

ЗАПАЗДЫВАНИЕ ТЕКУЧЕСТИ В ДИНАМИКЕ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Ю. Н. Работнов, Ю. В. Суворова

(Москва)

Рассматривается применение предложенной ранее модели упруго-пластической среды с запаздывающей текучестью к жестко-пластическим телам. Исследованы статически определимые и статически неопределимые системы. Приведено подробное решение задачи о динамическом изгибе круглой свободно опертой пластинки.

При рассмотрении динамических задач теории пластичности на основе схемы жестко-пластического тела предполагается, что распределение напряжений в частях, остающихся жесткими при движении тела, принципиально определено быть не может, как это следует из самого определения абсолютно жесткого тела. В действительности, когда рассматривается, например, движение балки со стационарными шарнирами текучести, положение этих шарниров определяется тем условием, что изгибающие моменты в шарнирах от внешней нагрузки и сил инерции сохраняют максимальные значения и, следовательно, появление пластических шарниров на жестких участках невозможно. Эффект запаздывания текучести, характерный для малоуглеродистых сталей, состоит в том, что материал может выдержать, оставаясь упругим, напряжения, существенно превышающие статический предел текучести, в течение некоторого определенного времени — времени запаздывания.

Модель упруго-пластической среды с запаздыванием текучести обсуждалась в [1-3]; в [4] была рассмотрена также модель жестко-пластического тела с запаздыванием текучести применительно к задаче о динамическом изгибе балки.

Первый пластический шарнир появляется при этом в том сечении, где некоторый функционал от изгибающего момента достигает максимума на первом этапе движения, пока еще шарниры не образовались. Если балка статически определима, это сечение определяется однозначно.

Для статически неопределимых стержневых систем и для пластинок вопрос о распределении моментов в жестком состоянии может быть решен только в том случае, если будут сделаны некоторые предположения о природе жестких областей. Поэтому модель жестко-пластического тела с запаздыванием текучести нуждается в уточнении.

Будем рассматривать жестко-пластическое тело как упругое тело с бесконечно большим модулем упругости. При действии статических и квазистатических нагрузок распределение напряжений в таком теле будет определяться единственным образом, поскольку напряжения при заданных усилиях на поверхности от модуля не зависят.

§ 1. Ограничиваясь рассмотрением балок и пластинок, определим модель жестко-пластической пластины с запаздыванием следующим образом. В жестких частях пластины распределение моментов дается решением динамической задачи теории упругости, в котором сделан предельный переход, модуль упругости устремлен к бесконечности. Если статическое условие пластичности имеет вид

$$M_e = M_s$$

где M_e — эквивалентный момент (например, по условию текучести Мизеса или Треска) и в некоторый момент времени $t = t_0$ на линии γ или в об-

ласти S выполняется условие

$$\int_0^{t_0} \varphi(M_e) dt = \tau \quad (1.1)$$

где $\varphi(M_e)$ — известная функция запаздывания, а τ — константа материала, то при $t > t_0$ на линии γ или в области S

$$M_e \leq M_s \quad (1.2)$$

Для балки условия (1.1) и (1.2) сохраняются, если понимать под M_e абсолютную величину изгибающего момента.

При составлении условий (1.1) и (1.2) делается обычное для жестко-пластического анализа предположение о том, что условие пластичности для моментов имеет тот же вид, что и условие пластичности для напряжений при плоском напряженном состоянии. Для балки с идеальным двухтавровым сечением и для двухслойной пластинки это заключение совершенно строго. В реальной балке или пластинке пластическая область распространяется по толщине постепенно, как показано в работе [1], однако здесь этот вопрос не рассматривается.

Функция φ , стоящая под интегралом в условии запаздывания (1.1), определяется экспериментально. Для случаев одноосного растяжения-сжатия ее выражение может быть представлено в виде [5]

$$\varphi = (\sigma / \sigma^*)^\alpha \quad (1.3)$$

где α — константа материала, а σ^* — некоторое характеристическое напряжение.

Однако во многих задачах более удобным оказывается использовать выражение для φ в виде

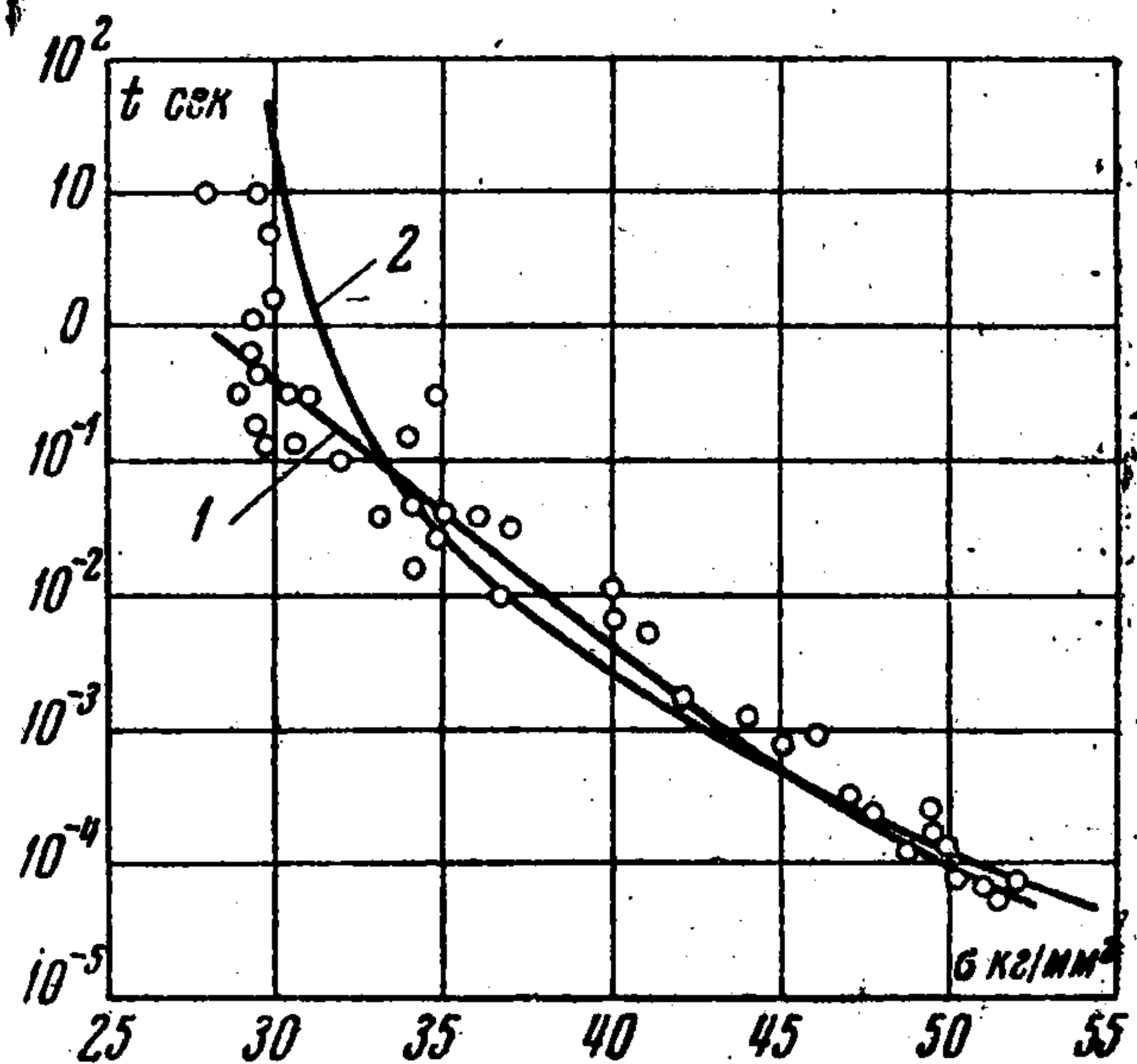
$$\varphi = \left(\frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_s} \right)^n \quad (1.4)$$

