac{4t}{s+t} K\left(\frac{2\sqrt{st}}{s+t}\right) ds \end{aligned}$$

$$F_2(x, t) = t \left\{ c_3 \sqrt{1-x^2} + c_2 \int_0^1 \ln \max(s, t) L(x, s) ds + \right. \\ \left. + \kappa \left[tL(x, t) + 2 \int_0^1 h(s-t) L(x, s) ds \right] \right\} \quad (31)$$

Здесь $h(x)$ — функция Хевисайда. Чтобы быть последовательными, разложим также правую часть интегрального уравнения (24) $g(x)$ в ряд типа (29).

Как обычно, будем предполагать, что правая часть исходного уравнения (12) представима в окрестности точки $x = 0$ равномерно сходящимся при $\varepsilon < 1$ рядом

$$w(x) = -a \left[2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)(1+4n)}{2^{n-1} n!} (x)^{2n} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} (\varepsilon x)^{2n} \quad (32)$$

Коэффициенты A_{2n} определяются заданной внешней нагрузкой $Q(\theta)$ и формой штампа и не зависят от сближения a .

Подставляя (32) в первый интеграл (25), получим

$$-\int_0^1 \Delta w(t) L(x, t) dt = \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)(1+4n)}{2^{n-1} n!} - A_{2n} \right] \times \\ \times \varepsilon^{2n} \frac{2n+1}{2n-1} \beta_n E_{n-1}(x^2), \quad \beta_n = \frac{n \sqrt{\pi} \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} \quad \left(n > \frac{1}{2} \right) \quad (33)$$

здесь $E_n(x)$ — полиномы Якоби.

При выводе (33) использована формула

$$\int_0^1 t^{2n-2} L(x, t) dt = \frac{2n+1}{2n-1} \frac{\beta_n}{(2n)^2} E_{n-1}(x^2) \sqrt{1-x^2}$$

которая получена после некоторых преобразований и сравнения результатов работ [8,9].

Подставляя во второй интеграл (25) вместо $B(x, t)$ соответствующий ему ряд (30), получим

$$\int_0^1 \frac{B(x, t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} M_n(x) \varepsilon^n + \ln \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} N_{2n}(x) \varepsilon^{2n} \quad (34)$$

$$M_n(x) = \int_0^1 \frac{F_n(x, t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad N_{2n}(x) = \int_0^1 \frac{G_{2n}(x, t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

В частности

$$M_0(x) = -\kappa J_1(x), \quad M_1(x) = c_1 \pi^2 \sqrt{1-x^2}$$

$$M_2(x) = (c_3 + 2\kappa) \sqrt{1-x^2} + \kappa [J_1(x) - 3J_3(x)] + c_2 [J_2(x) - J_3(x)]$$

$$N_2(x) = c_2 \sqrt{1-x^2}$$

Здесь

$$J_1(x) = \int_0^1 \frac{L(x, t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad J_2(x) = \int_0^1 \ln(1 + \sqrt{1-t^2}) L(x, t) dt \quad (35)$$

$$J_3(x) = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} L(x, t) dt, \quad J_4(x) = \int_0^1 (1-t^2)^{3/2} L(x, t) dt$$

Легко получить асимптотические представления этих интегралов при $x \rightarrow 1$

$$J_1(x) \sim -\sqrt{1-x^2} \ln \sqrt{1-x^2}, \quad J_i \sim k_i \sqrt{1-x^2}, \quad k_i = \text{const}, \quad i = 2, 3, 4$$

Интегралы (35) достигают максимума при $x = 0$

$$J_1(0) = 1/8\pi^2, \quad J_2(0) = 1/8\pi^2 - 2 + \ln 4$$

$$J_3(0) = 1/16\pi^2 + 1/4, \quad J_4(0) = 3/64\pi^2 + 1/4$$

Для решения интегрального уравнения (24) подставим в него ряды (30), (33), (34) и применим асимптотический метод И. И. Воровича — В. М. Александрова [10]. Он сразу устанавливает форму решения.

Отметим, что в правую часть интегрального уравнения (24) константы c и a входят линейно. В силу линейности уравнения они также линейно будут входить в решение (24). Удобно поэтому разделить решение на две части.

