Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ МЕРЫ ДЕФОРМАЦИИ И РАБОТЫ НА ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ МИКРОНЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ [1]

Р. Хилл

(Англия)

Изучаются макроскопические свойства произвольной упруго-пластической среды с неоднородной микроструктурой. Систематически пересмотрены и усилены результаты общей теории, предложенной Манделем и Хиллом. С этой точки зрения рассматривается постулат Ильюшина, касающийся затраты работы за цикл деформации.

1. Постановка. Макроскопические свойства упруго-пластической микронеоднородной среды типа композитных материалов или поликристаллы в общем виде изучались в работах Манделя [1], Хилла [2] и Райса [3]. Эти работы во многих отношениях отличаются, тем не менее можно выделить общую для них важную особенность: неоднородность микроскопических полей напряжений и деформаций учитывается полностью без дополнительной идеализации или допущений (не считая обычных предположений теории малых деформаций).

Некоторые дальнейшие результаты, достигнутые при таком подходе, излагаются ниже.

Они касаются в основном взаимоотношения и различий в определениях скорости пластической деформации и энергии рассеяния на макро- и микроскопическом уровнях.

Примем определение Хилла для характерного микрообъема (элемента объема) макроскопически однородной среды. К такому элементу применим принцип возможной работы и справедлива теорема о среднем, которая постоянно используется в общем анализе. Утверждается, что осреднение по общему объему скалярного произведения любой пары тензоров деформации и напряжения равняется произведению их осреднений при условии, что классические уравнения равновесия напряжений и совместности деформаций выполняются для характерного элемента и что соответствующие усилия и перемещения макроскопически однородны на поверхности элемента.

Эта теорема может быть записана кратко так

$$\{\sigma\varepsilon\} = \{\sigma\}\ \{\varepsilon\} \tag{1.1}$$

где $\{\cdot\cdot\}$ означает полное среднее, а σ и ε символически означают локальные напряжения и бесконечно малые деформации. Подобные равенства имеют место, конечно, когда какой-либо тензор заменен его дифференциалом или его скоростью изменения (перенос и эффекты вращения внут-

[1] Статья представлена в связи с 60-летием со дня рождения А. А. Ильюшина.

ри элемента не учитываются). Точный вывод и доказательство (1.1) даны Хиллом [2,4].

Пластическая составляющая локальной деформации часто определяется формально как

$$\varepsilon - M\sigma \tag{1.2}$$

где M (возможно анизотропный) — тензор четвертого порядка коэффициентов упругой податливости в данный момент деформирования. Однако (1.2) имеет практический смысл только для материалов, которые ведут себя упруго при разгрузке, причем при полном снятии напряжения пластическое течение не возобновляется. В связи с этим (и по другим причинам) более целесообразно рассматривать пластическую часть дифференциального приращения деформации

$$d\varepsilon - M d\sigma \tag{1.3}$$

В металлах, которые деформируются пластически за счет кристаллографического скольжения, M остается постоянным до тех пор, пока геометрия решетки не нарушена. Но, когда M изменяется, как это бывает в некоторых неметаллах, то

$$d\varepsilon - M d\sigma = d(\varepsilon - M\sigma) + (dM)\sigma \tag{1.4}$$

и тогда (1.2) и (1.3) должны различаться.

В соответствии с обычным уравнением состояния для упруго-пластических тел векторная величина левой части в уравнении (1.4) предполагается направленной по нормали к поверхности текучести в пространстве напряжения. Как было указано Ильюшиным [5] и доказано более широко Хиллом [6], это правило градиентальности удовлетворяет не только жесткому определению устойчивости материала по Друккеру, но и ослабленному постулату Ильюшина, согласно которому при пластическом деформировании в любом замкнутом цикле деформации затрачивается положительная работа. Наоборот, если M — переменно, то, как видно из (1.4), градиентальность $d(\varepsilon - M\sigma)$ к поверхности нагружения места не имеет (см. Ильюшин [7]).

