

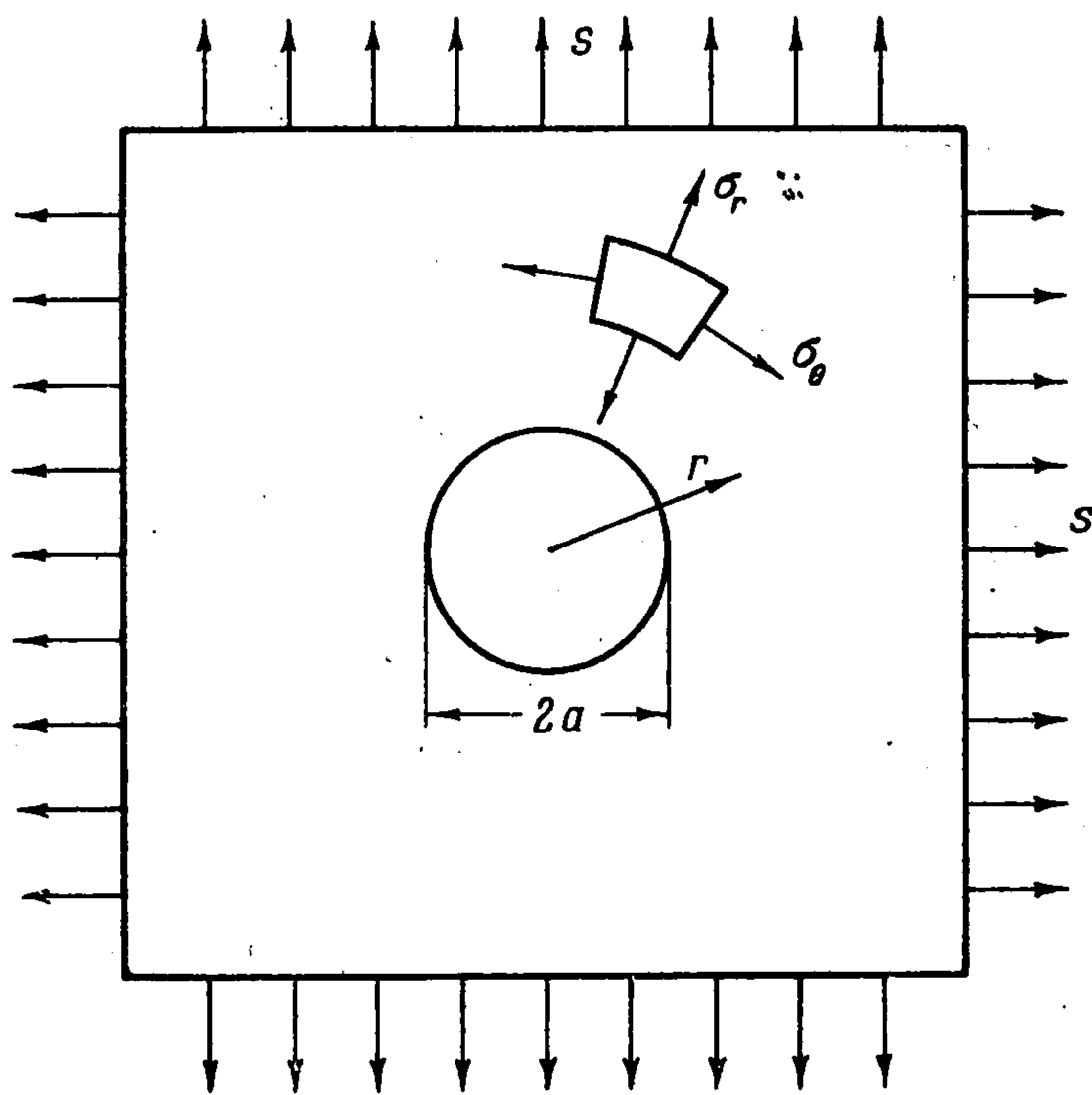
ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ¹

Б. Будянский

(США)

Найдено точное решение упруго-пластической задачи о растяжении пластинки с круговым вырезом, испытывающей на бесконечности одинаковое растяжение в двух направлениях. Пластинка ортотропна, но изотропна в своей плоскости. Решение, полученное на основании деформационной теории типа I_2 совместно с модифицированным законом Рамберга — Осгуда, справедливо также и для теории течения.

В 1946 г. А. А. Ильюшин [1] доказал теорему о достаточных условиях линейной зависимости напряжений от нагрузок в краевой задаче теории пластичности. Предположим, что повсюду на границах заданы нагрузки определенного вида, величина



Фиг. 1

которых монотонно возрастает. А. А. Ильюшин заметил, что напряжения в теле линейно изменяются в зависимости от величины нагрузки, если задача решается на основании простой деформационной теории пластичности I_2 с использованием степенного закона упрочнения $\epsilon = k\sigma^n$. При этих условиях решение также будет справедливым для теории течения I_2 , потому что «пропорциональное нагружение», т. е. постоянное отношение компонентов напряжения, будет осуществляться в любой точке. Можно заметить, что в задаче о концентрации напряжений коэффициент концентрации напряжений не будет зависеть от величины нагрузок; он будет зависеть только от показателя n степени упрочнения.

Очевидно, что степенной закон больше соответствует жестко-пластическому, чем упруго-пластическому материалу,

который описывается одноосным соотношением $\epsilon = \sigma E^{-1} + k\sigma^n$ Рамберга — Осгуда. В этом последнем случае при возрастании нагрузки коэффициент концентрации напряжений должен изменяться от своей упругой величины, приближаясь к величине, полученной на основании степенного закона. Так как нет оснований ожидать пропорционального нагружения внутри тела, то, следовательно, можно предполагать, что теория течения I_2 и деформационная теория должны давать различные результаты.

Отметим, что задача о плоском напряженном состоянии в бесконечной пластинке с круглым отверстием, подверженной равновесному двухосному растяжению s на бесконечности (фиг. 1), изучалась в [2] на основании деформационной теории I_2 и закона Рамберга — Осгуда; при этом использовался удобный метод исключения пространственной переменной. Коэффициент концентрации напряжений у отверстия $K = \sigma_\theta / s$

¹ Статья представлена в связи с 60-летием со дня рождения А. А. Ильюшина.