Во-первых, положим, что правая часть уравнения (24) равна

$$g(x) = -\sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \varepsilon^{2n} \frac{2n+1}{2n-1} \beta_n E_{n-1}(x^2)$$

Соответствующее ей решение обозначим

$$p^\circ(x) = -4A_2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n^\circ(x) \varepsilon^n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p_{m,n}^\circ(x) \varepsilon^{3n+m-1} \ln^n \varepsilon \right] \quad (36)$$

Способом, изложенным в [10], получим

$$p_0^\circ(x) = p_1^\circ(x) = p_{0,n}^\circ(x) = p_{1,n}^\circ(x) = p_{2,n}^\circ(x) = 0$$

$$p_2^\circ(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad p_3^\circ(x) = -\frac{\kappa}{\theta_1 \pi^2} J_3(x), \quad p_{3,1}^\circ(x) = \frac{c_2}{3\theta_1 \pi^2} \sqrt{1-x^2}$$

$$p_4^\circ(x) = \frac{8}{9} \frac{A_4}{A_2} \sqrt{1-x^2} E_1(x^2) + \frac{c_1}{2\theta_1} \left[1 - \frac{1}{9} E_1(x^2) \right] \sqrt{1-x^2} +$$

$$+ \left(\frac{\kappa}{\theta_1 \pi^2} \right)^2 \int_0^1 J_3(t) L(x, t) dt$$

$$p_5^\circ(x) = \frac{1}{3\theta_1 \pi^2} \left\{ c_3 \sqrt{1-x^2} + c_2 \left(J_2 - J_3 - \frac{1}{3} J_4 \right) + \kappa \left[2 \sqrt{1-x^2} + 3J_3 - \right. \right.$$

$$\left. - 5J_4 - 8 \frac{A_4}{A_2} \left(J_3 - \frac{2}{3} J_4 \right) \right\} - \frac{\kappa c_1}{(\theta_1 \pi^2)^2} \left[\frac{\pi^2}{3} \left(J_3 + \frac{1}{3} J_4 \right) + \right. \quad (37)$$

$$\left. + \int_0^1 L(x, s) ds \int_0^1 J_3(t) \frac{4t}{s+t} K \left(\frac{2\sqrt{st}}{s+t} \right) dt \right] - \left(\frac{\kappa}{\theta_1 \pi^2} \right)^3 \int_0^1 dt L(x, t) \int_0^1 J_3(s) L(t, s) ds$$

Далее положим правую часть интегрального уравнения (24) равной

$$g(x) = \int_0^1 \frac{B(x, t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Соответствующее решение обозначим

$$p_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) \varepsilon^n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{m,n}(x) \varepsilon^{3n+m-1} \ln^n \varepsilon \quad (38)$$

Так же, как и выше, получим

$$\begin{aligned} q_0(x) &= -\kappa J_1(x), \quad q_1(x) = c_1 \pi^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{\kappa^2}{\theta_1 \pi^2} \int_0^1 J_1(t) L(x, t) dt \\ q_2(x) &= (c_3 + 2\kappa) \sqrt{1-x^2} + \kappa [J_1(x) - 3J_3(x)] + c_2 [J_2(x) - J_3(x)] - \\ &\quad - \kappa \frac{c_1}{\theta_1} \left[J_3(x) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 ds L(x, s) \int_0^1 J_1(t) \frac{4t}{s+t} K\left(\frac{2\sqrt{st}}{s+t}\right) dt \right] - \\ &\quad - \frac{\kappa^3}{(\theta_1 \pi^2)^2} \int_0^1 dt L(x, t) \int_0^1 J_1(s) L(t, s) ds \\ q_{0,1}(x) &= c_2 \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Таким образом, решение интегрального уравнения (24) с правой частью (25) представимо в виде

$$p(x) = ap^*(x) + p^o(x) + cp_0(x) \quad (39)$$

где функции, помеченные звездочкой, следует вычислять по формулам (36), (37), полагая в них

$$A_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)(1+4n)}{2^{n-1} n!}$$

Подставляя решение (39) в условия (26) и (28) и учитывая (27), получим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно констант c и a . Задачу можно считать решенной.

Чтобы получить решение контактной задачи в классе ограниченных функций, следует положить $c = 0$ в (23) и (39). При этом формула для сближения (28) упрощается и принимает вид

$$a \left\{ 2 + \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 p^*(t) \left[2\pi + \frac{\varepsilon}{\theta_1} S(0, t) \right] dt \right\} = A_0 - \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 p^o(t) \left[2\pi + \frac{\varepsilon}{\theta_1} S(0, t) \right] dt$$