Здесь n — константа материала, а σ_s — статический предел текучести.

На фиг. 1 приведены экспериментальные данные Кларка и Вуда [6] по зависимости времени запаздывания от величины приложенного напряжения, а также кривые 1 и 2, рассчитанные соответственно по формулам (1.3) и (1.4).

Можно предположить, что в случае жестко-пластического изгиба балок и пластин функция φ будет иметь такой же вид, как и в случае одноосного растяжения-сжатия. В этой работе использовано следующее выражение:

$$\varphi = \left(\frac{M - M_s}{M_s} \right)^n \quad (M > M_s), \quad \varphi = 0 \quad (0 \leq M \leq M_s) \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Здесь M_s — величина предельного изгибающего момента.

Уравнение (1.1) выражает гипотезу изотропного запаздывания. В действительности, по-видимому, можно считать, что освобождение дислокаций, вызванное напряжением, действующим в одном направлении, не облегчает их движения в противоположном направлении [7]. Применительно к балке это означает следующее. Если изгибающий момент меняет знак, то интеграл (1.1) вычисляется отдельно для положительных значений момента и для отрицательных значений момента.

Наступление текучести определяется достижением предельного значения одним из этих интегралов. Таким образом, более корректная запись условия запаздывания для балки будет следующая:

$$\max \left| \int_0^t \varphi(|M|) dt \pm \int_0^t \varphi(|M|) \operatorname{sign} M dt \right| = 2\tau \quad (1.6)$$

Для пластинки при критерии типа Треска условие запаздывания будет совершенно таким же, если понимать под M одну из величин: M_1 , M_2 , $M_1 - M_2$.

§ 2. Для реализации расчета по принятой схеме, когда жесткие области рассматриваются как упругие в предельном случае $E = \infty$, необходимо находить распределение моментов в жестких областях. Покажем, что это распределение соответствует квазистатическому решению, т. е. решению, полученному при пренебрежении силами инерции. Рассмотрим задачу о динамическом изгибе пластины нагрузкой $q(x, t)$ при однородных граничных условиях. Функция нагрузки $q(x, t)$ предполагается квадратично интегрируемой по x и непрерывной по t вместе с первой производной. Наложим на нее следующие ограничения:

$$q(x, 0) = 0, \quad |\partial q / \partial t| < m', \quad |\partial^2 q / \partial t^2| < n' \quad (2.1)$$

где m' и n' — сколь угодно малые. Будем решать дифференциальное уравнение изгиба

$$E A(w) + \rho d^2 w / dt^2 = q \quad (2.2)$$

в виде разложения по фундаментальным функциям уравнения

$$A(w) = \lambda w$$

Применяя начальные условия

$$w(x, 0) = 0, \quad (dw/dt)_{t=0} = 0$$

обычным способом получаем

$$w = \sum_k \tau_k u_k, \quad \tau_k = \frac{1}{\rho \omega_k} \int_0^t \sin \omega_k (t - s) q_k(s) ds$$

Здесь $q_k(t)$ — коэффициенты Фурье нагрузки q . Вследствие (2.1)

$$q_k(0) = 0, \quad |q_k| < m, \quad |\dot{q}_k| < n \quad (2.3)$$

где m и n — величины, пропорциональные m' и n' и исчезающие вместе с ними. Преобразуем выражение для τ_k двукратным интегрированием по

частям с учетом начального условия. Получим

$$\tau_k = \frac{1}{E\lambda_k} \left\{ q_k + \frac{1}{\omega_k} \left[\dot{q}(0) \sin \omega_k t + \int_0^t \sin \omega(t-s) \ddot{q}(s) ds \right] \right\}$$

Выражение, заключенное в квадратные скобки, остается ограниченным при любом конечном t . При $E \rightarrow \infty$, $\omega_k \rightarrow \infty$. Изгибающие моменты выражаются через вторые производные от прогиба w , умноженные на E . При $E = \infty$

$$E \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_k \frac{q_k}{\lambda_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.4)$$

Это соответствует квазистатическому решению, полученному при пренебрежении силами инерции. Для рядов (2.4) обеспечена по крайней мере сходимость в среднем.

Теперь величины m' и n' можно положить сколь угодно малыми, таким образом, ограничения, наложенные на характер изменения функции $q(x, t)$, со временем снимаются. При этом существен порядок предельного перехода, сначала E устремляется к бесконечности, потом устремляется к нулю m' и n' .

Очевидно, что аналогичный метод применим к балкам (здесь легко доказывается равномерная сходимость рядов (2.4)) и другим упругим системам.