находился аналитически для степенного закона, соответствующего $s \rightarrow \infty$; переход от упругой величины $k = 2$ к предельной величине, отвечающей степенному закону, определялся численно. Как и ожидалось, пропорциональное нагружение не имело места внутри пластинки.

Данная работа является продолжением работы [2]. Воспользуемся несколько видоизмененным соотношением Рамберга — Осгуда

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{для } |\sigma| \leq \sigma_y, \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left| \frac{\sigma}{\sigma_y} \right|^{n-1} \quad \text{для } |\sigma| \geq \sigma_y \quad (1)$$

Оказывается, что при этом можно найти точное аналитическое решение для k во всей области значений s на основании деформационной теории I_2 . На эту возможность обратил внимание около десяти лет назад Ж. М. Хеджес; это было подтверждено проведенными в то время вычислениями О. М. Мангасариана и автора.

Кроме того, как будет показано, решение в этом случае также будет точным и для теории течения I_2 . Этот результат объясняется тем, что нарушение пропорциональности нагружения имеет место только при значениях напряжений, соответствующих упругой области.

Задача [2] обобщается в настоящей работе на материалы, которые являются ортотропными, но остаются изотропными в плоскости пластинки [3]. При использовании соответствующим образом измененного упруго-пластического соотношения между напряжениями и деформациями типа I_2 получаются точные решения для всей области значений s , причем вновь имеет место совпадение решений по теории течения и деформационной теории.

Для случая степенного закона эта ортотропная задача была ранее решена В. Янгом [4], который использовал тот же метод исключения пространственной переменной, что и в работах [2,3].

Рассмотрим связь между напряжениями и деформациями. Пластическая ортотропия пластинки условно характеризуется параметром R , определяемым на основании одноосного, внутриплоскостного растяжения в виде отношения поперечной пластической деформации в плоскости пластинки к пластической деформации по ее толщине. В данной задаче плоского напряженного состояния учитываются только радиальное напряжение σ_r и окружное напряжение σ_θ . Соответствующие скорости пластической деформации ε_r^p и ε_θ^p получаются на основании обобщенной теории течения Хилла [5] в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^p &= \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right) \left(\sigma_r - \frac{R}{1+R} \sigma_\theta \right) \left(\frac{\sigma}{\sigma} \right) \\ \varepsilon_\theta^p &= \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right) \left(\sigma_\theta - \frac{R}{1+R} \sigma_r \right) \left(\frac{\sigma}{\sigma} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sigma = \left(\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \frac{2R}{1+R} \sigma_r \sigma_\theta \right)^{1/2} \quad (3)$$

Здесь σ — эффективное напряжение, E_t — касательный модуль на одноосной кривой напряжения-деформации при значении напряжения σ .

Начальная поверхность текучести определяется эллипсом $\sigma = \sigma_y$. В случае пропорционального нагружения уравнения (2) могут быть проинтегрированы и приводят к соотношениям деформационной теории

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^p &= \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \left(\sigma_r - \frac{R}{1+R} \sigma_\theta \right) \\ \varepsilon_\theta^p &= \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \left(\sigma_\theta - \frac{R}{1+R} \sigma_r \right)\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь E_s — секущий модуль на одноосной кривой напряжение-деформация при напряжении σ . Заметим, что интегрирование справедливо до тех пор, пока σ_r и σ_θ соответствуют радиальной линии, проходящей через начало координат в пространстве напряжений, если $\sigma \geq \sigma_y$; но это не имеет значения, если путь нагружения есть кривая, для которой σ_r и σ_θ находятся внутри начальной поверхности текучести.

Упругие деформации будут иметь вид

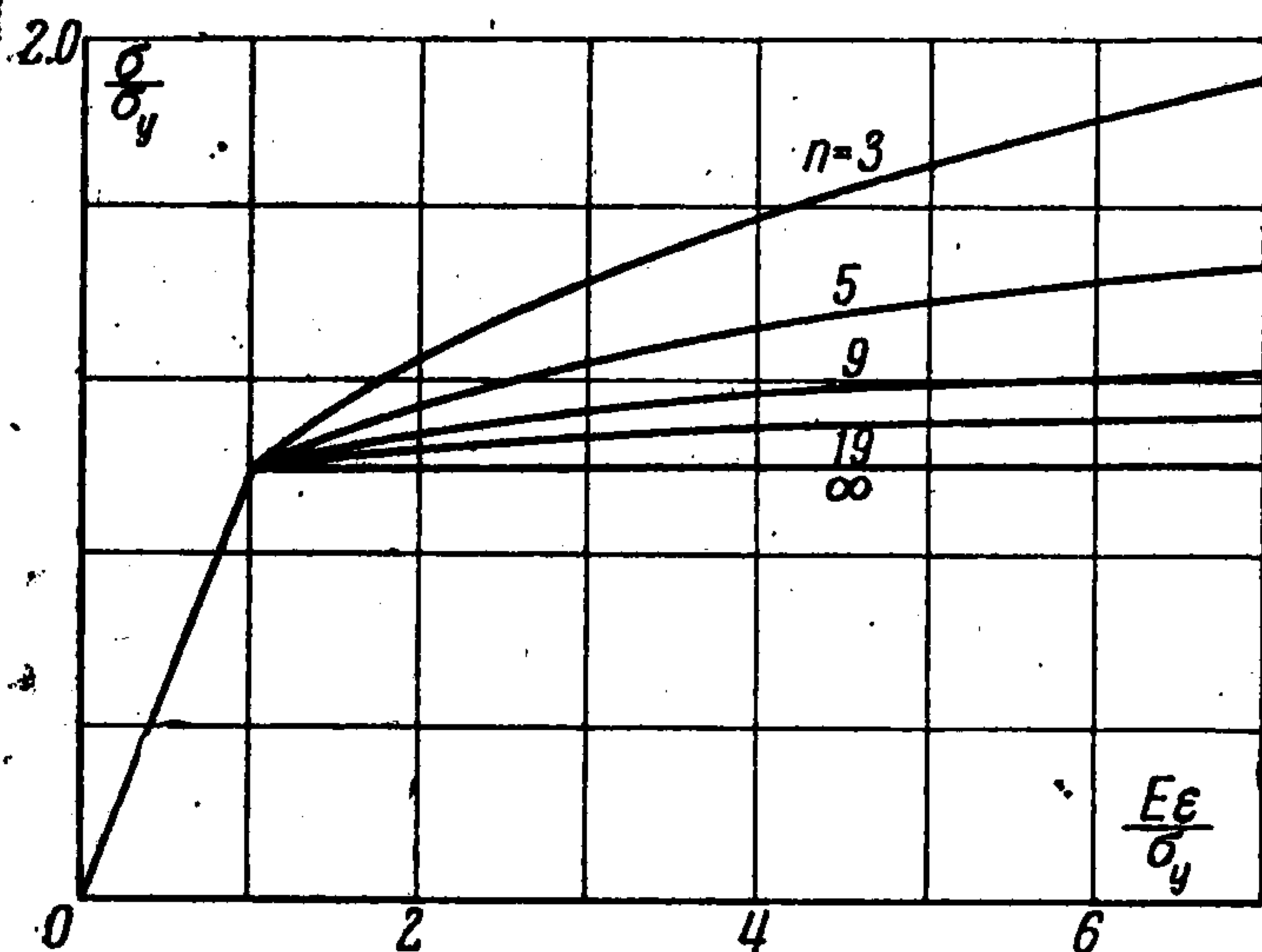
$$\varepsilon_r^E = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta^E = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \quad (5)$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона в плоскости пластинки. Воспользуемся теоремой Мичелла [6], которая утверждает, что напряжения в данной задаче не зависят от коэффициента ν .

