Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОГО ТЕЛА, РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

С. А. Амбарцумян

(Ереван)

В данной работе излагается теория для разносопротивляющихся наследственно-упругих тел. Используются основные положения разномодульной теории упругости [1–4], а также обычная теория наследственно-упругого тела [5–7].

Анализируя опыты на ползучесть различных материалов, легко установить, что они в громадном большинстве случаев «разноползучи», т. е. процессы деформирования во времени при чистом растяжении (плюс) и при чистом сжатии (минус) протекают различным образом. Опытами устанавливается также, что во многих случаях эти материалы разномодульны, т. е. различны также мгновенные модули упругости при растяжении (E^+) и при сжатии (E^-).

Попытка построения теории наследственно-упругого тела, разносопротивляющегося растяжению и сжатию, были сделаны и раньше [8–10]. Эти работы здесь не обсуждаются вовсе, так как в основе их лежат положения, принципиально отличающиеся от исходных положений предлагаемой здесь теории.

1. Пусть материал рассматриваемого тела таков, что при чистом растяжении в любом направлении имеет: мгновенный модуль упругости E^+, мгновенный коэффициент Пуассона ν^+, коэффициент наследуемой деформации $K^+(t-\tau)$ и коэффициент наследуемой поперечной деформации $\mu^+(t-\tau)$; а при чистом сжатии в любом направлении имеет соответственно: E^-, ν^-, $K^-(t-\tau)$, $\mu^-(t-\tau)$. Здесь, как обычно, t представляет рассматриваемый момент времени, а τ — момент, когда было приложено напряжение, т. е. возраст материала к моменту нагружения.

Предполагается, что при одновременном чистом растяжении и сжатии в различных взаимно ортогональных направлениях, характеристики тела, найденные при одномерном растяжении или сжатии, остаются неизменными.

Считается, что рассматриваемое тело при любом напряженном состоянии претерпевает лишь малые деформации и подчиняется общим закономерностям сплошной наследственно-упругой среды. В частности, согласно результатам, изложенным в [2–4, 6], предполагается существование потенциала ползучести для пространственного напряженного состояния, что, как известно, считается весьма вероятным [6].

2. Согласно принципу наследственной упругости Вольтерра [6], полная деформация тела складывается из мгновенной деформации, которая определяется напряжением, действующим в данный момент времени, и из наследуемой деформации. Таким образом, если в какой-либо точке тела (здесь и в последующем аргументы x_i опущены), в момент времени τ действует растягивающее напряжение $\sigma_{11}^\circ(\tau)$ в течение времени $d\tau$, то в главном направлении x_1° и ортогональных к x_1° взаимно перпендикулярных

направлениях x_2° и x_3° будем иметь мгновенные деформации

$$e_{11}^\circ(t) = \sigma_{11}^\circ(t) \,/\, E^+, \quad e_{22}^\circ(t) = e_{33}^\circ(t) = -\nu^+\sigma_{11}^\circ(t) \,/\, E^+ \tag{2.1}$$

и малые наследуемые деформации

$$\begin{gathered} de_{11}^\circ = \sigma_{11}^\circ(\tau)\, d\tau K^+(t-\tau) \\ de_{22}^\circ = de_{33}^\circ = -\mu^+(t-\tau)\,\sigma_{11}^\circ(\tau) d\tau K^+(t-\tau) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Если же в момент времени τ действует сжимающее напряжение, то, очевидно, будем иметь соответственно

$$e_{11}^\circ(t) = -\sigma_{11}^\circ(t) \,/\, E^-, \qquad e_{22}^\circ(t) = e_{33}^\circ(t) = \nu^-\sigma_{11}^\circ(t)/E^- \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} de_{11}^\circ = -\sigma_{11}^\circ(\tau)\; d\tau K^-(t-\tau) \\ de_{22}^\circ = de_{33}^\circ = \mu^-(t-\tau)\sigma_{11}^\circ(\tau)\; d\tau K^-(t-\tau) \end{gathered} \tag{2.4}$$

Как обычно [6], интегрируя зависимости (2.2) и (2.4) по τ в пределах от $-\infty$ до t и добавляя к ним соответствующие упруго-мгновенные деформации (2.1) и (2.3), получим исходные формулы закона наследственной упругости.

При $\sigma_{11}^\circ(t) > 0$

$$\begin{gathered} e_{11}^\circ(t) = \frac{\sigma_{11}^\circ(t)}{E^+} + \int_{-\infty}^{t} \sigma_{11}^\circ(\tau)\, K^+(t-\tau)\, d\tau \\ e_{22}^\circ(t) = e_{33}^\circ(t) = -\nu^+\frac{\sigma_{11}^\circ(t)}{E^+} - \int_{-\infty}^{t} \mu^+(t-\tau)\,\sigma_{11}^\circ(\tau)\, K^+(t-\tau)\, d\tau \end{gathered} \tag{2.5}$$

При $\sigma_{11}^\circ(t) < 0$

$$\begin{gathered} e_{11}^\circ(t) = -\frac{\sigma_{11}^\circ(t)}{E^-} - \int_{-\infty}^{t} \sigma_{11}^\circ(\tau)\, K^-(t-\tau)\, d\tau \\ e_{22}^\circ(t) = e_{33}^\circ(t) = \nu^-\frac{\sigma_{11}^\circ(t)}{E^-} + \int_{-\infty}^{t} \mu^-(t-\tau)\,\sigma_{11}^\circ(\tau)\, K^-(t-\tau)\, d\tau \end{gathered} \tag{2.6}$$

3. Пусть теперь имеется пространственное напряженное состояние и все главные напряжения $\sigma_{11}^\circ(t)$, $\sigma_{22}^\circ(t)$, $\sigma_{33}^\circ(t)$ в рассматриваемой точке вступают в действие одновременно. Очевидно, в этом случае все главные напряжения или растягивающие $\sigma_{ii}^\circ(t) > 0$, или сжимающие $\sigma_{ii}^\circ(t) < 0$, или одно из главных напряжений имеет знак, отличный от остальных двух, т. е. два главных напряжения растягивающие, а третье — сжимающее или, наоборот, два главных напряжения сжимающие, а третье — растягивающее. Ясно, что иные общие случаи напряженного состояния невозможны.