Если допустить разрывы q или $\partial q / \partial t$, рассматриваемых как функции t , с самого начала, до предельного перехода $E \rightarrow \infty$, то может возникнуть ситуация, которую проиллюстрируем на примере продольных колебаний стержня.

Предположим, что на конце стержня мгновенно приложено напряжение σ_0 , другой конец его свободен. Вследствие отражения волн от свободного конца в каждом сечении напряжение принимает значение, равное нулю или σ_0 , среднее значение напряжения за достаточно большой промежуток времени стремится к величине $\sigma_0(l-x)/l$.

Именно такое распределение напряжений получится в результате решения квазистатической задачи, когда нагрузка на конце уравнивается равномерно-распределенными по длине силами инерции. Если теперь $E \rightarrow \infty$ и, следовательно, скорость распространения упругих волн стремится к бесконечности, отмеченный результат сохраняет силу. Однако величина $\sigma(x, t)$ при фиксированных x и t не стремится ни к какому пределу. В то же время коэффициенты Фурье функции $\sigma(x, t)$ стремятся при неограниченном увеличении E к коэффициентам Фурье непрерывной функции $\sigma_0(l-x)/l$.

При фиксированном x

$$\int_0^t \varphi(\sigma(x, t)) dt \rightarrow \varphi(\sigma_0(l-x)/l) t$$

Таким образом, время запаздывания может определяться по квазистатическому решению.

§ 3. Схема жестко-пластического анализа статически неопределимых систем типа балок или рам с запаздыванием текучести получается на основании сформулированной теоремы следующей. Для исходного состояния решается статическая задача в предположении упругости, ищется

ея распределение моментов, составляется функционал (1.6), находится сечение A , где образуется первый пластический шарнир, соответствующий моменту времени t_1 .

Далее рассматривается та же система с одним пластическим шарниром, где изгибающий момент сохраняет постоянное значение M_s , находится положение второго пластического шарнира и время его образования. Этот процесс продолжается до тех пор, пока с образованием последнего пластического шарнира система не превратится в механизм. На следующих этапах движения изгибающие моменты в жестких участках определяются из уравнений движения системы жестких звеньев, сочлененных шарнирами; условие (1.6) служит для определения положения и времени появления последующих шарниров. При этом анализе следует обращать внимание на направление относительного вращения соседних элементов, образование нового шарнира может повлечь за собой исчезновение других шарниров. Пример подобного анализа для статически определимой системы приведен в [4].

Если заданы не нагрузки, а скорости некоторых сечений, эффект запаздывания текучести учитываться не должен и сохраняет силу обычное жестко-пластическое решение.

Поясним это на примере задачи, рассмотренной в работе [8]. Балка падает со скоростью v на шарнирные опоры, таким образом, при $t = 0$ скорости всех сечений балки, кроме концевых равны v , тогда как скорости концевых сечений равны нулю. Балка мгновенно останавливается, следовательно, возникает бесконечно большая поперечная нагрузка $q = \infty$, импульс которой $qT = \rho Fv$ конечен. Изгибающий момент M бесконечно велик во всех сечениях.

Составляя условие запаздывания для бесконечно малого времени T

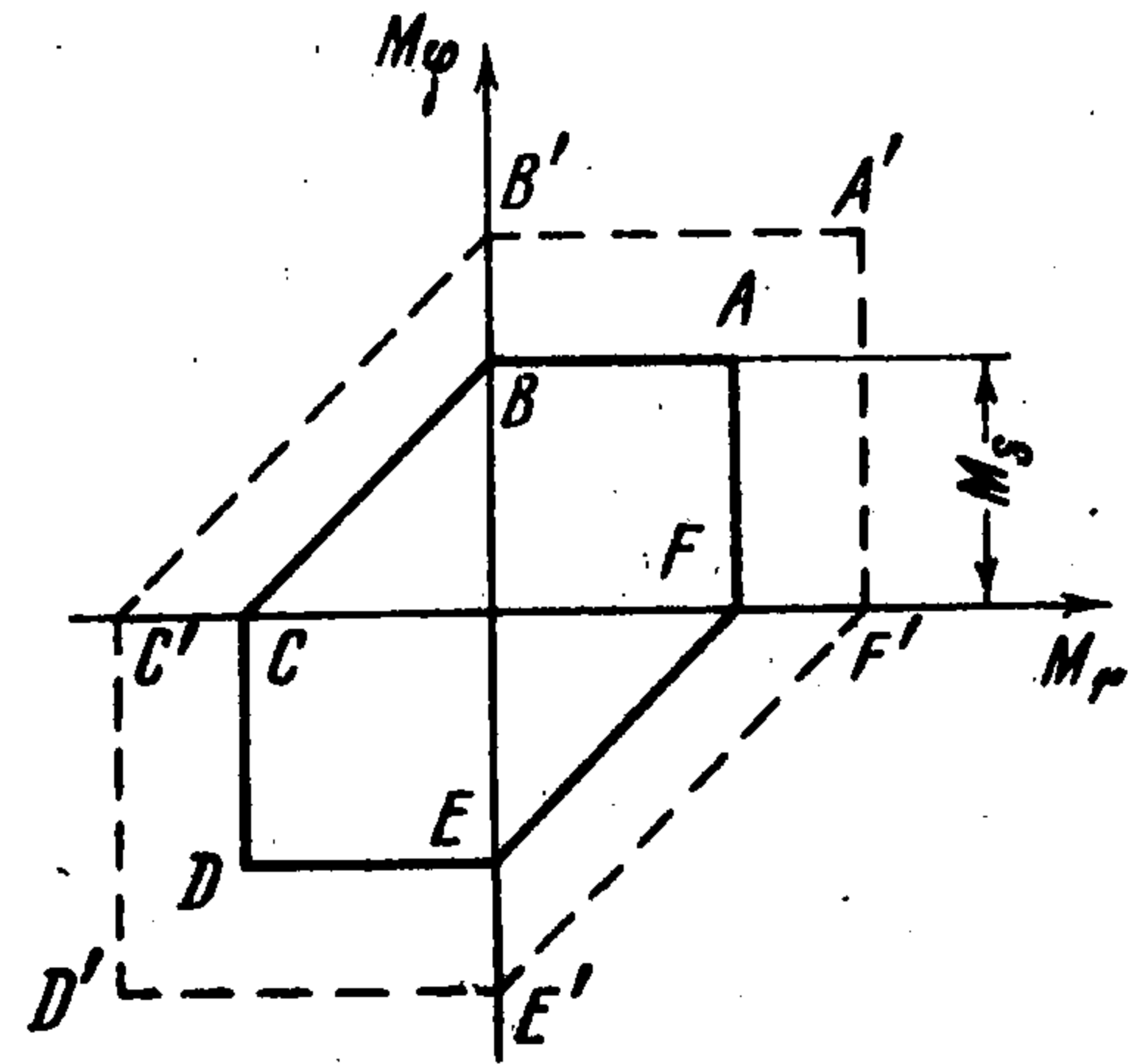
$$\int_0^T \left(\frac{M - M_s}{M_s} \right)^n dt \approx \left(\frac{M}{M_s} \right)^n T$$