Вместо (1.2) и (1.3) рассмотрим последовательно подобные им комбинации

$$\sigma - L\varepsilon, \qquad d\sigma - L d\varepsilon \tag{1.5}$$

Здесь L — тензор четвертого порядка упругих модулей. Очевидно, вторую разность можно интерпретировать как изменение напряжения после бесконечно малого цикла деформации, в котором начальное пластическое течение сменяется упругой разгрузкой. Равенству (1.4) соответствует следующее:

$$d\sigma - L d\varepsilon = d(\sigma - L\varepsilon) + (dL)\varepsilon \tag{1.6}$$

Поскольку матрицы L и M взаимно обратны, то альтернативное выражение для правой части будет иметь вид

$$-L(\varepsilon - M\sigma) + (dL)M\sigma$$

которое использовал Ильюшин [5] при обсуждении градиентальности к поверхности нагружения в пространстве деформации.

Удобно привести здесь тождество:

$$\sigma(\varepsilon - M\sigma) + \varepsilon(\sigma - L\varepsilon) \equiv (\sigma - L\varepsilon)(\varepsilon - M\sigma) \tag{1.7}$$

Совершенно аналогичные соотношения имеют место для дифференциалов напряжений и деформаций или скоростей их изменения.

Правая часть (1.7), очевидно, может быть записана в виде квадратичной формы с матрицами L или M соответственно

$$-(\sigma - L\varepsilon)M(\sigma - L\varepsilon), \quad \text{или} \quad -(\varepsilon - M\sigma)L(\varepsilon - M\sigma)$$

Величина (1.7), следовательно, всегда отрицательна для реальных материалов (или равна нулю, когда деформации идеально упругие).

2. Тензоры макроскопической среды. По определению макроскопические напряжения и деформации равны их осредненным по объему значениям:

$$\langle\sigma\rangle \equiv \{\sigma\}, \qquad \langle\varepsilon\rangle \equiv \{\varepsilon\} \tag{2.1}$$

Эти средние величины, обозначаемые в дальнейшем тупыми скобками, как хорошо известно, могут быть определены через поверхностные усилия на произвольных сечениях элемента и перемещения. С другой стороны, если материал упруго неоднороден, то

$$\langle L\rangle \neq \{L\}, \qquad \langle M\rangle \neq \{M\}$$

Выражения для средних значений макроскопических модулей и упругих податливостей могут быть получены следующим образом.

Пусть τ и η — тензоры микроскопических напряжений и деформаций в воображаемом всюду упругом состоянии тела. Предполагается существование микроскопического потенциала энергии, так что L и M — диагонально симметричны, когда их компоненты представляются обычным путем как квадратные матрицы девять на девять (например, см. [8]).

Пусть A и B — тензоры коэффициентов концентрации четвертого порядка, так что

$$\eta = A\,\langle\eta\rangle, \qquad \tau = B\,\langle\tau\rangle \tag{2.2}$$

для выбранного типа неоднородности. Тензоры A и B были предложены и широко использованы Хиллом [2,4]; тензор B был упомянут попутно также Манделем. Тензоры A и B в принципе суть однозначно определенные функции положения по всему характерному элементу (форма которого без потери общности может быть принята кубической). Чтобы быть точным, следует исключить пренебрежимо малый поверхностный слой, в котором проявляются локальные различия между разными макрооднородными граничными условиями, приводящими к одним и тем же осредненным напряжениям и деформациям. Тогда соотношения

$$\tau = L\eta,\ \langle\tau\rangle = \{L\eta\} = \langle L\rangle\,\langle\eta\rangle;\ \eta = M\tau,\ \langle\eta\rangle = \{M\tau\} = \langle M\rangle\,\langle\tau\rangle \tag{2.3}$$

и

$$\langle L\rangle = \{LA\},\ \langle M\rangle = \{MB\} \tag{2.4}$$

определяют искомые формулы для макроскопических модулей и упругих податливостей.

Как отмечено в [4], дальнейшими следствиями (2.2) и (2.3) являются эквивалентные соотношения

$$A\langle M\rangle = MB, \qquad B\langle L\rangle = LA \tag{2.5}$$

между функциями коэффициентов концентрации. (Например, второе соотношение получается при помощи выражения τ альтернативным способом через $LA\langle\eta\rangle$ и $B\langle L\rangle\langle\eta\rangle$.) Матричное (девять на девять) представление $\langle L\rangle$ и $\langle M\rangle$ имеет диагональную симметрию [2,4], так как дифференциальное выражение $\langle\tau\rangle\ d\langle\eta\rangle$, согласно (1.1), интегрируемо, а выражение $\tau d\eta$ также всюду предполагается интегрируемым.