Полагая $\nu = R / (1 + R)$, получим из (4) и (5) общие деформации

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \varepsilon_r^E + \varepsilon_r^p = \frac{1}{E_s} \left(\sigma_r - \frac{R}{1+R} \sigma_\theta \right) \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^E + \varepsilon_\theta^p = \frac{1}{E_s} \left(\sigma_\theta - \frac{R}{1+R} \sigma_r \right)\end{aligned}\quad (6)$$

После того, как найдены напряжения с помощью (6), действительная деформация может быть вычислена из (4) и (5) с использованием точной величины коэффициента Пуассона.



Фиг. 2

Если использовать одноосное соотношение (1) для напряжений-деформаций, которое показано в безразмерном виде на фиг. 2 для различных величин n , то величина $(1/E_s)$ определяется через эффективное напряжение σ следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{1}{E_s} &= \frac{1}{E} \quad \text{для } \sigma \leq \sigma_y \\ \frac{1}{E_s} &= \frac{1}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^{n-1} \quad \text{для } \sigma \geq \sigma_y\end{aligned}\quad (7)$$

Рассмотрим краевую задачу и ее решение. Предположим, что на бесконечности $\sigma_r = \sigma_\theta = s$. На границе отверстия $r = a$ имеем $\sigma_r = 0$. В зависимости от величины параметра $\lambda = s / \sigma_y$ решение имеет различное выражение.

(1) Пусть $0 \leq \lambda \leq 1/2$.

Хорошо известное упругое решение для напряжений имеет вид

$$\sigma_{\theta} = s [1 + (a/r)^2], \quad \sigma_r = s [1 - (a/r)^2] \quad (8)$$

Легко проверить, что напряжение σ принимает наибольшее значение $2s$ при $r = a$, так что (8) справедливо для случая $s \leq 1/2 \sigma_y$, и коэффициент концентрации напряжения будет

$$K \equiv \sigma_{\theta}(a) / s = 2 \text{ для } \lambda \leq 1/2$$

(2) Пусть $1/2 \leq \lambda \leq \sqrt{1/2(1+R)}$. В этой области параметра λ эффективное напряжение σ меньше σ_y на бесконечности и поэтому напряжения остаются в упругой области для радиусов r , больших некоторой критической величины r_* , которая зависит от λ . В этой упругой области решение для напряжений может быть записано в форме

$$\sigma_{\theta} / \sigma_y = \lambda [1 + \beta (r_*/r)^2], \quad \sigma_r / \sigma_y = \lambda [1 - \beta (r_*/r)^2] \quad (9)$$

Здесь β — постоянная, зависящая от λ . При $r = r_*$ условия равновесия требуют непрерывности σ_r , а непрерывность радиального перемещения $u = r\epsilon_{\theta}$ предполагает непрерывность ϵ_{θ} . Из (6) следует, что напряжения σ_{θ} и σ также непрерывны, и поэтому напряжение σ , вычисленное из (9) при $r = r_*$, должно равняться σ_y . Отсюда

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1+2R}} \left(\frac{1+R}{2\lambda^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (10)$$

Остается определить r_* как функцию от λ .

В пластической области $r \leq r_*$ решение получается следующим образом. Объединяя (см. [2]) уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_{\theta}) = 0 \quad (11)$$

и уравнение совместности

$$d\epsilon_{\theta}/dr + (\epsilon_{\theta} - \epsilon_r)/r = 0 \quad (12)$$

получим

$$\frac{d\sigma_r}{\sigma_{\theta} - \sigma_r} = \frac{d\epsilon_{\theta}}{\epsilon_r - \epsilon_{\theta}} \quad (13)$$

Последнее выражение не содержит r . Введение связи между напряжениями и деформациями (6) приводит к выражению [3]

$$\left(\frac{1}{E} \right)_s^{-1} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{E_s} \right) \left(\sigma_{\theta} - \frac{R}{1+R} \sigma_r \right) d\sigma + d(\sigma_{\theta} + \sigma_r) = 0 \quad (14)$$

Подстановка

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} &= \frac{\sigma}{2} \sqrt{2+2R} \left(\cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{1+2R}} \sin \alpha \right) \\ \sigma_r &= \frac{\sigma}{2} \sqrt{2+2R} \left(\cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{1+2R}} \sin \alpha \right) \end{aligned} \quad (15)$$

тождественно удовлетворяет соотношению (3), а кроме того, учитывая, что согласно (7) имеет место равенство

$$\left(\frac{1}{E_s}\right)^{-1} \sigma \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{E_s}\right) = n - 1 \quad (\sigma \geq \sigma_y)$$