Первые два случая, т. е. когда $\sigma_{ii}^\circ(t) > 0$ или $\sigma_{ii}^\circ(t) < 0$, особого интереса не представляют. В этих случаях, т. е. в областях и точках первого рода [1], имеет место обычная теория наследственно-упругого тела с соответствующими коэффициентами деформирования. В частности, когда $\sigma_{ii}^\circ(t) > 0$, имеем E^+, ν^+, $\mu^+(t-\tau)$, $K^+(t-\tau)$ и, когда $\sigma_{ii}^\circ(t) < 0$, имеем E^-, ν^-, $\mu^-(t-\tau)$, $K^-(t-\tau)$.

Остальные случаи общего напряженного состояния будут рассмотрены подробно, ибо эти случаи и характеризуют собственно теорию наследственной упругости разносопротивляющихся тел. В этих случаях, т. е. в областях и точках второго рода [1], появляются специфические явления, связанные с разносопротивляемостью рассматриваемого тела.

На основании исходных предположений и соотношений (2.5), (2.6) закон наследственной упругости в главных направлениях $x_i^\circ(t)$ будет записан следующим образом:

$$e_{ii}^\circ(t) = (a_{ii} - a_{12})\sigma_{ii}^\circ(t) + a_{12}\sigma(t) + \int_{-\infty}^{t} \{[b_{ii}(t-\tau) - b_{12}(t-\tau)]\,\sigma_{ii}^\circ(\tau) + b_{12}(t-\tau)\,\sigma(\tau)\}\,d\tau \tag{3.1}$$

$$e_{ij}^\circ = 0 \quad (i \neq j), \qquad \sigma(t) = \sigma_{11}^\circ(t) + \sigma_{22}^\circ(t) + \sigma_{33}^\circ(t)$$

($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$; по i не суммировать).

Исходя из приведенных выше результатов, в частности из (2.5) и (2.6), для коэффициентов a_{ik} и b_{ik} в различных общих случаях напряженного состояния имеем

1) $\sigma_{11}^\circ > 0, \quad \sigma_{22}^\circ > 0, \quad \sigma_{33}^\circ > 0$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1\,/\,E^+, \quad a_{12} = -\nu^+\,/\,E^+$$
$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = K^+(t-\tau), \quad b_{12} = -\mu^+(t-\tau)\,K^+(t-\tau) \tag{3.2}$$

2) $\sigma_{11}^\circ < 0, \quad \sigma_{22}^\circ < 0, \quad \sigma_{33}^\circ < 0$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1\,/\,E^-, \quad a_{12} = -\nu^-\,/\,E^-$$
$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = K^-(t-\tau), \quad b_{12} = -\mu^-(t-\tau)K^-(t-\tau) \tag{3.3}$$

3) $\sigma_{11}^\circ > 0, \quad \sigma_{22}^\circ < 0, \quad \sigma_{33}^\circ > 0$

$$a_{11} = a_{33} = 1\,/\,E^+, \quad a_{22} = 1\,/\,E^-, \quad a_{12} = -\nu^+\,/\,E^+ = -\nu^-\,/\,E^-$$
$$b_{11} = b_{33} = K^+(t-\tau), \quad b_{22} = K^-(t-\tau) \tag{3.4}$$
$$b_{12} = -\mu^+(t-\tau)K^+(t-\tau) = -\mu^-(t-\tau)\,K^-(t-\tau)$$

4) $\sigma_{11}^\circ > 0, \quad \sigma_{22}^\circ < 0, \quad \sigma_{33}^\circ < 0$

$$a_{11} = 1\,/\,E^+, \quad a_{22} = a_{33} = 1\,/\,E^-, \quad a_{12} = -\nu^+\,/\,E^+ = -\nu^-\,/\,E^-$$
$$b_{11} = K^+(t-\tau), \quad b_{22} = b_{33} = K^-(t-\tau) \tag{3.5}$$
$$b_{12} = -\mu^+(t-\tau)K^+(t-\tau) = -\mu^-(t-\tau)\,K^-(t-\tau)$$ и т. д.

Вопрос симметрии коэффициентов a_{ik} и b_{ik} здесь подробно не обсуждается, так как, исходя из положения о существовании потенциалов упруго-мгновенной деформации [4] и деформации ползучести [6,11] и повторяя весь ход рассуждений, изложенных в работах [2–4, 6, 11], нетрудно показать, что $a_{ik} = a_{ki}$ и $b_{ik} = b_{ki}$.