С другой стороны, матричные представления A и B вообще несимметричны, поэтому их транспозиции будут обозначаться A' и B'.

Будем считать, далее, что теорема (1.1) применима к скалярному произведению $\sigma\eta$ и $\tau\varepsilon$. Тогда из (2.2) следует

$$\{\sigma A\}\langle\eta\rangle = \langle\sigma\rangle\langle\eta\rangle, \qquad \{\varepsilon B\}\langle\tau\rangle = \langle\varepsilon\rangle\langle\tau\rangle$$

для произвольных $\langle\eta\rangle$ и $\langle\tau\rangle$ соответственно. Таким образом

$$\{A'\sigma\} = \langle\sigma\rangle, \qquad \{B'\varepsilon\} = \langle\varepsilon\rangle \tag{2.6}$$

для любого самоуравновешенного поля напряжений и любого кинематически совместного поля деформации при условии, что каждое из них может быть обусловлено макроскопически-однородными граничными условиями.

Вновь рассматривая те же скалярные произведения и преобразуя их различным образом, можно получить следующие соотношения для произвольных $\langle\eta\rangle$ и $\langle\tau\rangle$:

$$\{\varepsilon LA\}\langle\eta\rangle = \{\varepsilon L\eta\} = \langle\varepsilon\rangle\langle L\rangle\langle\eta\rangle,\ \{\sigma MB\}\langle\tau\rangle = \{\sigma M\tau\} = \\ = \langle\sigma\rangle\langle M\rangle\langle\tau\rangle \tag{2.7}$$

Отсюда

$$\{A'L\varepsilon\} = \langle L\rangle\langle\varepsilon\rangle,\ \{B'M\sigma\} = \langle M\rangle\langle\sigma\rangle \tag{2.8}$$

Последние соотношения могут быть получены из (2.5) и (2.6). Окончательно, вычитая (2.8) из (2.6), найдем для случая, когда характерный элемент находится в упруго-пластическом состоянии

$$\{A'(\sigma - L\varepsilon)\} = \langle\sigma\rangle - \langle L\rangle\langle\varepsilon\rangle,\ \{B'(\varepsilon - M\sigma)\} = \langle\varepsilon\rangle - \langle M\rangle\langle\sigma\rangle \tag{2.9}$$

Эти уравнения по существу эквивалентны, так как каждое из них может быть получено из другого при помощи (2.5).

Во всех предыдущих формулах, разумеется, можно заменить напряжения и деформации на их дифференциалы или скорости их изменения. Обращаясь к выражениям (1.2) и (1.3) и их аналогам (1.5), мы видим, что формулы (2.9) выражают соответствующие макроскопические величины в виде осреднений с весом их микроскопических распределений. Замечательно, что, независимо от характера и степени внутреннего пластического течения, соответствующие весовые функции A' и B' определяются только лишь при помощи соотношений теории упругости.

Некоторые авторы, например Лин и Ито [9] и Хавнер [10], определили макроскопическую деформацию как простое (без веса) осреднение их микро-распределений. Но в общем случае $\{M\sigma\}$ не равно $\langle M\rangle\langle\sigma\rangle$, если только распределение M не является однородным, или σ — упругое поле. Соответственно, такое определение в общем случае не имеет физического смысла, потому что оно не соответствует действительному процессу разгрузки характерного элемента путем соответствующего изменения усилий на его поверхности.

3. Макроскопические скаляры. Обратимся к величинам, имеющим характер энергии или работы, действительной или возможной. Рассмотрим положительно-определенные квадратичные формы

$$V = {}^1/_2(\varepsilon - \eta)\, L\, (\varepsilon - \eta), \quad W = {}^1/_2\, (\sigma - \tau)\, M\, (\sigma - \tau) \tag{3.1}$$

где η и τ — тензоры упругих микроскопических напряжений и деформаций (2.2), но в данном случае $\langle\eta\rangle = \langle\varepsilon\rangle$ и $\langle\tau\rangle = \langle\sigma\rangle$. Средние по объему $\{V\}$ и $\{W\}$ могут быть интерпретированы как остаточные упругие энергии в характерном элементе после снятия макроскопической деформации $\langle\varepsilon\rangle$ и макроскопического напряжения $\langle\sigma\rangle$, соответственно (при условии, что разгрузка является абсолютно упругим процессом).