находим, что $M^n T = \infty$ при $n > 1$, следовательно, способность материала к запаздыванию будет исчерпана, и во всей балке сразу становится $M = M_s$, что и предполагается в решении [8].

В качестве примера жестко-пластического анализа статически неопределимых систем можно рассмотреть задачу об осесимметричном изгибе круглой пластинки. Как уже выше говорилось, возможность появления пластических деформаций в пластинке определяется напряженным состоянием в жестких частях. Пластические деформации появляются лишь тогда, когда будет выполнено условие (1.6). Схема жестко-пластического решения с запаздыванием текучести получается здесь следующей. Сначала необходимо решить статическую упругую задачу и найти распределение изгибающих моментов. Здесь можно найти окружность, на которой прежде всего будет исчерпана несущая способность материала. На этой окружности происходит падение изгибающих моментов до предельной величины, определяемой выбранным условием пластичности. Дальнейшее распределение зон пластической деформации происходит в соответствии с условием запаздывания (1.6), причем величина эквивалентного

момента, стоящего под интегралом, определяется из статического упругого решения для жесткой части пластинки. Величина M , входящая в выражение для функции φ согласно (1.5) есть значение некоторого эквивалентного момента, соответствующего выбранному условию пластичности.

Обычный жестко-пластический анализ изгиба круглых пластинок основывается, как правило, на условии пластичности Треска, поэтому в данной работе при исследовании изгиба с учетом запаздывания текучести также будет принято условие пластичности Треска (фиг. 2). После определения радиальных моментов M_r и окружных M_φ в жесткой пластинке необходимо выяснить, в какую часть плоскости $M_r \sim M_\varphi$ они попадают. Если M_r и M_φ имеют один и тот же знак (стороны $A'B'$, $A'F'$, $C'D'$, $D'E'$), то эквивалентный момент M будет соответствовать тому из моментов M_r и M_φ , абсолютная величина которого больше. Если же M_r и M_φ имеют противоположные знаки, то значение M будет соответствовать разности этих моментов, определяющих стороны шестиугольника $B'C'$ или $E'F'$. В момент времени $t = t_0$ происходит падение изгибающих моментов до предельного уровня, соответствующего шестиугольнику Треска $ABCDEF$, в котором скорости определяются предельными значениями моментов M_s . В пластической области происходит деформирование в соответствии с законом течения, соответствующим предельному шестиугольнику.



Фиг. 2

§ 4. Рассмотрим изгиб круглой свободно опертой пластинки, подверженной действию импульсивной равномерно-распределенной нагрузки. Подобная задача без запаздывания текучести рассмотрена в [9].

Показано, что в зависимости от величины нагрузки могут быть две различные формы изгиба. При $p_s < p < 2p_s$ (здесь p_s — предельная нагрузка $p_s = 6M_s/R^2$, R — радиус пластинки) первоначально плоская срединная поверхность переходит в коническую. Радиальный изгибающий момент M_r и окружной M_φ в центре пластинки равны между собой. Вся пластинка находится в состоянии AB , причем центр ее — в состоянии A , а свободно опертый край — в состоянии B . При величине нагрузки $p > 2p_s$ образуется центральная круговая область, в которой реализуется состояние A и $M_r = M_\varphi$. Радиус этой части определяется из граничных условий и условия на границе между различными пластическими состояниями. Вся эта центральная часть будет двигаться поступательно как жесткое тело. Остальная часть пластинки находится в состоянии AB и представляет собой усеченный конус.

После снятия нагрузки шарнирная окружность, являющаяся границей раздела между двумя областями, начинает двигаться к центру. После того как она достигает центра, движение пластинки еще некоторое время продолжается вплоть до полной остановки.