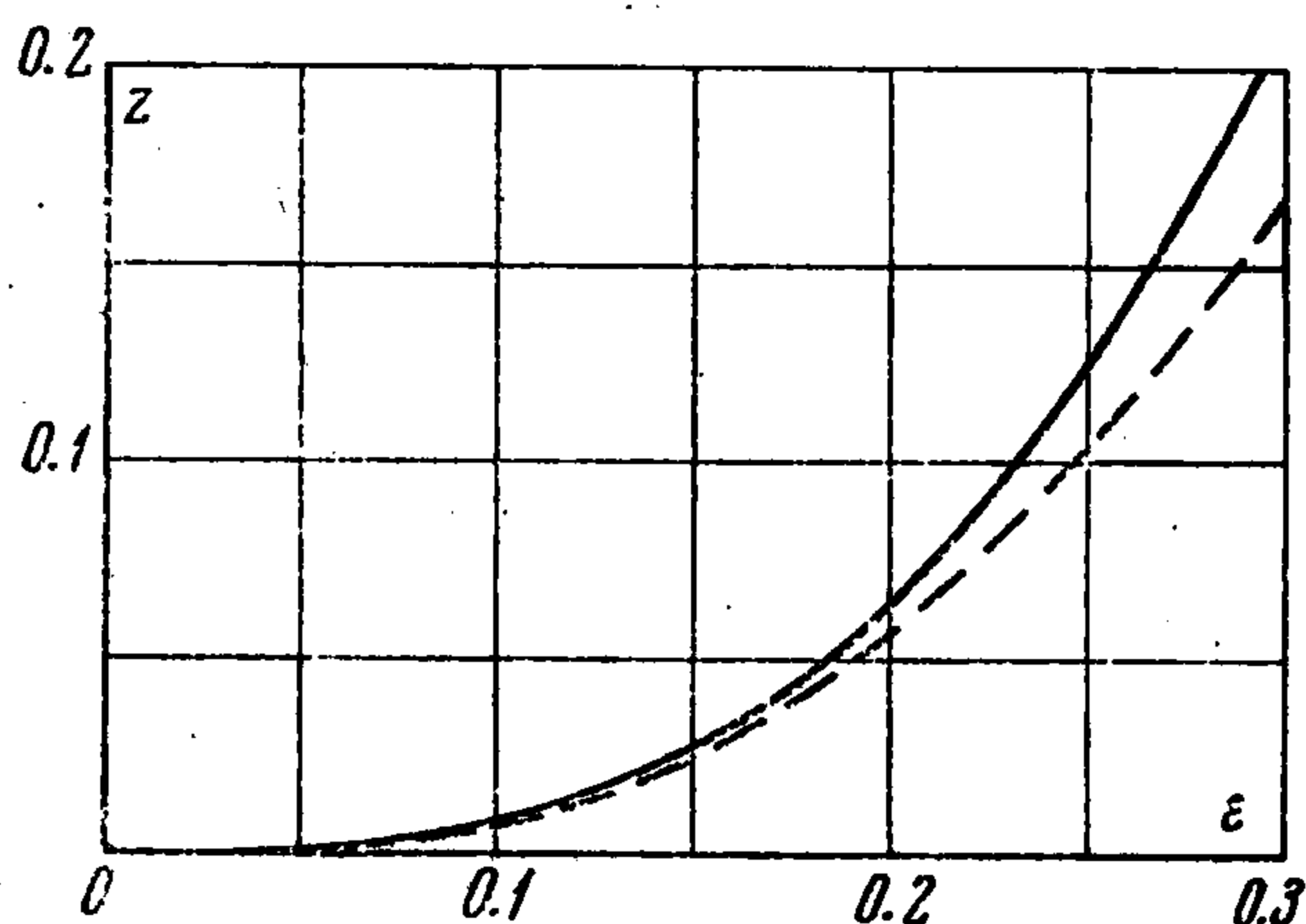
Подставляя в это соотношение вместо p^o , p^* и $S(0, t)$ соответствующие им ряды, получим

$$a = \frac{A_0}{2} + \left(\frac{5}{2} A_0 + A_2 \right) \varepsilon^2 \left\{ 1 + \frac{2\varepsilon}{3\theta_1 \pi^2} \left[c_0 + \kappa \left(\frac{5}{6} - \ln 4\varepsilon \right) \right] \right\} + O(\varepsilon^4) \quad (40)$$