4. Исходя из (3.1) можно найти закон наследственной упругости для исходной ортогональной системы координат x_i, относительно которой положение главных направлений x_i° рассматриваемой точки определяется при помощи девяти направляющих косинусов l_i, m_i, n_i, которые в тензорной записи удовлетворяют следующим условиям:

$$c_k{}^i c_k{}^j = \delta_{ij} \tag{4.1}$$

где

$$\delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \qquad \delta_{ij} = 1 \quad (i = j)$$

Функции c, входящие в (4.1) с элементами систем координат x_i и x_i°, а также с направляющими косинусами, связаны известными соотношениями [12]

$$\begin{gathered}c_i{}^j = \frac{\partial x_i^\circ}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i^\circ}, \qquad c_i{}^1 = \frac{\partial x_1^\circ}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x_1^\circ} = l_i \\ c_i{}^2 = \frac{\partial x_2^\circ}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x_2^\circ} = m_i, \qquad c_i{}^3 = \frac{\partial x_3^\circ}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x_3^\circ} = n_i\end{gathered} \tag{4.2}$$

Согласно (4.1) и (4.2) формулы преобразования напряженного и деформированного состояния от одной ортогональной системы координат x_i к другой x_i° запишутся следующим образом [12]:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = c_i{}^p c_j{}^q \sigma_{pq}^\circ, \qquad e_{ij} = c_i{}^p c_j{}^q e_{pq}^\circ \\ \sigma_{ij}^\circ = c_p{}^i c_q{}^j \sigma_{pq}, \qquad e_{ij}^\circ = c_p{}^i c_q{}^j e_{pq} \\ (p = 1,\, 2,\, 3;\ q = 1,\, 2,\, 3)\end{gathered} \tag{4.3}$$

при этом, так как система координат x_i° совпадает с главными направлениями, то

$$c_p{}^i c_q{}^j \sigma_{pq} = 0, \qquad c_p{}^i c_q{}^j e_{pq} = 0 \tag{4.4}$$

т. е. при $i \neq j$, $\sigma_{ij}^\circ = 0$, $e_{ij}^\circ = 0$.

Пусть теперь, в общем случае, напряженно-деформируемое состояние рассматриваемой точки второго рода, в исходной системе координат x_i, характеризуется напряжениями $\sigma_{ij}(t)$ и деформациями $e_{ij}(t)$. Этому напряженному состоянию будут соответствовать главные направления $x_i^\circ(t)$, главные напряжения $\sigma_{ii}^\circ(t)$ и главные деформации $e_{ii}^\circ(t)$.

Очевидно, при одновременном действии, в момент времени τ, главных напряжений $\sigma_{ii}^\circ(t)$ появляются главные упруго-мгновенные деформации, которые, согласно (3.1), определятся формулой

$$e_{ii}^\circ(\tau) = (a_{ii} - a_{12})\,\sigma_{ii}^\circ(\tau) + a_{12}\sigma(\tau) \qquad \text{(по } i \text{ не суммировать)} \tag{4.5}$$

соответствующие им упруго-мгновенные деформации, в исходной системе координат x_i, согласно (4.3), будут определяться при помощи формулы

$$e_{ij}(\tau) = c_i{}^p(\tau)\, c_j{}^q(\tau)\, e_{pq}^\circ(\tau) \tag{4.6}$$

Пусть теперь главные напряжения $\sigma_{ii}^\circ(\tau)$, оставаясь неизменными, будут действовать в течение малого промежутка времени $d\tau$, тогда, очевидно, в главных направлениях $x_i^\circ(\tau)$ появятся малые наследуемые деформации, которые согласно (2.2), (2.4), (3.4) и (3.5) определятся формулой

$$de_{ii}^\circ = \{[b_{ii}(t-\tau) - b_{12}(t-\tau)]\,\sigma_{ii}^\circ(\tau) + b_{12}(t-\tau)\,\sigma(\tau)\}\,d\tau \tag{4.7}$$
$$\text{(по } i \text{ не суммировать)}$$

соответствующие им малые наследуемые деформации, в исходной системе координат x_i, согласно (4.3), будут определяться формулой

$$de_{ij} = c_i{}^p(\tau)\, c_j{}^q(\tau)\, de_{pq}^\circ(\tau) \tag{4.8}$$

Интегрируя (4.8) по τ в пределах от $-\infty$ до t с учетом (4.7) и добавляя к полученному соответствующую упруго-мгновенную деформацию (4.6) с учетом (4.5), после серии преобразований [1], получим три эквивалентные соотношения, которые представят деформации наследственно-упругого тела в исходной системе координат

$$e_{ij}(t) = A_{11}\sigma_{ij}(t) + A_{12}\delta_{ij}\sigma(t) + C_3 m_i(t)\, m_j(t)\, \sigma_{22}^\circ(t) + C_2 n_i(t)\, n_j(t)\, \sigma_{33}^\circ(t) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{t} [B_{11}(t-\tau)\sigma_{ij}(\tau) + B_{12}(t-\tau)\delta_{ij}\sigma(\tau) + D_3(t-\tau) m_i(\tau) m_j(\tau)\sigma_{22}^\circ(\tau) +$$
$$+ D_2(t-\tau) n_i(\tau) n_j(\tau)\sigma_{33}^\circ(\tau)]\, d\tau \tag{4.9}$$

$$e_{ij}(t) = A_{33}\sigma_{ij}(t) + A_{12}\delta_{ij}\sigma(t) - C_2 l_i(t)\, l_j(t)\, \sigma_{11}^\circ(t) - C_1 m_i(t)\, m_j(t)\, \sigma_{22}^\circ(t) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{t} [B_{33}(t-\tau)\sigma_{ij}(\tau) + B_{12}(t-\tau)\delta_{ij}\sigma(\tau) - D_2(t-\tau) l_i(\tau)\, l_j(\tau)\sigma_{11}^\circ(\tau) -$$
$$- D_1(t-\tau) m_i(\tau) m_j(\tau)\sigma_{22}^\circ(\tau)]\, d\tau \tag{4.10}$$

$$e_{ij}(t) = A_{22}\sigma_{ij}(t) + A_{12}\delta_{ij}\sigma(t) - C_3 l_i(t)\, l_j(t)\, \sigma_{11}^\circ(t) + C_1 n_i(t)\, n_j(t)\, \sigma_{33}^\circ(t) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{t} [B_{22}(t-\tau)\sigma_{ij}(\tau) + B_{12}(t-\tau)\delta_{ij}\sigma(\tau) - D_3(t-\tau) l_i(\tau)\, l_j(\tau)\sigma_{11}^\circ(\tau) +$$
$$+ D_1(t-\tau) n_i(\tau) n_j(\tau)\sigma_{33}^\circ(\tau)]\, d\tau \tag{4.11}$$

Здесь $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, но при этом, когда $i = j$, по j не суммируется.