Напомним элементарные формулы

$$2\{V\} = \{\varepsilon L\varepsilon\} - \langle\varepsilon\rangle\langle L\rangle\langle\varepsilon\rangle, \quad 2\{W\} = \{\sigma M\sigma\} - \langle\sigma\rangle\langle M\rangle\langle\sigma\rangle \tag{3.2}$$

аналогии которых для упругой среды при произвольном нагружении хорошо известны (особенно в связи с классическими экстремальными принципами).

Чтобы показать справедливость соотношения (3.2), заметим, что $L\eta$ — самоуравновешенное поле напряжения, в то время как $M\tau$ — кинематически совместное поле деформаций. Тогда (3.1) при помощи (1.1) могут быть сведены к равенствам

$$2\{V\} = \{(\varepsilon - \eta)L\varepsilon\}, \quad 2\{W\} = \{(\sigma - \tau)M\sigma\}$$

и затем приведены к (3.2) при помощи соотношений, аналогичных (2.3).

Используя выражения (3.2) в дифференциальной форме и предполагая, что L и M не варьируются, получим

$$d\{V\} = \{\varepsilon L d\varepsilon\} - \langle\varepsilon\rangle\langle L\rangle d\langle\varepsilon\rangle, \quad d\{W\} = \{\sigma M d\sigma\} - \langle\sigma\rangle\langle M\rangle d\langle\sigma\rangle \tag{3.3}$$

Переписанные снова при помощи (1.1) соотношения (3.3) для упруго-пластической среды принимают вид

$$\begin{aligned} \langle\varepsilon\rangle(d\langle\sigma\rangle - \langle L\rangle d\langle\varepsilon\rangle) - \{\varepsilon\,(d\sigma - L d\varepsilon)\} &= d\{V\} \\ \langle\sigma\rangle\,(d\langle\varepsilon\rangle - \langle M\rangle d\langle\sigma\rangle) - \{\sigma\,(d\varepsilon - M d\sigma)\} &= d\{W\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Таким образом, макро- и микроскопические меры пластической работы при бесконечно малом приращении деформации совершенно различны [1].

Точнее, когда первоначальное состояние характерного элемента предполагается упругим, общая макроскопическая пластическая работа всегда превышает общую микроскопическую пластическую работу.

Это превышение равно окончательной величине остаточной упругой энергии $\{W\}$. Однако, даже если пластическая работа увеличивается монотонно (предполагая, что скорость диссипации энергии в микроэлементах все время положительна), макроскопическая пластическая работа может колебаться и временно уменьшаться.

Например, как отмечено в [2], скорость изменения макроскопической пластической работы в циклических испытаниях на растяжение-сжатие отрицательна в той части гистерезисной петли, где обратное пластическое течение наступает еще до того, как растягивающая нагрузка полностью снята.

Этот тип гистерезисной петли часто наблюдается в испытаниях с поликристаллическими металлами.

Сравним теперь виртуальные изменения работы на микро- и макроскопических уровнях. По аналогии с (2.7) имеем

$$\{\eta^* L d\varepsilon\} = \langle\eta^*\rangle \langle L\rangle\, d\langle\varepsilon\rangle, \qquad \{\tau^* M d\sigma\} = \langle\tau^*\rangle \langle M\rangle d\langle\sigma\rangle$$

Здесь τ^* и η^* — любые упругие поля напряжения и деформации соответственно. В результате получим

$$\begin{aligned}\{\eta^*(d\sigma - Ld\varepsilon)\} &= \langle\eta^*\rangle (d\langle\sigma\rangle - \langle L\rangle\, d\langle\varepsilon\rangle) \\ \{\tau^*(d\varepsilon - Md\sigma)\} &= \langle\tau^*\rangle (d\langle\varepsilon\rangle - \langle M\rangle\, d\langle\sigma\rangle)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Эти уравнения идентичны (2.3). Они могут быть представлены в разных формах [1-3].

Предположим теперь, что $\eta^* = A\langle\eta^*\rangle$ и $\tau^* = B\langle\tau^*\rangle$ (аналогично (2.2)). Эти поля произвольны, поэтому дифференциальные аналоги соотношений (2.9) могут быть получены из (3.5). Предположим, с другой стороны, что поле τ^* рассматривается как действительное (бесконечно малое) изменение напряжений в процессе (частичной) упругой разгрузки от состояния σ.