эта подстановка позволяет соотношение (14) в пластической области привести к виду

$$\begin{aligned} [(n + 1 + 2R) \cos \alpha + (n - 1) \sqrt{1 + 2R} \sin \alpha] d\sigma = \\ = (2 + 2R) \sigma \sin \alpha d\alpha \end{aligned} \quad (16)$$

При $r = r_*$ параметр α равняется величине α_* , которая определяется из условия, что выражения (15) при $\sigma = \sigma_y$ согласуются с (9). Таким образом, имеем

$$\alpha_* = \arctg \sqrt{\frac{1}{2}(1 + R)\lambda^{-2} - 1} \quad (17)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (16) с начальным условием $\sigma = \sigma_y$ при $\alpha = \alpha_*$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\sigma_y} = & \left(\frac{n + 1 + 2R + (n - 1) \sqrt{1 + 2R} \sqrt{\frac{1}{2}(1 + R)\lambda^{-2} - 1}}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 + R)\lambda^{-2}} [(n + 1 + 2R) \cos \alpha + (n - 1) \sqrt{1 + 2R} \sin \alpha]} \right)^\mu \times \\ & \times \exp \left(\frac{(n - 1) \sqrt{1 + 2R}}{n^2 + 1 + 2R} (\alpha - \alpha_*) \right) \quad \left(\mu = \frac{n + 1 + 2R}{n^2 + 1 + 2R} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

На границе отверстия $\sigma_r = 0$. Используя это условие и соотношение (15), находим выражение для α на границе отверстия

$$\alpha_a = \arctg \sqrt{1 + 2R} \quad (19)$$

Следовательно, для $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \sqrt{\frac{1}{2}(1 + R)}$ коэффициент концентрации напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{(n + 1 + 2R) + (n - 1) \sqrt{1 + 2R} \sqrt{\frac{1}{2}(1 + R)\lambda^{-2} - 1}}{n(1 + R)\lambda^{-1}} \right)^\mu \times \\ \times \exp \left(\frac{(n - 1) \sqrt{1 + 2R}}{n^2 + 1 + 2R} (\alpha_a - \alpha_*) \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Объединение (18) и (20) дает альтернативное выражение для σ в форме

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} = \lambda K \left(\frac{n \sqrt{2 + 2R}}{(n + 1 + 2R) \cos \alpha + (n - 1) \sqrt{1 + 2R} \sin \alpha} \right)^\mu \exp \left(\frac{(n - 1) \sqrt{1 + 2R}}{n^2 + 1 + 2R} (\alpha - \alpha_a) \right) \quad (21)$$

Напряжения в пластической области определяются выражениями (15) при $\alpha_* \leq \alpha \leq \alpha_a$. Значение σ определяем по формуле (21). Чтобы найти пространственное распределение напряжений, нужно связать величины r и α в области $r_* \geq r \geq a$.

Из уравнения равновесия (11) при использовании (15) получаем

$$\frac{2dr}{r} = -\sqrt{1+2R} d\alpha - \frac{d \sin \alpha}{\sin \alpha} + [\sqrt{1+2R} \operatorname{ctg} \alpha - 1] \frac{d\sigma}{\sigma}$$

Исключая $\sigma^{-1}d\sigma$ с помощью (16), получим дифференциальное уравнение первого порядка для величин r и α , которое может быть проинтегрировано при начальных условиях $\alpha = \alpha_a$ при $r = a$. В результате получим

$$\frac{r}{a} = \left(\frac{1+2R}{2+2R}\right)^{1/4} (\operatorname{csc} \alpha)^{1/2} \left(\frac{(n+1+2R) \cos \alpha + (n-1)\sqrt{1+2R} \sin \alpha}{n\sqrt{2+2R}}\right)^{\gamma} \times \quad (22)$$

$$\times \exp\left(\frac{(n^2-1)\sqrt{1+2R}}{2(n^2+1+2R)}(\alpha_a - \alpha)\right) \quad \left(\gamma = \frac{n(1+R)}{n^2+1+2R}\right)$$

Это соотношение справедливо для $\alpha_* \leq \alpha \leq \alpha_a$. Отметим, что r не зависит от λ . Это означает (см. (15)), что как только напряженное состояние в любой точке пластинки входит в пластическую зону, отношение σ_θ/σ_r становится постоянным. Другими словами, пропорциональное нагружение имеет место всюду при $\sigma \geq \sigma_y$.

Положение упруго-пластической границы находится из условия, что $\alpha = \alpha_*$ в (22), и определяется выражением

$$\frac{r_*}{a} = \left(\frac{1+2R}{2(1+R-2\lambda^2)}\right)^{1/4} \left(\frac{n+1+2R + (n-1)\sqrt{1+2R}\sqrt{1/2(1+R)\lambda^{-2}-1}}{n(1+R)\lambda^{-1}}\right)^{\gamma} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{(n^2-1)\sqrt{1+2R}}{2(n^2+1+2R)}(\alpha_a - \alpha_*)\right) \quad (1/2 \leq \lambda \leq \sqrt{1/2(1+R)}) \quad (23)$$

(3) Пусть $\lambda \geq \sqrt{1/2(1+R)}$. Напряжения находятся повсюду в пластической области и интегрирование (16) выполняется при начальном условии $\alpha = 0$, $\sigma = s\sqrt{2/(1+R)}$, что предполагает равенство $\sigma_\theta = \sigma_r = s$ на бесконечности. В результате получаем

$$\frac{\sigma}{s} = \sqrt{2/(1+R)} \left(\frac{n+1+2R}{(n+1+2R) \cos \alpha + (n-1)\sqrt{1+2R} \sin \alpha}\right)^{\mu} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{(n-1)\sqrt{1+2R}}{n^2+1+2R} \alpha\right) \quad (24)$$

Коэффициент K , найденный путем замены $\alpha = \alpha_a$ в (24), имеет вид

$$K = \sqrt{2/(1+R)} \left(\frac{n+1+2R}{n\sqrt{2+2R}}\right)^{\mu} \exp\left(\frac{(n-1)\sqrt{1+2R}}{n^2+1+2R} \alpha_a\right) \quad (25)$$

Для $R = 1$ это выражение совпадает с результатом, полученным при использовании степенного закона в [2].