При получении соотношений упругости (4.9) — (4.11) широко были использованы представления (4.1) — (4.4). Наряду с ранее принятыми обозначениями вводятся еще и новые, а именно:

$$\begin{aligned}
&A_{ii} = a_{ii} - a_{12}, \quad A_{12} = a_{12} \quad (\text{по } i \text{ не суммировать})\\
&C_1 = a_{33} - a_{22}, \quad C_2 = a_{33} - a_{11}, \quad C_3 = a_{22} - a_{11}\\
&B_{ii}(t-\tau) = b_{ii}(t-\tau) - b_{12}(t-\tau) \quad (\text{по } i \text{ не суммировать})\\
&B_{12}(t-\tau) = b_{12}(t-\tau), \quad D_1(t-\tau) = b_{33}(t-\tau) - b_{22}(t-\tau)\\
&D_2(t-\tau) = b_{33}(t-\tau) - b_{11}(t-\tau)\\
&D_3(t-\tau) = b_{22}(t-\tau) - b_{11}(t-\tau)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Очевидно, в соотношениях упругости (4.9) — (4.11), полагая

$$\begin{aligned}
&a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1/E, \quad a_{12} = -\nu/E\\
&b_{11}(t-\tau) = b_{22}(t-\tau) = b_{33}(t-\tau) = K(t-\tau)\\
&b_{12} = -\mu(t-\tau) K(t-\tau)
\end{aligned}$$

придем к следующему соотношению упругости для наследственно-упругого тела:

$$e_{ij}(t) = \frac{\sigma_{ij}(t)(1+\nu) - \nu\delta_{ij}\sigma(t)}{E} + \int_{-\infty}^{t} \{K(t-\tau)[1+\mu(t-\tau)]\sigma_{ij}(\tau) -$$
$$- \mu(t-\tau) K(t-\tau)\delta_{ij}\sigma(\tau)\}\, d\tau \tag{4.13}$$

которое совпадает с соответствующим классическим представлением [5–7].

Представление (4.13) справедливо и для областей первого рода, при этом лишь надо учитывать, что, когда $\sigma_{ii}^{\circ}(t) > 0$, имеем E^{+}, ν^{+}, μ^{+}, K^{+}, а когда $\sigma_{ii}^{\circ}(t) < 0$, имеем E^{-}, ν^{-}, μ^{-}, K^{-}.

В областях второго рода, вообще говоря, если известны знаки главных напряжений, соотношения (4.9) — (4.11) могут быть записаны в несколько укороченном виде. Дело в том, что в самом общем случае, по крайней мере, два главных напряжения имеют одинаковые знаки, вследствие чего (см. (3.4), (3.5)) один из коэффициентов C_i и один из коэффициентов D_i становятся равными нулю.

5. В механике разносопротивляющихся тел особое место занимают соотношения упругости, описывающие деформации сдвига.

Не ограничивая общности рассуждений, рассмотрим явления сдвига в плоскости $x_3 = 0$ при плоском напряженном состоянии ($\sigma_{33} = 0$, $\sigma_{23} = 0$, $\sigma_{13} = 0$).

Положим: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $\sigma_{12} = \tau_{xy}$, $e_{12} = e_{xy} / 2$, $\sigma_{33}^{\circ} = \sigma_{33} = 0$, тогда из (4.9) для деформации сдвига получим

$$e_{xy}(t) = 2A_1\tau_{xy}(t) + 2C_3 m_1(t) m_2(t) \sigma_{22}^{\circ}(t) +$$

$$+ 2\int_{-\infty}^{t} [B_1(t-\tau)\tau_{xy}(\tau) + D_3(t-\tau) m_1(\tau) m_2(\tau) \sigma_{22}^{\circ}(\tau)]\, d\tau \qquad (5.1)$$

Если теперь формально полагать [5]

$$e_{xy}(t) = \frac{1}{G'}\tau_{xy}(t) + \int_{-\infty}^{t} \omega'(t-\tau)\tau_{xy}(\tau)\, d\tau \qquad (5.2)$$

то для формально введенных понятий: модуля сдвига G' и коэффициента наследственной деформации сдвига $\omega'(t-\tau)$ получим

$$\frac{1}{G'} = 2\left[A_1 \frac{\sigma_{11}^{\circ}(t)}{\sigma_{11}^{\circ}(t) - \sigma_{22}^{\circ}(t)} - A_2 \frac{\sigma_{22}^{\circ}(t)}{\sigma_{11}^{\circ}(t) - \sigma_{22}^{\circ}(t)}\right] \qquad (5.3)$$

$$\omega'(t-\tau) = 2\left[B_1(t-\tau)\frac{\sigma_{11}^{\circ}(\tau)}{\sigma_{11}^{\circ}(\tau) - \sigma_{22}^{\circ}(\tau)} - B_2(t-\tau)\frac{\sigma_{22}^{\circ}(\tau)}{\sigma_{11}^{\circ}(\tau) - \sigma_{22}^{\circ}(\tau)}\right] \qquad (5.4)$$

Таким образом, величины G' и $\omega'(t-\tau)$, условно названные соответственно модулем сдвига и коэффициентом наследственной деформации сдвига, существенно зависят от напряженного состояния рассматриваемой точки тела [1].