Тогда выражение (3.5) утверждает, что микроградиентальность подразумевает макроградиентальность (обе части уравнения не положительны). Этот фундаментальный результат получен независимо Манделем и Хиллом.

Общее сравнение виртуальной скорости изменения пластической работы на микро- и макроуровнях также было сделано Манделем. Его выводы могут быть представлены по-другому. Рассмотрим разность

$$\langle\sigma^*\rangle\, (d\langle\varepsilon\rangle - Md\langle\sigma\rangle) - \{\sigma^*(d\varepsilon - Md\sigma)\} \tag{3.6}$$

Здесь σ^* — любое самоуравновешенное поле напряжения. При помощи (1.1) эта разность сводится к следующей:

$$\{\sigma^* M d\sigma\} - \langle\sigma^*\rangle \langle M\rangle d\langle\sigma\rangle$$

и может быть приведена к виду

$$\{(\sigma^* - \tau^*)\, M d\sigma\},\ \text{или}\ \{\sigma^* M(d\sigma - d\tau)\}$$

Здесь τ^* и $d\tau$ — упругие поля напряжения, обусловленные $\langle\sigma^*\rangle$ и $d\langle\sigma\rangle$ соответственно. Из предшествующих величин вычтем соответственно выражения

$$\{(\sigma^* - \tau^*) M d\tau\},\quad \{\tau^* M(d\sigma - d\tau)\}$$

которые оба сами по себе равны нулю. (В каждом произведении взятая в скобки разность представляет самоуравновешенное поле напряжения с нулевым средним значением, а второй множитель определяет кинематически совместное поле деформаций.) Окончательно в том и другом случаях получим

$$\{(\sigma^* - \tau^*) M(d\sigma - d\tau)\} \tag{3.7}$$

Переход от (3.6) к (3.7) и есть результат Манделя. Аналогично может быть показано, что разность

$$\langle\varepsilon^*\rangle\ (d\langle\sigma\rangle - \langle L\rangle d\langle\varepsilon\rangle) - \{\varepsilon^*(d\sigma - Ld\varepsilon)\} \tag{3.8}$$

равна

$$\{(\varepsilon^* - \eta^*) L(d\varepsilon - d\eta)\} \tag{3.9}$$

Путем надлежащих преобразований из общей формулы (3.7) и ее аналога (3.9) могут быть получены все ранее данные результаты.

Так, принимая $\sigma^* = \sigma$ (при необходимом условии $\tau^* = \tau$) в (3.6) и (3.7), получаем второе уравнение (3.4); аналогично, если положить $\varepsilon^* = \varepsilon$ (при условии $\eta^* = \eta$), то из (3.8) и (3.9) следует первое уравнение (3.4). С другой стороны, замена $\sigma^* = \tau^*$ приводит к соотношению (3.5); естественно выбор $\varepsilon^* = \eta^*$ приводит к тому же результату.

Полагая σ^* пропорциональным $d\sigma$ (и τ^* пропорциональным $d\tau$), Мандель получил новый результат

$$d\langle\sigma\rangle (d\langle\varepsilon\rangle - \langle M\rangle d\langle\sigma\rangle) - \{d\sigma(d\varepsilon - Md\sigma)\} = \\ = \{(d\sigma - d\tau) M(d\sigma - d\tau)\} \tag{3.10}$$

Его аналогом является соотношение

$$d\langle\varepsilon\rangle\ (d\langle\sigma\rangle - \langle L\rangle d\langle\varepsilon\rangle) - \{d\varepsilon(d\sigma - Ld\varepsilon)\} = \\ = \{(d\varepsilon - d\eta)\, L\, (d\varepsilon - d\eta)\} \tag{3.11}$$

Уравнения (3.10) и (3.11) могли, конечно, быть получены непосредственно из дифференциальных аналогов (3.2).