Учитывая разницу в обозначениях, это выражение проверяет результат, полученный для произвольного R в работе [4] при использовании степенного закона.

Формула (22) для r остается справедливой, но при этом $r_* = \infty$.

Обсудим полученные результаты. Подводя итог, можно отметить, что коэффициент концентрации напряжений K , как функция от $\lambda = s / \sigma_y$, определяется следующими выражениями:

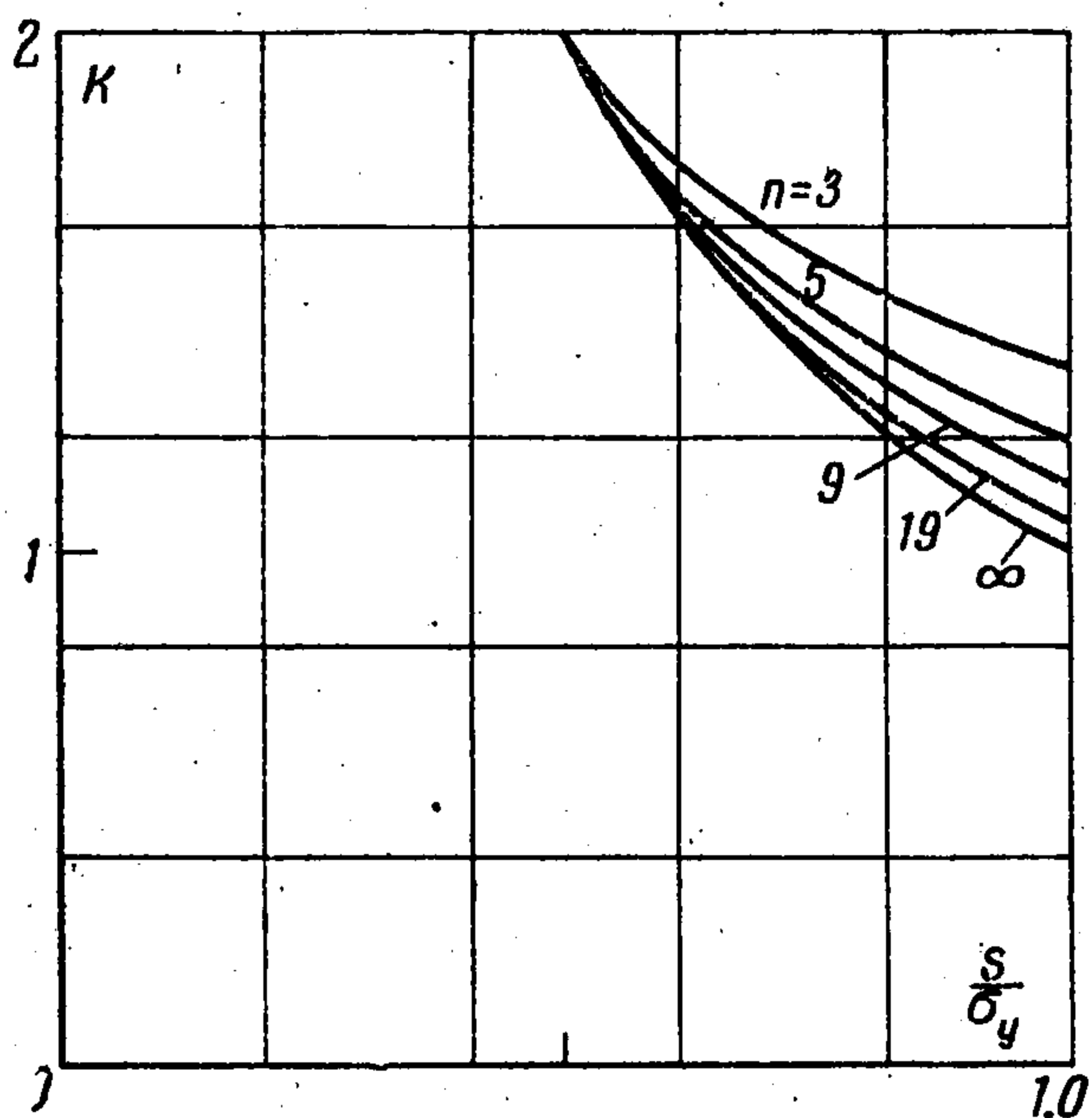
$$K = 2 \quad \text{для } \lambda \leq 1/2$$