Из сказанного выше ясно, что попытки построения общей теории деформирования разносопротивляющихся тел в предположении, что деформации сдвига могут быть описаны соотношениями типа (5.2) путем введения каких-либо значений для G' и ω', найденных из экспериментов на чистый сдвиг, по крайней мере, не могут считаться корректными.

Рассмотрим явление чистого сдвига. Пусть $\sigma_x(t) = 0$, $\sigma_y(t) = 0$, $\tau_{xy}(t) = p(t)$. Тогда, очевидно

$$\sigma_{11}^{\circ}(t) = p(t), \qquad \sigma_{22}^{\circ}(t) = -p(t)$$

Учитывая приведенное, из (5.2) — (5.4), согласно (4.1), для деформации чистого сдвига получим

$$e_{xy}(t) = (a_{11} + a_{22} - 2a_{12})\,p(t) + \int_{-\infty}^{t} [b_{11}(t-\tau) + b_{22}(t-\tau) - 2b_{12}(t-\tau)]\,p(t)\,d\tau \tag{5.5}$$

Так как $\sigma_{11}{}^{\circ}(t) > 0$, $\sigma_{22}{}^{\circ}(t) < 0$, для коэффициентов a_{ik} и b_{ik} будем иметь

$$\begin{aligned} &a_{11} = 1 / E^{+}, \quad a_{22} = 1 / E^{-}, \quad a_{12} = -\nu^{+} / E^{+} = -\nu^{-} / E^{-} \\ &b_{11}(t-\tau) = K^{+}(t-\tau), \quad b_{22}(t-\tau) = K^{-}(t-\tau) \\ &b_{12}(t-\tau) = -\mu^{+}(t-\tau)K^{+}(t-\tau) = -\mu^{-}(t-\tau)K^{-}(t-\tau) \end{aligned} \tag{5.6}$$

Подставляя значения a_{ik} и b_{ik} из (5.6) в (5.5), получим

$$e_{xy}(t) = \left(\frac{1+\nu^{+}}{E^{+}} + \frac{1+\nu^{-}}{E^{-}}\right) p(t) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} \{K^{+}(t-\tau)[1+\mu^{+}(t-\tau)] + K^{-}(t-\tau)[1+\mu^{-}(t-\tau)]\}\,p(\tau)\,d\tau \tag{5.7}$$

Отсюда для модуля сдвига G' при чистом сдвиге и для коэффициента наследственной деформации при чистом сдвиге ω' получим

$$\begin{aligned} &G' = E^{+}E^{-} / [E^{+}(1+\nu^{-}) + E^{-}(1+\nu^{+})] \\ &\omega' = K^{+}(t-\tau)[1+\mu^{+}(t-\tau)] + K^{-}(t-\tau)[1+\mu^{-}(t-\tau)] \end{aligned} \tag{5.8}$$

Положим $E^{+} = E^{-} = E$, $\nu^{+} = \nu^{-} = \nu$, $K^{+}(t-\tau) = K^{-}(t-\tau) = K(t-\tau)$, $\mu^{+}(t-\tau) = \mu^{-}(t-\tau) = \mu(t-\tau)$, из (5.8) получим значения модуля сдвига G и коэффициента наследственной деформации при чистом сдвиге $\omega(t-\tau)$ для классического наследственно-упругого тела

$$G = E / 2(1+\nu), \qquad \omega = 2[1+\mu(t-\tau)]K(t-\tau) \tag{5.9}$$

которые совпадают с известными результатами классической теории [5].

Значение $\omega'(t-\tau)$, в общем случае, в силу (3.4), (3.5), может быть представлено и иными формулами, а именно:

$$\begin{aligned} &\omega'(t-\tau) = K^{+}(t-\tau)[1+2\mu^{+}(t-\tau)] + K^{-}(t-\tau) \\ &\omega'(t-\tau) = K^{-}(t-\tau)[1+2\mu^{-}(t-\tau)] + K^{+}(t-\tau) \end{aligned}$$

6. Подставляя значения A_{ij} и B_{ij} в соотношения (4.9) (остальные эквивалентные соотношения (4.10) и (4.11) не будут рассмотрены вовсе) и произведя соответствующее суммирование ($e(t) = e_{ii}(t)$), для объемной деформации получим

$$e(t) = (a_{11} + 2a_{12})\,\sigma(t) + C_3\sigma_{22}{}^{\circ}(t) + C_2\sigma_{33}{}^{\circ}(t) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} \{[b_{11}(t-\tau) + 2b_{12}(t-\tau)]\,\sigma(\tau) + D_3(t-\tau)\,\sigma_{22}{}^{\circ}(\tau) +$$

$$+ D_2(t-\tau)\,\sigma_{33}{}^{\circ}(\tau)\}\,d\tau \tag{6.1}$$

где, как обычно, $\sigma(t) = \sigma_{ii}^{\circ}(t) = \sigma_{ii}(t)$ или, согласно (4.12)

$$e(t) = (a_{11} + 2a_{12})\sigma_{11}^{\circ}(t) + (a_{22} + 2a_{12})\sigma_{22}^{\circ}(t) + (a_{32} + 2a_{12})\sigma_{33}^{\circ}(t) + \\ + \int_{-\infty}^{t} \{[b_{11}(t-\tau) + 2b_{12}(t-\tau)]\sigma_{11}^{\circ}(\tau) + \\ + [b_{22}(t-\tau) + 2b_{12}(t-\tau)]\sigma_{22}^{\circ}(\tau) + [b_{33}(t-\tau) + 2b_{12}(t-\tau)]\sigma_{33}^{\circ}(\tau)\}\,d\tau \tag{6.2}$$