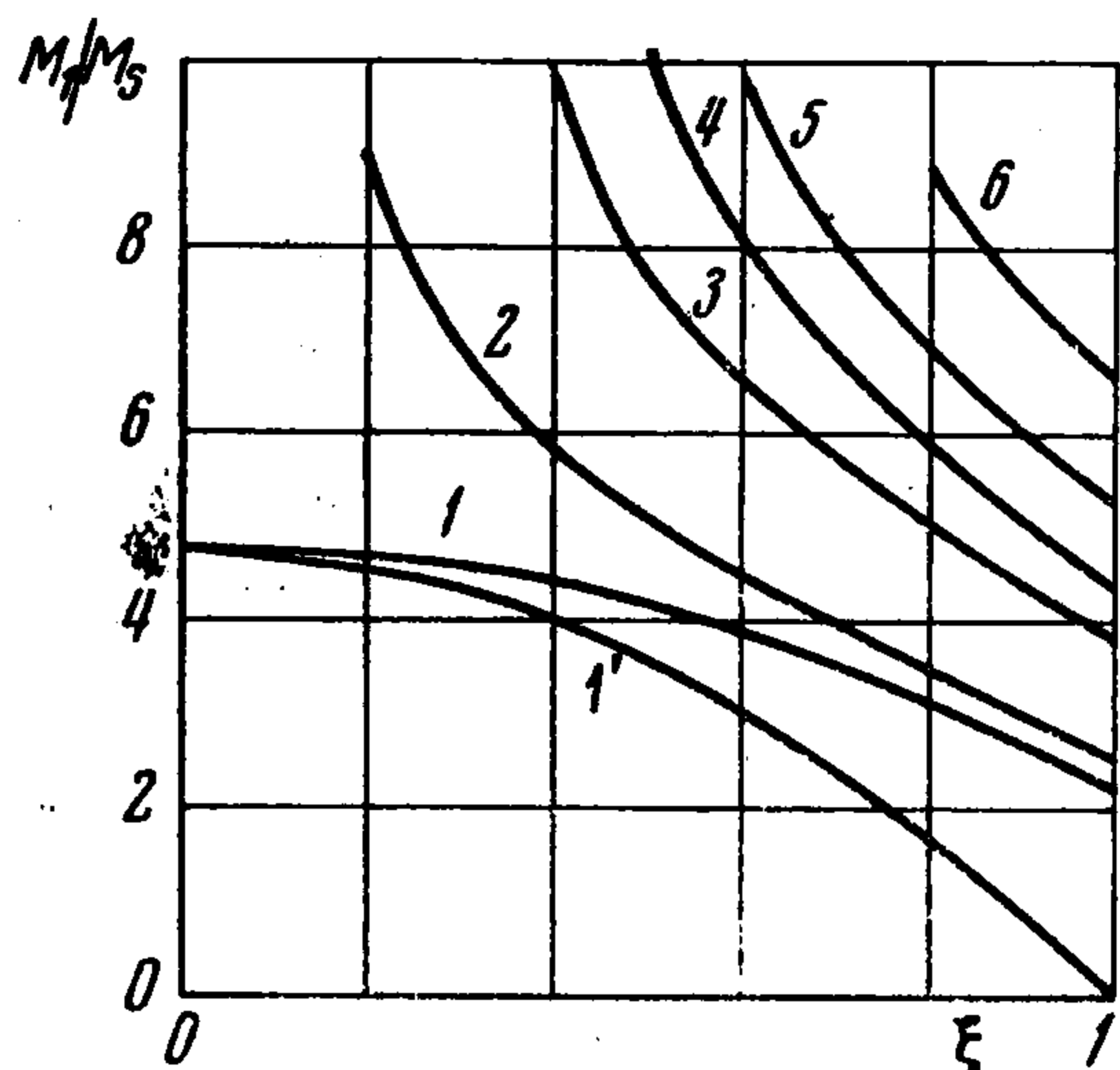
Запаздывание текучести вносит существенное изменение в анализ задачи.

В течение некоторого времени после приложения нагрузки, определяемого условием запаздывания (1.6), пластинка остается неподвижной,

так как материал в течение этого времени способен выдерживать напряжения, превышающие предельные.

В момент времени $t = t_0$ происходит падение изгибающих моментов до статического предельного состояния, соответствующего шестиугольнику Треска $ABCDEF$. В пластическом состоянии происходит течение в соответствии с ассоциированным законом. Величина же эквивалентного момента M , стоящего под интегралом в условии (1.6), определяется, как показано в § 2, из статического упругого решения для жесткой части пластинки.

Итак, в течение некоторого времени после приложения нагрузок, пока $t \leq t_0$, вся пластинка остается жесткой и неподвижной. На фиг. 3 приведе-



Фиг. 3

ны эпюры изгибающих моментов M_r/M_s (кривая 1') и M_ϕ/M_s (кривая 1) на этом первом этапе движения. Видно, что M_ϕ везде превосходит M_r , за исключением точки $\xi = 0$ (Здесь $\xi = r/R$). Эти моменты будут наиболее опасными и появление пластических деформаций в материале следует связывать именно с ними. (При вычислении эпюр фиг. 3 принято значение коэффициента Пуассона $\nu = 0,25$, величина приложенной нагрузки $p/p_s = 4$, а индекс 1 у моментов означает принадлежность к жесткой части пластинки).

В центре пластинки, где изгибающий момент имеет максимум, раньше всего будет исчерпана несущая способность материала. Происходит падение моментов с величины верхнего предела текучести, определяемого приложенной нагрузкой, до нижнего предела, определяемого предельным напряжением. Значения моментов в центре $\xi = 0$ соответствуют точке A шестиугольника текучести. Далее пластическая область начинает постепенно распространяться к краю пластинки. Скорость ее распространения определится временем запаздывания в каждом сечении ξ , т. е. величиной $t(\xi)$. При этом точка на шестиугольнике текучести начинает двигаться от A к B . Поскольку на стороне AB $\kappa = d^3w/dr^2dt = 0$ (w — прогиб), а также на границе между пластической и жесткой частями должно быть $\lambda = -1/r d^2w/dr dt = 0$, $w = 0$ и $w' = 0$, получим, что везде в пластической области $w = w' = w'' = 0$. Это значит, что хотя центральная часть пластинки и переходит в пластическое состояние, на этом этапе нагружения никакого движения еще нет. При этом здесь $M_\phi = M_s$, а $0 \leq M_r \leq M_s$. Интегрирование уравнения движения на этом этапе позволяет получить для M_r следующее выражение:

$$M_{r2} = M_s(1 - k\xi^2) \quad (k = p/p_s)$$

Здесь индекс 2 у момента M_r означает принадлежность к области AB . Из этого выражения видно, что область AB не может распространиться по всей пластинке. Когда эта область достигает окружности с коорди-

натой ξ^* , на которой изгибающий момент $M_{r,2}$ становится равным нулю ($\xi^* = \sqrt{1/k}$), характер движения должен измениться. Итак, пока пластическая область не дойдет до $\xi = \xi^*$, пластинка останется неподвижной.

На фиг. 3 приведены эпюры моментов $M_{\varphi 1}(\xi) / M_s$ в случае, когда нагрузка превосходит предельную в четыре раза для различных границ распространения пластической области (кривые 2 — 4 соответствуют значениям $\rho = 0.2, 0.4, 0.5$).

В тот момент, когда пластическая зона достигнет окружности с координатой ξ^* , от центра пластинки начнет распространяться еще одна пластическая область, напряжение в которой соответствует точке А шестиугольника текучести, т. е. $M_r = M_\varphi = M_s$. Наступает третий этап движения. Обозначим через ρ_0 границу между двумя пластическими областями. Для значений радиуса $0 \leq \xi \leq \rho_0$ имеем $M_r = M_\varphi = M_s$; из уравнения равновесия сразу же следует, что перерезывающая сила $Q = 0$ и $w'' = 0$. Для области $\rho_0 \leq \xi \leq \rho$ имеем $M_\varphi = M_s$ и $0 \leq M_r \leq M_s$ и, как уже показано выше, в этой области $w = w' = w'' = 0$. При интегрировании уравнения движения необходимо учесть, что

$$M_r|_{\xi=\rho} = 0, M_r|_{\xi=\rho_0} = M_s, Q|_{\xi=\rho_0} = 0$$

Два из этих условий позволяют определить две константы интегрирования, а третье условие — установить соотношение между величинами ρ и ρ_0 . Получим

$$\rho/k - \rho^3 + 3\rho\rho_0^2 - 2\rho_0^3 = 0$$

Это кубическое уравнение устанавливает зависимость между границами распространения двух пластических областей.