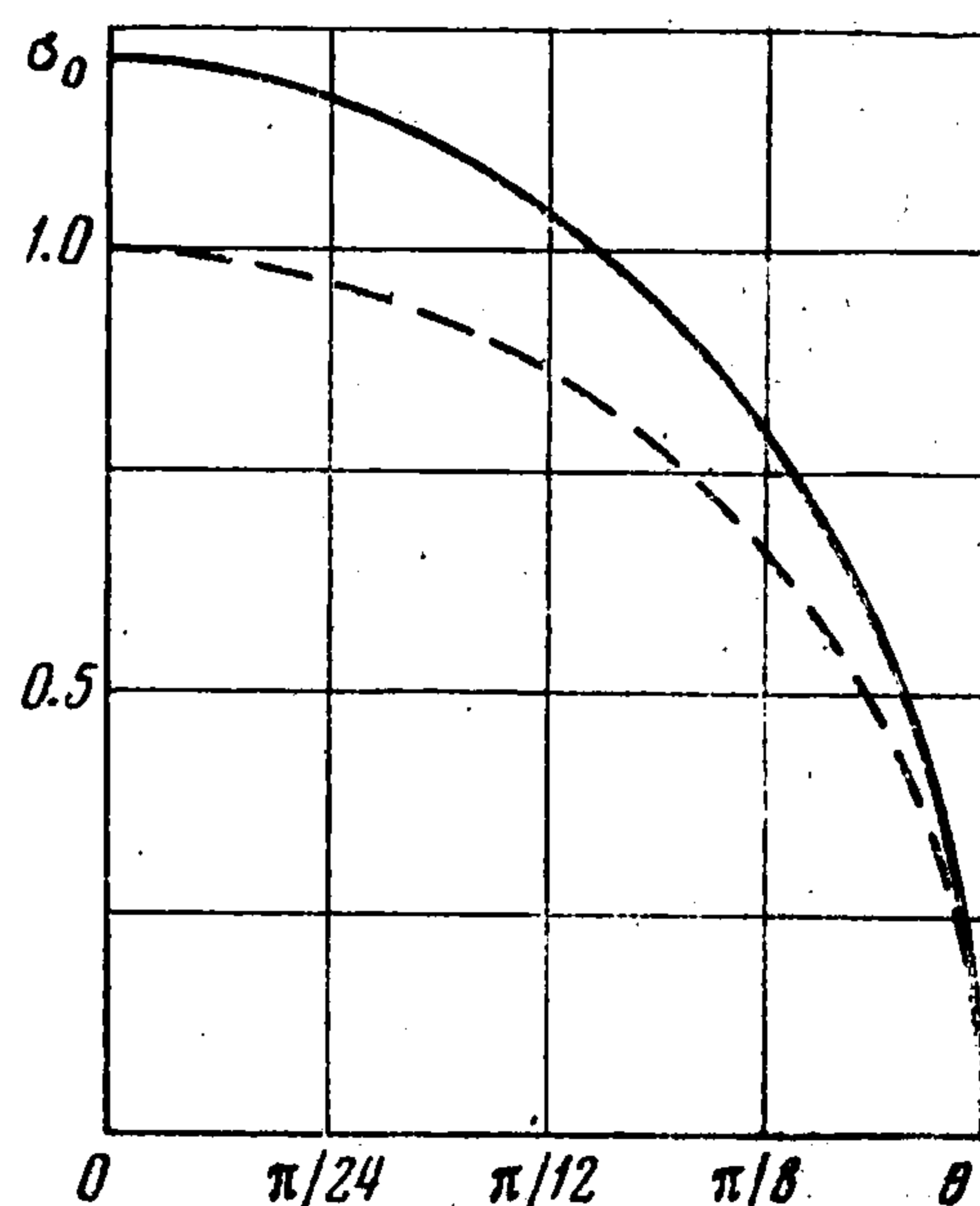
До сих пор неизвестная граница области контакта ($\varepsilon = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma$) определяется условием (26), в котором следует положить $c = 0$. Учитывая (39) и (40), получим