Решая интегральное уравнение (6.1) относительно функции $\sigma(t)$, получим

$$\sigma(t) = \frac{e(t) - f_1(t)}{a_{11} + 2a_{12}} - \int_{-\infty}^{t} \Gamma_1(t-\tau)[e(\tau) - f_1(\tau)]\,d\tau \tag{6.3}$$

$$f_1(t) = C_3\sigma_{22}^{\circ}(t) + C_2\sigma_{33}^{\circ}(t) + \int_{-\infty}^{t} [D_3(t-\tau)\sigma_{22}^{\circ}(\tau) + D_2(t-\tau)\sigma_{33}^{\circ}(\tau)]\,d\tau \tag{6.4}$$

где $\Gamma_1(t-\tau)$ — резольвента ядра интегрального уравнения, функция $f_1(t)$ характеризует разносопротивляемость рассматриваемого тела.

Из (4.9), вычитая треть объемной деформации (6.1), получим

$$e_{ii}(t) - {}^1\!/_3\, e(t) = (a_{11} - a_{12})[\sigma_{ii}(t) - {}^1\!/_3\,\sigma(t)] + \\ + \int_{-\infty}^{t} [b_{11}(t-\tau) - b_{12}(t-\tau)][\sigma_{ii}(\tau) - {}^1\!/_3\,\sigma(\tau)]\,d\tau + f_2(t) \tag{6.5}$$

(по i не суммировать)

$$f_2(t) = C_3\left[m_i^2(t) - \frac{1}{3}\right]\sigma_{22}^{\circ}(t) + C_2\left[n_i^2(t) - \frac{1}{3}\right]\sigma_{33}^{\circ}(t) + \\ + \int_{-\infty}^{t} \left\{D_3(t-\tau)\left[m_i^2(\tau) - \frac{1}{3}\right]\sigma_{22}^{\circ}(\tau) + D_2(t-\tau)\left[n_i^2(\tau) - \frac{1}{3}\right]\sigma_{33}^{\circ}(\tau)\right\}d\tau \tag{6.6}$$

Интегральное уравнение (6.5) с учетом (6.3), решая относительно напряжений $\sigma_{ii}(t)$, получим (по i не суммировать)

$$\sigma_{ii}(t) = \frac{e_{ii}(t) - {}^1\!/_3\, e(t) - f_2(t)}{a_{11} - a_{12}} - \int_{-\infty}^{t} \Gamma_2(t-\tau)\Big[e_{ii}(\tau) - \\ - \frac{1}{3}e(\tau) - f_2(\tau)\Big]d\tau + \frac{e(t) - f_1(t)}{3(a_{11} + 2a_{12})} - \\ - \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{t} \Gamma_1(t-\tau)[e(\tau) - f_1(\tau)]\,d\tau \tag{6.7}$$

где $\Gamma_2(t-\tau)$ — резольвента ядра интегрального уравнения (6.5) с ядром $[b_{11}(t-\tau) - b_{12}(t-\tau)]$.

Решая интегральное уравнение (4.9) относительно напряжений $\sigma_{ij}(t)$, когда $i \neq j$, получим

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{e_{ij}(t) - f_3(t)}{a_{11} - a_{12}} - \int_{-\infty}^{t} \Gamma_2(t-\tau)\left[e_{ij}(\tau) - f_3(\tau)\right] d\tau \tag{6.8}$$

$$f_3(t) = C_3 m_i(t) m_j(t) \sigma_{22}{}^\circ(t) + C_2 n_i(t) n_j(t) \sigma_{33}{}^\circ(t) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{t} \left[D_3(t-\tau) m_i(\tau) m_j(\tau) \sigma_{22}{}^\circ(\tau) + D_2(t-\tau) n_i(\tau) n_j(\tau) \sigma_{33}{}^\circ(\tau)\right] d\tau \tag{6.9}$$

Во всех приведенных выше формулах для напряжений (6.3), (6.7), (6.8) содержатся представления $f_i(t)$, которые характеризуют разносопротивляемость рассматриваемого тела, в частности для классического упруго-наследственного тела, равны нулю ($C_3 = C_2 = 0$, $D_3(t-\tau) = D_2(t-\tau) = 0$). В эти представления входят главные напряжения $\sigma_{22}{}^0(t)$, $\sigma_{33}{}^0(t)$ и направляющие косинусы главных направлений, которые через деформации могут быть представлены лишь после решения системы интегральных уравнений (3.1) и совместного решения систем уравнений (4.1), (4.3), (4.4), относительно направляющих косинусов. В общем случае эта процедура весьма громоздкая и нет возможности здесь ее приводить. Эти вопросы в частном случае разномодульного тела освещены, например, в работах [1-4].

7. Для решения задач наследственно-упругого тела в напряжениях будем исходить из уравнений неразрывности деформаций, которые имеют вид [22]

$$e_{is,jk} + e_{jk,is} - e_{ik,js} - e_{js,ik} = 0 \tag{7.1}$$

Введем обозначения для линейных операторов [7]

$$L_{sp}(q) = A_{sp} q(t) + \int_{-\infty}^{t} B_{sp}(t-\tau) q(\tau) d\tau$$

$$N_k\left[q_i q_j \sigma_{rr}{}^\circ\right] = C_k q_i(t) q_j(t) \sigma_{rr}{}^\circ(t) + \int_{-\infty}^{t} D_k(t-\tau) q_i(\tau) q_j(\tau) \sigma_{rr}{}^\circ(\tau) d\tau \tag{7.2}$$