$$\text{ур. (20) для } 1/2 \leq \lambda \leq (1/2 (1 + R))^{1/2}$$

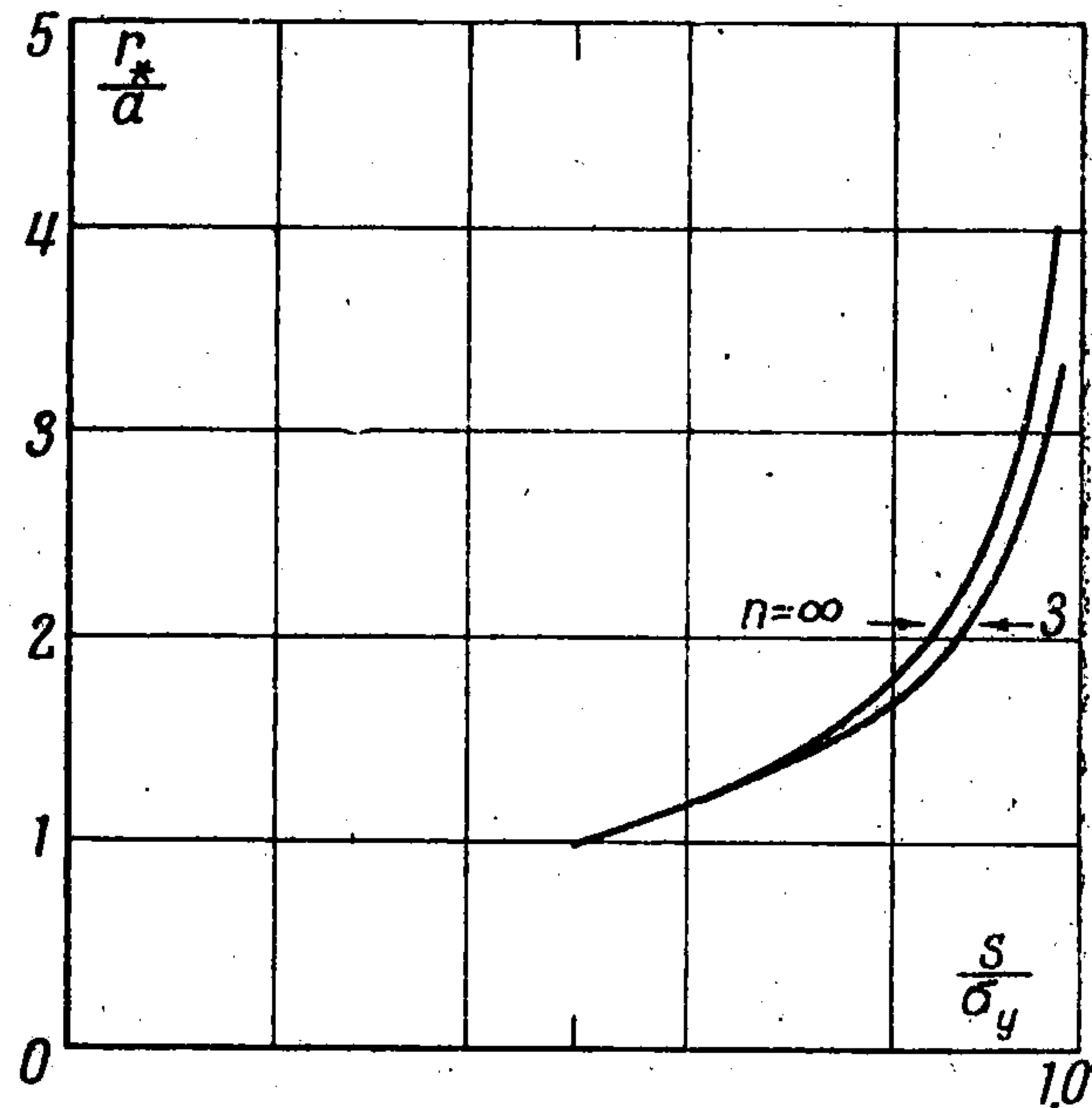
$$\text{ур. (25) для } \lambda \geq (1/2 (1 + R))^{1/2}$$

Для $R = 1$ эти результаты показаны на фиг. 3 при нескольких значениях n . Заметим, что для $n = \infty$, $K = 1 / \lambda$ при $\lambda > 1/2$, и кривая в координатах K, λ должна заканчиваться при значении $\lambda = 1$, так как приложенные напряжения на бесконечности не могут превышать s .

Вычисления показывают, что для $\lambda > 1/2$, K — медленно убывающая функция от R . Для $R = 1$ радиус r_* пластической области, определяемый выражением (23), показан на фиг. 4 как функция от λ для значений $n = 3$ и $n = \infty$. Очевидно, что r_* незначительно меняется с изменением n .