В центральной части пластинки ($0 \leq \xi \leq \rho_0$) радиальный и окружной изгибающие моменты равны между собой и равны по величине предельному моменту. Из уравнений динамического равновесия сразу же следует, что ускорение прогибов w'' для этой области есть величина постоянная и отлична от нуля

$$w_3'' = p/m$$

(индекс 3 означает принадлежность к области А). Интегрирование этого выражения с использованием граничных условий $w|_{\xi=\rho_0} = 0$ и $dw/dt|_{\xi=\rho_0} = 0$ дает

$$w_3 = \frac{p}{2m} [t(\rho_0) - t(\xi)]^2 \quad (4.1)$$

Из области $\rho_0 \leq \xi \leq \rho$ (пластическое состояние соответствует стороне АВ шестиугольника текучести) и в жесткой части $\rho \leq \xi \leq 1$ прогибы тождественно равны нулю.

Эпюры изгибающих моментов $M_{\varphi 1}$ в жесткой части пластинки на этом этапе движения представлены на фиг. 3, на которой кривые 5 и 6 соответствуют значениям $\rho = 0.6$ и 0.8 .

Движение границы между жесткой и пластической областями, т. е. функция $\rho(t)$ определяется условием запаздывания. При этом необходимо

учесть, что время запаздывания в каждой точке ξ определяется историей напряженного состояния в этой точке. В соответствии с (1.5) и (1.6) получим следующее уравнение

$$\int_0^{t_0} \left[\frac{M_{\varphi 1}(\xi, 0)}{M_s} - 1 \right]^n dt + \int_{t_0}^t \left[\frac{M_{\varphi 1}(\xi, \rho)}{M_s} - 1 \right]^n dt = \left[\frac{M_{\varphi 1}(0, 0)}{M_s} - 1 \right]^n t_0 \quad (4.2)$$

Здесь t_0 — время запаздывания для центральной точки пластинки $\xi = 0$, в которой изгибающий момент равен $M_{\varphi 1}(0, 0)$. Первый интеграл характеризует вклад от момента $M_{\varphi 1}$, соответствующего тому этапу нагружения, при котором вся пластинка еще жесткая и нет никаких пластических областей. Подынтегральная функция здесь зависит лишь от величины приложенной нагрузки, которая определяет как величину самого момента $M_{\varphi 1}$ для некоторой окружности с координатой ξ , так и время запаздывания t_0 в центре при $\xi = 0$. Второй интеграл может быть преобразован. Переходя от интегрирования по t к интегрированию по ρ ($dt = t'_\rho d\rho$), получим

$$\int_{t_0}^t \left[\frac{M_{\varphi 1}(\xi, \rho)}{M_s} - 1 \right]^n dt = \int_0^\xi \left[\frac{M_{\varphi 1}(\xi, \rho)}{M_s} - 1 \right]^n t'_\rho d\rho$$

Уравнение (4.2) при этом переходит в интегральное уравнение Вольтерра первого рода:

$$\frac{1}{t_0} \int_0^\xi \left[\frac{M_{\varphi 1}(\xi, \rho)}{M_s} - 1 \right]^n t'_\rho d\rho = \left[\frac{M_{\varphi 1}(0, 0)}{M_s} - 1 \right]^n - \left[\frac{M_{\varphi 1}(\xi, 0)}{M_s} - 1 \right]^n \quad (4.3)$$

Покажем сначала, что $t'_\rho = 0$ в центральной точке $\xi = 0$. Для этого необходимо в выражении для моментов $M_{\varphi 1}(\xi, \rho)$ принять $\rho \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow 0$. Разлагая члены, входящие в уравнение (4.2), по малым значениям ξ и полагая $t' = a + b\xi^\alpha$, легко получить $a = 0$ и $\alpha = 1$. Таким образом, $t' = b\xi$ при малых ξ , т. е. если $\xi = 0$, то и $t' = 0$.

Решение интегрального уравнения (4.3) легко может быть получено на ЭЦВМ для любых характеристик материала, т. е. для любых значений n . Однако для иллюстрации проведенного анализа можно воспользоваться следующим приближенным методом, который легко осуществить для целых значений показателя n (для простоты принято $n = 1$). Аппроксимируем функции $M_{\varphi 1}(\xi, \rho)$ для каждого ξ многочленами по ρ , функцию t' также представим в виде многочлена