Положим теперь $d\sigma \not\equiv d\tau$ и $d\varepsilon \not\equiv d\eta$, если деформации не идеально упругие. В результате из (3.10) и (3.11) будем иметь

$$d\langle\sigma\rangle\ (d\langle\varepsilon\rangle - \langle M\rangle d\langle\sigma\rangle) > \{d\sigma(d\varepsilon - Md\sigma)\} \tag{3.12}$$
$$d\langle\varepsilon\rangle\ (d\langle\sigma\rangle - \langle L\rangle d\langle\varepsilon\rangle) > \{d\varepsilon(d\sigma - Ld\varepsilon)\}$$

во всех случаях, когда имеет место бесконечно малое приращение пластической деформации. Независимое прямое доказательство этого было дано в [2]. Можно сейчас же получить, что если

$$d\sigma\,(d\varepsilon - M d\sigma) \geqslant 0 \tag{3.13}$$

для любого микроэлемента, то тогда

$$d\,\langle\sigma\rangle\,(d\,\langle\varepsilon\rangle - \langle M\rangle d\,\langle\sigma\rangle) > 0 \tag{3.14}$$

Как подчеркнуто в [2], это последнее неравенство справедливо даже тогда, когда для всего характерного элемента сохраняется равенство в (3.13). Иными словами (принимая закон градиентальности), вследствие неоднородности будет наблюдаться явное упрочнение на макроскопическом уровне, даже когда микроскопический элемент не упрочняется.

Из дифференциальных аналогов (1.7) для макро- и микроскопических величин можно заключить, что (3.13) приводит не только к неравенству

$$d\varepsilon(d\sigma - L d\varepsilon) \leqslant 0 \tag{3.15}$$

но также и к неравенству

$$d\,\langle\varepsilon\rangle\,(d\,\langle\sigma\rangle - \langle L\rangle\, d\,\langle\varepsilon\rangle) \leqslant 0 \tag{3.16}$$

С другой стороны, на основании второго неравенства (3.12) нельзя сказать, следует ли (3.16) из (3.15). Действительно, соотношение (3.15) приводит только к неравенству

$$d\,\langle\sigma\rangle\, d\,\langle\varepsilon\rangle \leqslant \{d\varepsilon\ \ (L d\varepsilon)\}$$

из которого нельзя сделать дальнейших выводов, так как

$$\{d\varepsilon(L d\varepsilon)\} \geqslant d\,\langle\varepsilon\rangle\,(\langle L\rangle\, d\,\langle\varepsilon\rangle)$$

по аналогии с первым соотношением (3.2).

Итак, неравенства (3.15), (3.16) могут быть получены при помощи постулата Ильюшина соответственно на микро- и макроскопических уровнях (путем применения, в частности, к бесконечно малому циклу деформации, начиная с пластического напряженного состояния).

С другой стороны, постулат Ильюшина не приводит к неравенствам (3.13) и (3.14), хотя, как известно, эти соотношения следуют из постулата Друккера.

Эти факты указывают на интересный основной вопрос: существует ли связь между макро- и микроформами постулата Ильюшина и, в частности, являются ли эти две формы всегда взаимно совместимыми.

Не стоит говорить, что на этот вопрос не легко ответить, так как цикл макроскопической деформации ни в коем случае не обязательно сопровождается циклами деформации во всех микрокомпонентах.

Поступила 15 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Mandel J. Contribution théorique à l'étude de l'écrouissage et des lois de l'écoulement plastique. Proc. 11th Internat. Congr. Appl. Mech. Munich, 1964. Berlin, Springer — Verlag, 1966, p. 502.
2. Hill R., The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. J. Mech. Phys. Solids, 1967, vol. 15, No. 2, p. 79.
3. Rice J. R. On the structure of stress-strain relations for timedependent plastic deformation in metals. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1970.
4. Hill R. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. J. Mech. Phys. Solids, 1963, vol. 11, No. 5, p. 357.
5. Ильюшин А. А. О постулате пластичности. ПММ. 1961, т. 25, вып. 3.
6. Hill R. On constitutive inequalities for simple materials. II. J. Mech. Phys. Solids, 1968, vol. 16, No. 5, p. 315.
7. Ильюшин А. А. О приращении пластической деформации и поверхности текучести. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
8. Hill R. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. J. Mech. Phys. Solids, 1965, vol. 13, No. 2, p. 89.
9. Lin T. H., Ito M. Latent elastic strain energy due to the residual stresses in a plastically deformed polycrystal. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, No. 3, p. 606.
10. Havner K. S. The theoretical behaviour of a polycrystalline solid as related to certain general concepts of continuum plasticity. Internat. J. Solids and Structures, 1969, vol. 5, No. 3, p. 215.