Согласно (7.2), выражения деформаций (4.9) перепишутся следующим образом:

$$e_{ij}(t) = L_{11}(\sigma_{ij}) + \delta_{ij} L_{13}(\sigma) + N_3\left[m_i m_j \sigma_{22}{}^\circ\right] + N_2\left[n_i n_j \sigma_{33}{}^\circ\right] \tag{7.3}$$

Подставляя значения e_{ij} из (7.3) в уравнения (7.1), получим следующую систему шести уравнений относительно искомых напряжений σ_{ij}

$$\begin{gathered} L_{11}(\sigma_{is,jk} + \sigma_{jk,is} - \sigma_{ik,js} - \sigma_{js,ik}) + L_{12}(\delta_{is}\sigma_{,jk} + \\ + \delta_{jk}\sigma_{,is} - \delta_{ik}\sigma_{,js} - \delta_{js}\sigma_{,ik}) + N_3\left[(m_i m_s \sigma_{22}{}^\circ)_{,jk} + \right. \\ + (m_j m_k \sigma_{22}{}^\circ)_{,is} - (m_i m_k \sigma_{22}{}^\circ)_{,js} - \left.(m_j m_s \sigma_{22}{}^\circ)_{,ik}\right] + \\ + N_2\left[(n_i n_s \sigma_{33}{}^\circ)_{,jk} + (n_j n_k \sigma_{33}{}^\circ)_{,is} - (n_i n_k \sigma_{33}{}^\circ)_{,is} - (n_j n_s \sigma_{33}{}^\circ)_{,ik}\right] = 0 \end{gathered} \tag{7.4}$$

К системе уравнений (7.4) должны быть присоединены граничные условия, которые имеют обычный вид [12]

$$X_i{}^* = \sigma_{ij} n^i \tag{7.5}$$

где $X_i{}^*$ — компоненты поверхностной нагрузки, n^i — компоненты единичной нормали к поверхности.

Решение системы интегро-дифференциальных уравнений (7.4), в общем случае, сопряжено с большими трудностями. Однако, как нетрудно заметить, в областях первого рода и в случае, когда в исходной системе координат x_i отсутствуют касательные напряжения, система уравнений (7.4) упрощается и получает структуру соответствующих классических уравнений.

8. Исходные уравнения теории наследственно-упругого тела в перемещениях можно записать исходя из уравнений равновесия, которые в исходной системе координат имеют вид [12]

$$\sigma_{ij,\,j} + \rho X_i = 0 \tag{8.1}$$

где ρX_i — компоненты объемной силы.

Введем следующие линейные операторы [7]

$$\begin{gathered} R(q) = \frac{q(t)}{a_{11} - a_{12}} - \int\limits_{-\infty}^{t} \Gamma_2(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau \\ Q(q) = \frac{q(t)}{3(a_{11} + 2a_{12})} - \frac{1}{3} \int\limits_{-\infty}^{t} \Gamma_1(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau \end{gathered} \tag{8.2}$$

для напряжений σ_{ij}, согласно (6.7), (6.8), получим

$$\sigma_{ij}(t) = R\left(e_{ij} - {}^1/_3\,\delta_{ij} e\right) + \delta_{ij} Q(e) - R\left[\delta_{ij} f_2 + (1 - \delta_{ij}) f_3\right] - \delta_{ij} Q(f_1) \tag{8.3}$$

Значения σ_{ij} из (8.3), подставляя в уравнение равновесия и учитывая, что

$$e_{ij} = {}^1/_2\left(u_{i,\,j} + u_{j,\,i}\right), \qquad e = u_{k,\,k}, \qquad \delta_{ij} u_{k,\,kj} = u_{j,\,ij} \tag{8.4}$$

получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений, относительно искомых перемещений:

$$\begin{gathered} R\left({}^1/_2\,u_{i,\,jj} + {}^1/_6\,u_{j,\,ij}\right) + Q\left(u_{j,\,ij}\right) - R\left[\delta_{ij} f_{2,\,j} + \right. \\ \left. + (1 - \delta_{ij}) f_{3,\,j}\right] - Q\left(\delta_{ij} f_{1,\,j}\right) + \rho X_i = 0 \end{gathered} \tag{8.5}$$

Из системы уравнений (8.5), исключая члены, которые содержат величины, характеризующие разносопротивляемость тела, т. е. члены с f_i, получим соответствующие уравнения обычной теории.

Решение системы уравнений (8.5), как системы (7.4), представляет сложную задачу даже в случае классической теории. Однако в некоторых частных случаях они могут быть решены и в случае разносопротивляющегося тела.

9. Пусть механические характеристики рассматриваемого тела таковы, что между линейными операторами наследственно-упругого тела существуют следующие зависимости:

$$L_{sp}(q) = \frac{A_{sp}}{C_k} N_k\left[q_i q_j \sigma_{rr}{}^\circ\right], \qquad R(q) = \frac{3(a_{11} + 2a_{12})}{a_{11} - a_{12}}\, Q(q) \tag{9.1}$$

в силу которых, согласно (8.2) и (9.2), легко получить

$$L_{sp}(q) = A_{sp}M_{sp}(q), \quad R(q) = \frac{P(q)}{a_{11} + a_{12}} \tag{9.2}$$

$$N_k[q_i q_j \sigma_{rr}^{\circ}] = C_k M_k(q), \quad Q(q) = \frac{P(q)}{3(a_{11} + 2a_{12})}$$