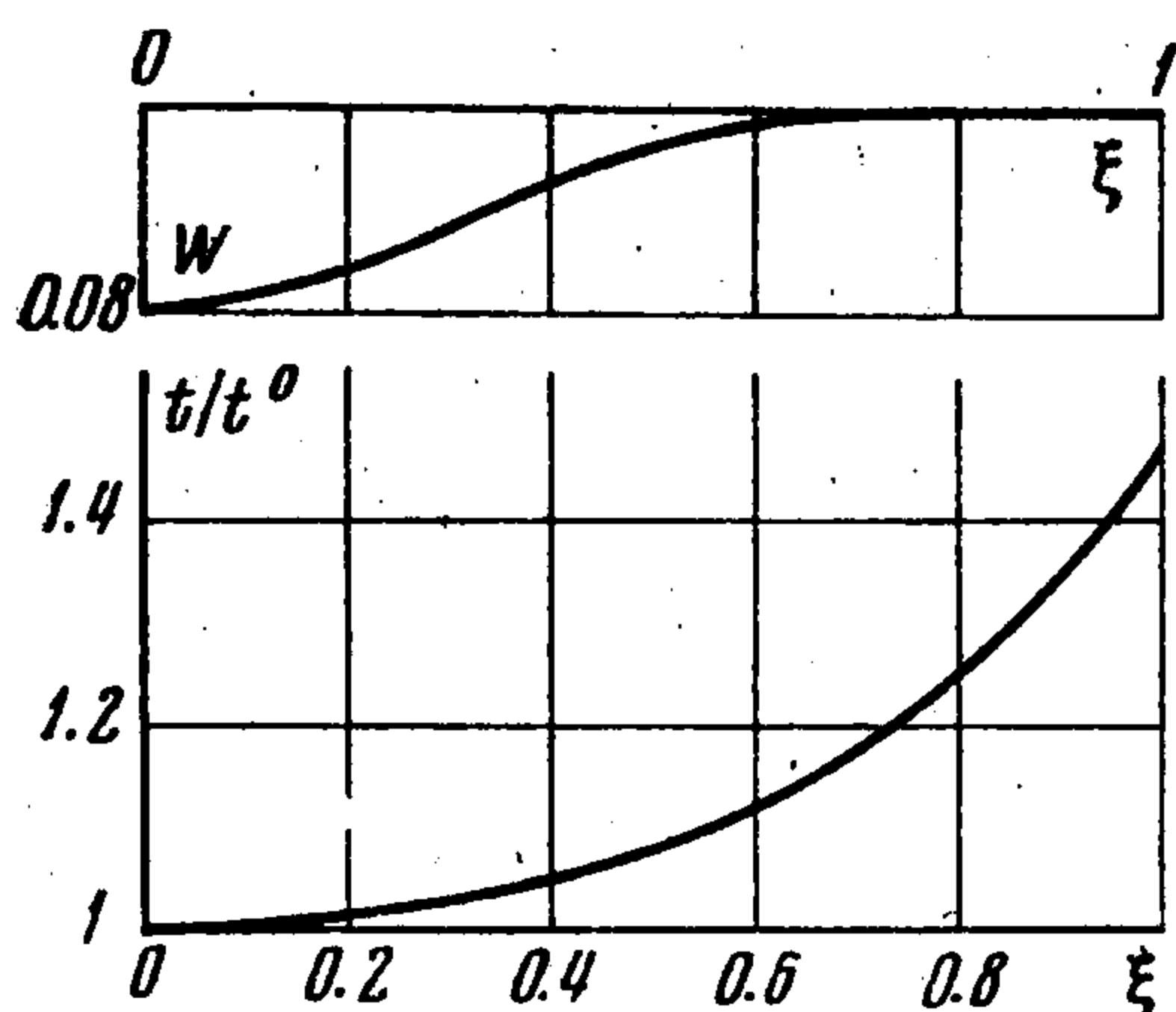
$$t' = a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots + a_s\rho^s = \sum_{i=1}^s a_i\rho^i \quad (4.4)$$

Внесем выражение (4.4) в уравнение (4.3) и потребуем удовлетворения его при $\xi = \xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$). В результате получается система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_i . Графическое интегрирование зависимости $t'(\xi)$ позволяет определить и саму функцию $t(\xi)$, которая приведена на фиг. 4. (При интегрировании принято $n = 1$, $s = 5$.) Видно, что для выбранной величины нагрузки ($k = 4$) время прохождения пластической области от центра до края пластинки очень незначительно и составляет лишь $0,47 t_0$. В момент времени $t_2 = 1,47 t_0$ вся пластинка окажется в пластическом состоянии, причем в области $0 \leq \xi \leq \rho_0^* = 0,67$

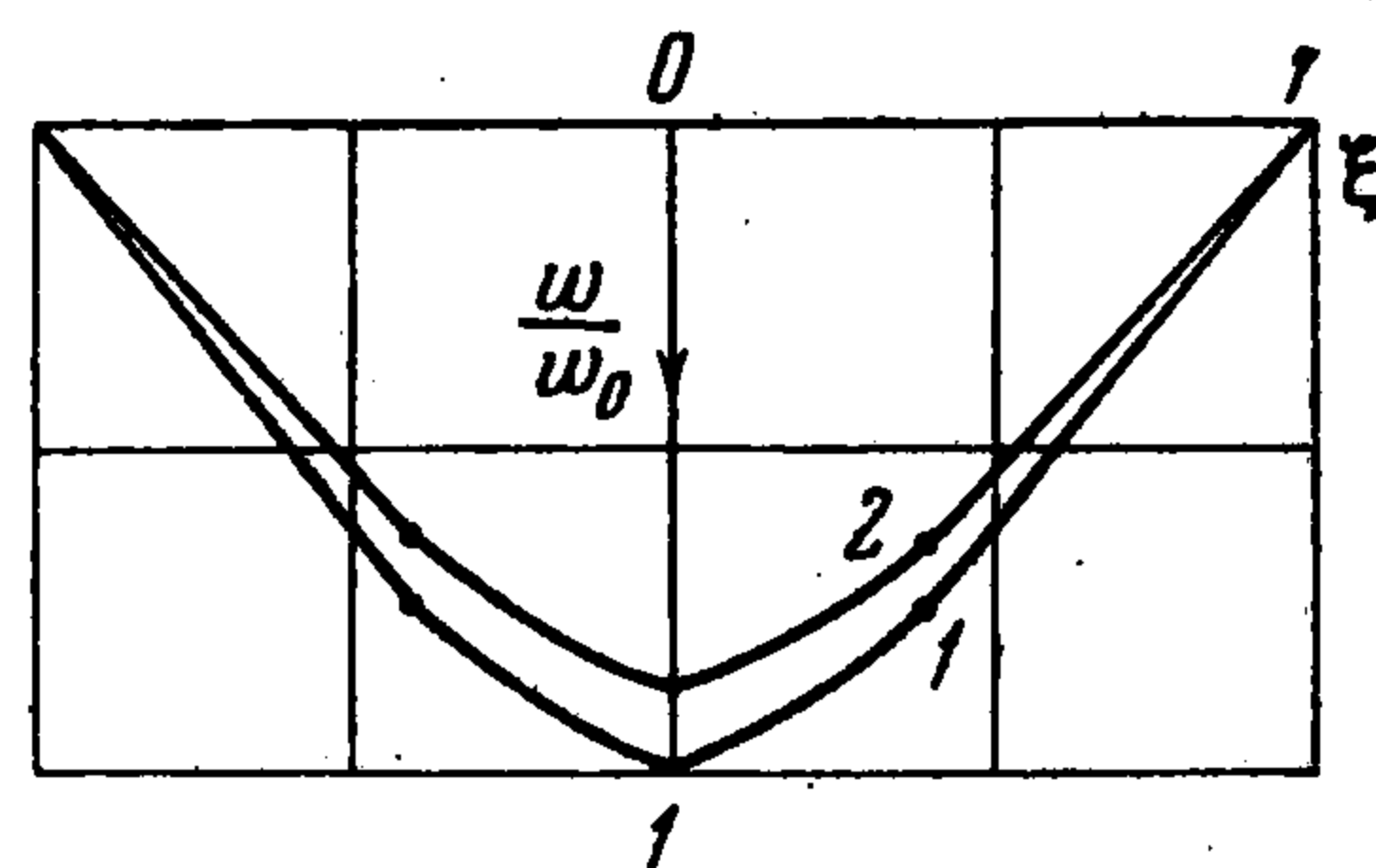
будет состояние A , в котором прогибы определяются формулой (4.1), а в остальной части пластинки — состояние AB , в котором прогибы тождественно равны нулю. На фиг. 4 приведена также и форма прогибов пластинки в тот момент, когда пластическая область достигнет свободно опертого края и вся пластинка перейдет в пластическое состояние; по оси ординат отложена безразмерная величина $W = \omega t / \rho t_0^2$. После того как пластическая область займет всю пластинку, начинается движение такое же, как и в случае без запаздывания текучести. Отличие здесь состоит лишь в начальных условиях задач.