$$\begin{aligned} \frac{z}{(2\varepsilon)^3} = \frac{Z_1}{A_2 R^2} \frac{3\theta_1 \pi}{8G\varepsilon^3} = & \left(1 + \frac{5}{2} \frac{A_0}{A_2}\right) \left\{1 - \varepsilon \frac{3}{4} \frac{\kappa}{\theta_1 \pi^2} + \varepsilon^2 \left[4 + \frac{8}{5} \frac{A_4}{A_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{5} \frac{c_1}{\theta_1} + 3 \left(\frac{\kappa}{\theta_1 \pi^2}\right)^2 \int_0^1 t \sqrt{1-t^2} J_3(t) dt\right] + \varepsilon^3 \ln \varepsilon \frac{c_2 - 10\kappa}{3\theta_1 \pi^2} + \right. \quad (41) \\ & \left. + \frac{\varepsilon^3}{3\theta_1 \pi^2} \left[10c_0 + c_3 + c_2 \left(\ln 4 - \frac{7}{4}\right) + \kappa \left(\frac{11}{12} - \frac{10}{3} \frac{A_4}{A_2} - 10 \ln 4 - \frac{11}{6} \frac{c_1}{\theta_1}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{9\kappa^3}{(\theta_1 \pi^2)^2} \int_0^1 s J_2^2(s) ds\right]\right\} - \frac{20}{3} \frac{A_0}{A_2} \left(\frac{27}{20} + \frac{A_4}{A_2}\right) \varepsilon^2 \left(\frac{3}{5} - \varepsilon \frac{5}{12} \frac{\kappa}{\theta_1 \pi^2}\right) + O(\varepsilon^4) \end{aligned}$$

Ограничиваясь в формулах (36), (40) и (41) первыми членами, получим решение задачи о вдавливании параболического штампа в упругое полупространство.



Фиг. 2



Фиг. 3

Следует отметить, что построенное выше решение интегрального уравнения (24) можно получить методом последовательных приближений с последующей группировкой членов, имеющих одинаковый порядок малости по ε .

В качестве примера рассмотрим задачу о контакте весомого упругого шара $r \ll R$ плотностью ρ со сферическим штампом близкого радиуса $r = R(1 + \Delta)$. Легко найти частное решение уравнений теории упругости, соответствующее массовым силам

$$K = \rho g e_z$$

$$u_r = -r^2 \cos \theta \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\rho g}{4G}, \quad u_\theta = -r^2 \cos \theta \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\rho g}{4G}$$

Соответствующие напряжения имеют вид

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\varphi = -r \cos \theta \rho g, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

Можно показать, что

$$\int_0^\pi \cos \alpha H(\theta, \alpha) \sin \alpha d\alpha = 0, \quad 0 < \theta < \pi$$

Следовательно, задача сводится к решению интегрального уравнения (9) с правой частью

$$v(\theta) = -a \cos \theta + \sqrt{1 + 2\Delta + \Delta^2 \cos^2 \theta} - 1 - \Delta \cos \theta$$

$$a = a_0 - \frac{1 - 2\nu \rho g R}{1 + \nu} \frac{1}{4G}$$

где a_0 — сближение штампа с центром шара.

Решение дается формулами (39) — (41), в которых следует принять

$$A_0 = 0, \quad A_2 = \frac{4\Delta}{1 + \Delta}, \quad \frac{A_4}{A_2} = -\frac{1}{2} \frac{3 + 4\Delta - \Delta^2}{(1 + \Delta)^2}$$

На фиг. 2 представлена зависимость (41) при $\nu = 0.3$, $\Delta = 0.001$. На фиг. 3 дано распределение контактного давления в случае, когда угол контакта $2\gamma = 60^\circ$, вдоль оси абсцисс отложен угол θ , а вдоль оси ординат — величина

$$\sigma_0(\theta) = -\sigma(\theta) \left/ \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \frac{A_2 G}{\pi(1 - \gamma)} \right.$$

Пунктирные кривые на обеих фигурах относятся к решению Герца. Сравнение показывает, что при больших областях контакта ($\gamma \geq 30^\circ$) решение Герца, полученное в предположении, что контактирующие тела можно заменить полупространствами, приводит к значительным ошибкам ($\delta > 20\%$).

Автор благодарит Л. С. Баркову, взявшую на себя труд провести все необходимые расчеты.

Поступила 21 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Н е r t z Н. Ueber die Berührung fester elastischer Körper. J. reine und angew. Math., 1882, Bd 92, N. 1, 2.
2. Г а л и н Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
3. А б р а м я н Б. Л., А р у т ю н я н Н. Х., Б а б л о я н А. А. О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
4. А р у т ю н я н Н. Х., А б р а м я н Б. Л. О вдавливании жесткого штампа в упругую сферу. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
5. Б о н д а р е в а В. Ф. О действии нормальной нагрузки на упругий шар. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
6. Л е о н о в М. Я. К теории расчета упругих оснований. ПММ, 1939, т. 3, вып. 2.
7. М и х л и н С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.
8. Ш т а е р м а н И. Я. Контактная задача теории упругости М., Гостехиздат, 1949.
9. Д е й ч Э. Г. Об одной осесимметричной контактной задаче для неплоского штампа кругового в плане. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
10. А л е к с а н д р о в В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.