Фиг. 3

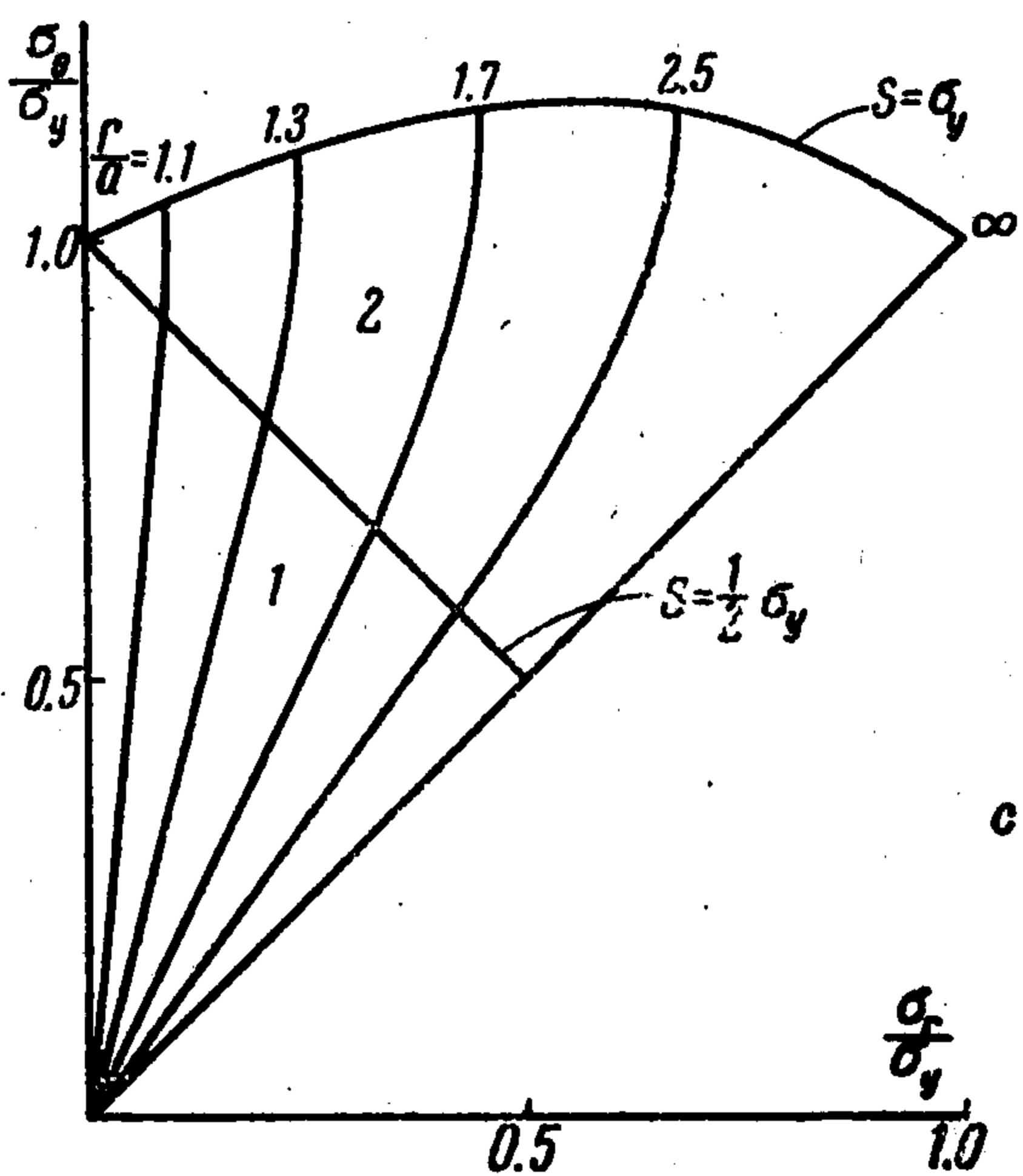
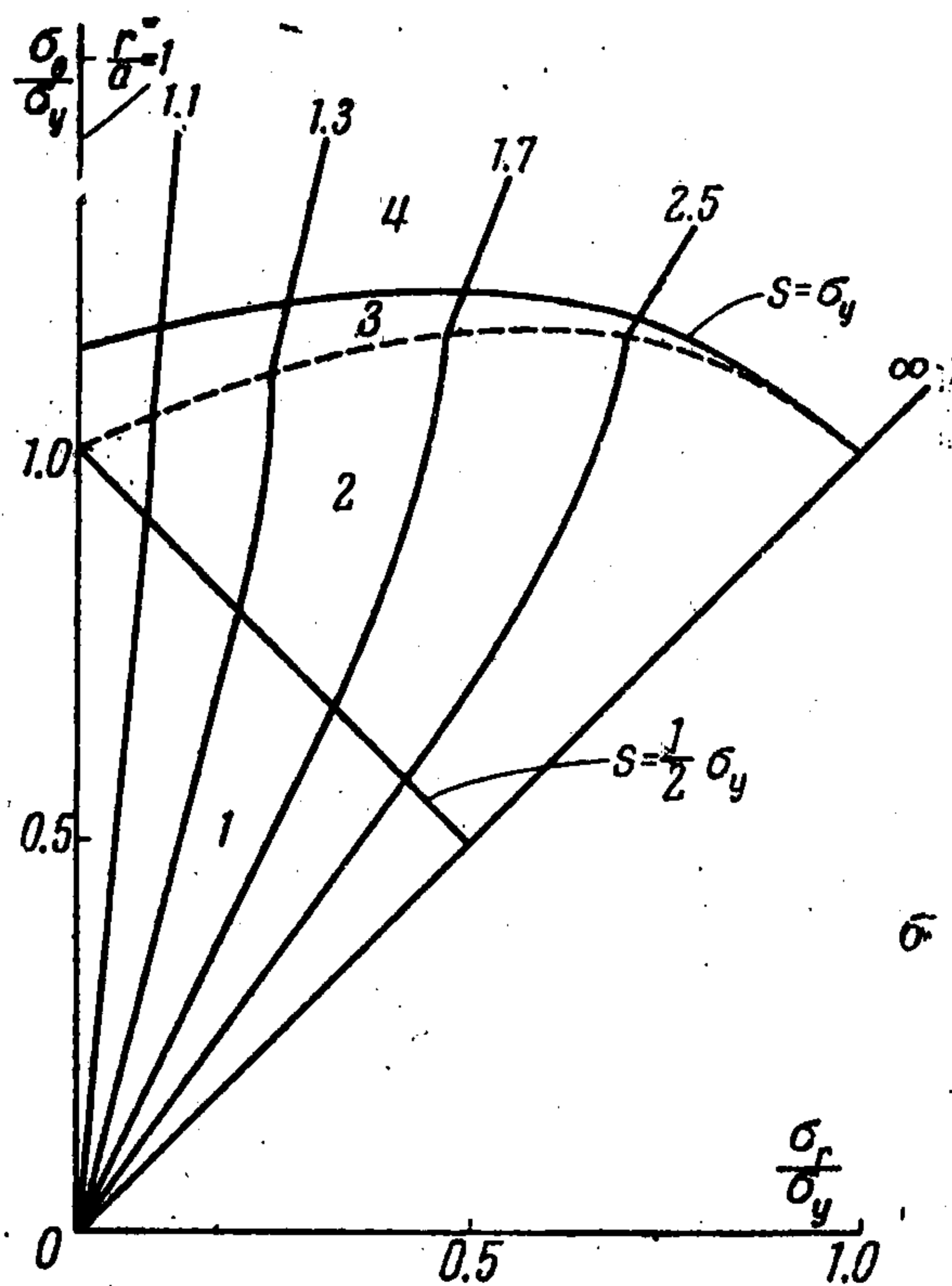
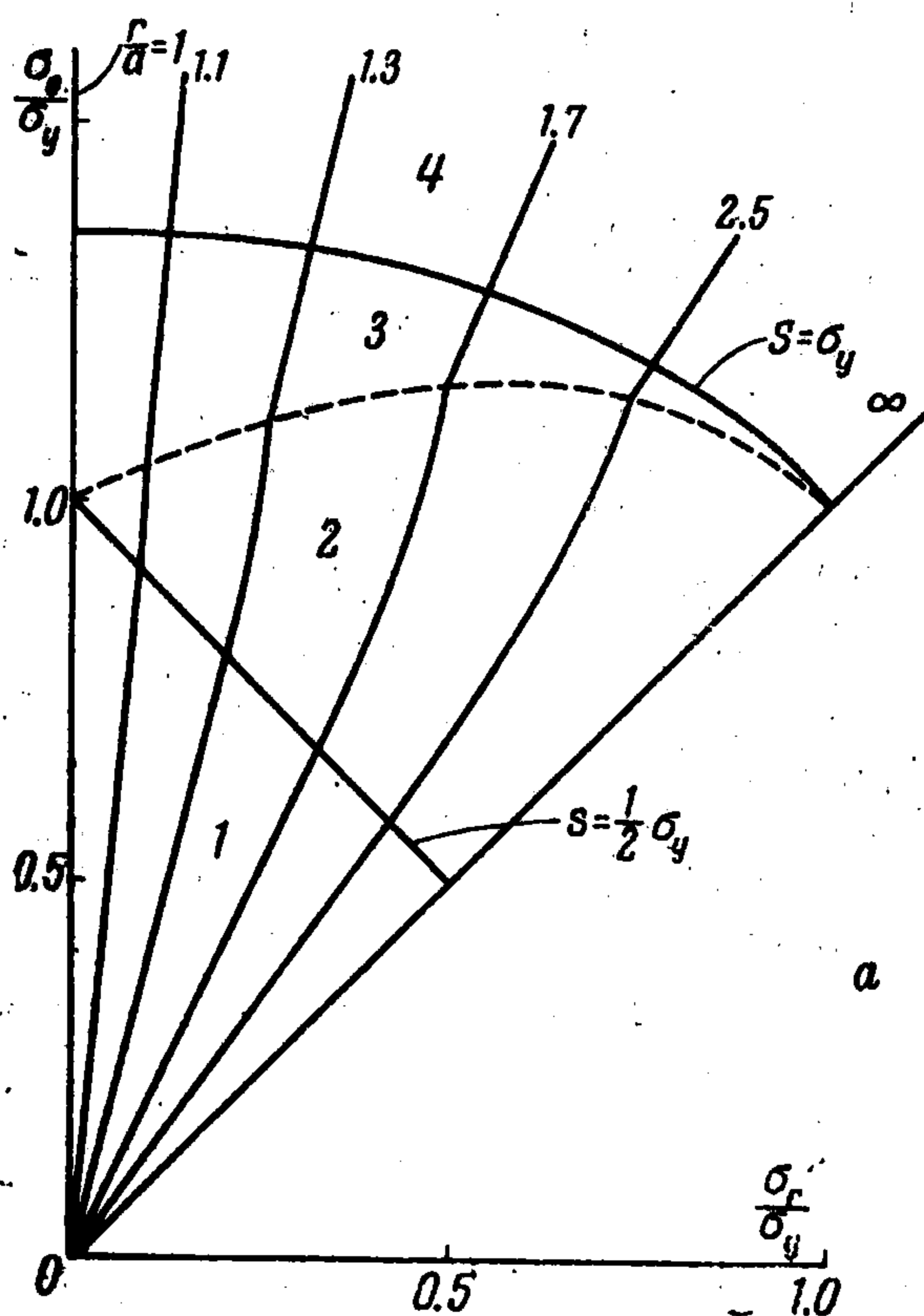