где

$$M(q) = M_{sp}(q) = M_k(q) = q(t) + \frac{1}{A_{sp}} \int_{-\infty}^{t} B_{sp}(t-\tau) q(\tau) d\tau =$$

$$= q_i(t) q_j(t) \sigma_{rr}^{\circ}(t) + \frac{1}{C_k} \int_{-\infty}^{t} D_k(t-\tau) q_i(\tau) q_j(\tau) \sigma_{rr}^{\circ}(\tau) d\tau$$

$$P(q) = q(t) - (a_{11} - a_{12}) \int_{-\infty}^{t} \Gamma_2(t-\tau) q(\tau) d\tau = \tag{9.3}$$

$$= q(t) - (a_{11} + 2a_{12}) \int_{-\infty}^{t} \Gamma_1(t-\tau) q(\tau) d\tau$$

Учитывая (9.1), (9.2), разрешающие системы уравнений (7.4) и (7.5) перепишутся следующим образом:

$$M\{A_{11}(\sigma_{is,jk} + \sigma_{jk,is} - \sigma_{ik,js} - \sigma_{js,ik}) +$$

$$+ A_{12}(\delta_{is}\sigma_{,jk} + \delta_{jk}\sigma_{,is} - \delta_{ik}\sigma_{,js} - \delta_{js}\sigma_{,ik}) + C_3[(m_i m_j \sigma_{22}^{\circ})_{,jk} +$$

$$+ (m_j m_k \sigma_{22}^{\circ})_{,is} - (m_i m_k \sigma_{22}^{\circ})_{,is} - (m_j m_s \sigma_{22}^{\circ})_{,ik}] +$$

$$+ C_2[(n_i n_s \sigma_{33}^{\circ})_{,jk} + (n_j n_k \sigma_{33}^{\circ})_{,is} - (n_i n_k \sigma_{33}^{\circ})_{,is} - (n_j n_s \sigma_{33}^{\circ})_{,ik}]\} = 0 \tag{9.4}$$

и, наконец

$$P\left\{\frac{1}{a_{11} - a_{12}}\left(\frac{1}{2} u_{i,jj} + \frac{1}{6} u_{j,ij}\right) + \frac{1}{3(a_{11} + 2a_{12})}(u_{j,ij}) -\right.$$

$$- \frac{1}{a_{11} - a_{12}}[\delta_{ij} f_{2,j} + (1 - \delta_{ij}) f_{3,j}] -$$

$$\left.- \frac{1}{3(a_{11} + 2a_{12})}(\delta_{ij} f_{1,j})\right\} + \rho X_i = 0 \tag{9.5}$$

Рассматривая системы уравнений (9.4) и (9.5), замечаем, что в обеих системах уравнений в больших скобках записаны соответствующие уравнения разномодульной теории упругости [1]. Множителями этих уравнений являются линейные операторы $M(q)$ и $P(q)$, которые характеризуют наследственно-упругие свойства рассматриваемого тела.

Таким образом, если в областях второго рода разносопротивляющегося тела имеют место условия (9.1), то при рассмотрении напряженно-деформированного состояния можно пользоваться методами разномодульной теории упругости. Значит, при соблюдении условий (9.1), для некоторого класса задач [5,7], теоремы Н. Х. Арутюняна будут справедливы и для разносопротивляющихся тел. Что же касается областей первого рода, то здесь исходные уравнения будут иметь обычную структуру с соответствующими механическими характеристиками (E^+, ν^+, μ^+, K^+ или E^-, ν^-, μ^-, K^-), и теоремы Арутюняна будут приемлемы в классической формулировке [5].

10. Особое место в исследованиях по механике наследственно-упругих тел зани мают вопросы аппроксимации экспериментальных кривых деформации при помощ какой-либо функции времени [5–7].

Этот вопрос здесь не обсуждается, так как известные приемы, применяемые дл этой цели в обычной теории [5–7], полностью приемлемы и в случае разносопротивляю щихся тел. Имея кривые деформации во времени при чистом растяжении и сжати [13–16], обычным образом могут быть найдены соответствующие аналитические пред ставления.

Поступила 19 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упру гости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж МТТ, 1966, № 2.
2. Амбарцумян С. А. Уравнения плоской задачи разносопротивляющей ил разномодульной теории упругости. Изв. АН АрмССР. Механика, 1966, т. 19, № 2
3. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. К разномодульной теории упру гости. Инж. ж. МТТ, 1966, № 6.
4. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. К вопросу теории упругости раз номодульного материала. Докл. АН АрмССР, 1969, т. 48, № 4.
5. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.— Л., Гостехиз дат, 1952.
6. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
7. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М., Стройиздат, 1968.
8. Mazin J., Jon Han Pao. A theory for combined creep strainstress relation for materials with different properties in tension and compression. Proceed. First U National Congr. Appl. Mech., N. Y., ASME, 1952.
9. Вялов С. С. Прочность и ползучесть материалов, неодинаково сопротивляю щихся сжатию и растяжению. Сб. «Реологические вопросы горных пород», Алма Ата, Изд-во, АН КазССР, 1964.
10. Матченко Н. М., Толоконников Л. А. О связи между напряжениям и деформациями в разномодульных изотропных средах. Инж. ж. МТТ, 1968, № 6.
11. Задоян М. А. О вариационных уравнениях теории ползучести. Докл. АН АрмССР, 1958, т. 26, № 5.
12. Green A. E., Zerna W. Theoretical Elasticity. Oxford, Clarendon press, 1954
13. Васильев П. И. Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. Изв Всес. н.-и. ин-та гидротехники им. Б. Е. Веденеева, 1953, т. 49.
14. Прокопович И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и де формированное состояние сооружений. М., Госстройиздат, 1963.
15. Карапетян К. С. Влияние масштабного фактора на ползучесть бетона пр сжатии и растяжении. Докл. АН Арм.ССР, 1964, т. 38, № 3.
16. Смирнова М. К., Соколов Б. П., Сидарин Я. С., Иванов А. П Прочность корпуса судна из стеклопластика, Л., «Судостроение», 1965.