Фиг. 4

Интересно изучить историю нагружения при различных значениях r/a . На фиг. 5, а показано, каким образом для $R = 1$ и $n = 3$, при $r/a = 1, 1.1, 1.3, 1.7, 2.5$ и ∞ проявляются четыре режима. Вплоть до $s = 1/2 \sigma_y$ напряжения повсюду находятся в упругой области и пути радиального напряжения определяются уравнением (8). Начальный режим 1 на фиг. 3 ограничивается линией $\sigma_\theta / \sigma_y + \sigma_r / \sigma_y = 1$.

По мере дальнейшего возрастания s напряжения при любой данной величине r/a остаются упругими (в режиме 2) до тех пор, пока путь напряжения, определяемый теперь уравнением (9), пересекается с предельной поверхностью Мизеса, показанной на фиг. 5, а пунктирной линией. В режиме 2 пути напряжения для точек внутри пластинки изображаются кривыми линиями. В режиме 3 пластинка будет частично в пластическом состоянии и напряжения определяются выражениями (15), где α определяется

через отношение r/a из (22). В этом режиме нагрузка снова «пропорциональна», но величины напряжений линейно изменяются с изменением (λK). Это видно из уравнения (21). В этом случае напряжения являются нелинейными функциями от s . В режиме 4 пластинка повсюду находится в пластическом состоянии. Пути напряжения представляют собой продолжения радиальных путей режима 3, но теперь напряжения пропорциональны λ .



Фиг. 5 а, б, с

Наиболее существенным из всего этого является то, что полученные результаты точны и для I_2 теории течения и для I_2 деформационной теории, так как пропорциональность нагрузки имеет место в любой точке пластинки, если σ превышает σ_y .

Подобные пути напряжения приведены на фиг. 5, б для $R=1$, $n=9$, показывая, как уменьшается размер области режима 3 с увеличением n . На фиг. 5, с показаны пути напряжения для $n = \infty$. Здесь области режимов 3 и 4 сливаются с предельной поверхностью текучести Мизеса,

так как σ не может превышать σ_y . Во всех случаях пути напряжения имеют непрерывный наклон на поверхности раздела между областями режимов 1 и 2. В случае $n = \infty$ пути напряжения пересекают предельную поверхность с вертикальным наклоном для значений r/a в пределах $0 < r/a < < \infty$.

В заключение отметим, что подобные точные решения, относящиеся к I_2 теории деформации и специальным одноосным кривым напряжения-деформации, используемым здесь, могут быть применены к другим задачам с радиальной симметрией: радиальные напряжения приложены к отверстию, пластинка конечного радиуса и т. д. Однако справедливость данного решения одновременно для I_2 — теории течения и I_2 — теории деформации не обязательно выполняется в других случаях.

Поступила 21 X 1970

Гарвардский университет
Кембридж, Массачусетс

ЛИТЕРАТУРА

1. И л ь ю ш и н А. А. К теории малых упруго-пластических деформаций. ПММ, 1946, т. 10, вып. 3.
2. B u d i a n s k y B., M a n g a s a r i a n O. L. Plastic Stress Concentration at a Circular Hole in an Infinite Sheet Subject to Equal Biaxial Tension. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, No. 1, pp. 59—64.
3. B u d i a n s k y B., W a n g N. M. On the Swift Cup Test. J. Mech. and Phys. Solids, 1966, vol. 14, No. 6, pp. 357—374.
4. Y a n g W. H. Axisymmetric Plane Stress Problems in Anisotropic Plasticity. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1969, vol. 36, No. 1, pp. 7—14.
5. H i l l R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, Clarendon Press, 1950, chap. 12.
6. B u d i a n s k y B. Extension of Michell's Theorem to Problems of Plasticity and Creep. Quart. Appl. Math., 1958, vol. 16, No. 3, pp. 307—309.