В данной работе рассматривается случай, когда нагрузка, приложенная к пластинке, действует в течение лишь некоторого малого промежутка времени, а затем снимается. Оказывается, что в зависимости от продол-

жительности действия нагрузки влияние запаздывания текучести



Фиг. 4



Фиг. 5

по-разному скажется на величине остаточных прогибов. Если продолжительность импульса t_3 мала, так что в пластинке еще не успела появиться пластическая деформация (способность материала к запаздыванию еще не исчерпана ни в одной точке, $0 \leq t_3 < t_0$), или же осуществляется тот этап нагружения, при котором хотя и распространяется в пластинке пластическая область AB , но прогибы пока еще тождественно равны нулю ($t_0 \leq t_3 < t_1 = 1.07 t_0$), то в этом случае после снятия нагрузки пластинка сразу же опять становится жесткой, моменты везде падают до нуля.

Случай, когда снятие нагрузки происходит в момент времени t_3 такой, что имеются две пластические и жесткая зоны ($1.07 t_0 \leq t_3 < 1.47 t_0$), соответствует задаче об изгибе пластинки, когда на некоторой ее части ($0 \leq \xi \leq \rho_0$) в начальный момент времени заданы прогибы и скорости прогибов. Однако этот случай не представляет большого практического значения, так как время распространения пластической зоны ($0.40 t_0$) очень мало, осуществить разгрузку именно в этом промежутке довольно трудно.

Наиболее важен, по-видимому, случай, когда разгрузка осуществляется в тот момент, когда уже вся пластинка находится в пластическом состоянии. Анализ ее движения здесь аналогичен анализу задачи без запаздывания текучести. На фиг. 5 приведены формы остаточных прогибов в задачах с учетом (кривая 2) и без учета (кривая 1) запаздывания текучести, отнесенные к максимальному прогибу в задаче без запаздывания. (Время действия нагрузки здесь $t_3 = 20 t_0$). В задаче без запаздывания текучести общее время движения вплоть до полной остановки (при $t_3 = 20 t_0$) будет $T = 80 t_0$, а с учетом запаздывания $T = 74.1 t_0$.

Из фиг. 5 видно, что учет запаздывания текучести приводит к уменьшению остаточных прогибов. Это уменьшение связано с двумя первыми

этапами движения, в течение которых вообще никаких прогибов нет. Первый из них соответствует жесткому состоянию всей пластинки, пока еще несущая способность нигде не исчерпана, а второй соответствует распространению пластической области AB , которая также характеризуется отсутствием прогибов. Сама форма пластинки тоже будет различной в этих двух задачах. Меридиан пластинки в задаче без запаздывания искривлен при $0 \leq \xi \leq \rho^*$, где ρ^* — координата образования стационарной шарнирной окружности в пластинке, находящейся под нагрузкой. Эта координата, согласно [9], определяется условием

$$(1 - \rho^*)^2(1 + \rho^*) = 2/k$$

При $\xi > \rho^*$ меридиан прямолинеен, причем его наклон в точке $\xi = 0$ не равен нулю, а при $\xi = \rho^*$ будет иметь разрыв. В задаче с учетом запаздывания текучести меридиан искривлен для значений $0 \leq \xi \leq \rho_0^*$ ($\rho_0^* = \rho_0(t_2)$, где $t_2 = 1.47t_0$ и соответствует моменту, в который пластическая область выйдет на край пластинки), причем в точке $\xi = \rho_0^*$ разрыва в наклоне нет. Однако разрыв в наклоне будет в точке $\xi = \rho^*$, соответствующей предыдущей задаче.

Прогибы, приобретенные за время, в течение которого пластическая область распространится по всей пластинке и выйдет на край, оказываются чрезвычайно малыми, поэтому различие в форме меридиана имеет значение лишь при временах действия импульса, сравнимых по величине с временем запаздывания в центре пластинки $\xi = 0$.

Поступила 21 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Модель упруго-пластической среды с запаздыванием текучести. ПМТФ, 1968, № 3.
2. Ломакин Е. В. Влияние запаздывания текучести на распространение пластической области в толстостенной трубе под действием динамической нагрузки. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
3. Суворова Ю. В. Распространение упруго-пластических волн в стержнях с учетом запаздывания текучести. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 2.
4. Работнов Ю. Н., Суворова Ю. В. Динамика жестко-пластической балки с запаздыванием текучести. Инж. ж. МТТ, 1968, № 6.
5. Суворова Ю. В. Запаздывание текучести в сталях (обз. эксперим. работ). ПМТФ, 1968, № 3.
6. Wood D. S., Clark D. S. The influence of temperature upon the time delay for yielding in annealed mild steel. Trans. Amer. Soc. Metals, 1951, vol. 43, pp. 571—586.
7. Ohmori M., Yoshinaga Y. Effect of strain rate on the compressive deformation resistance of steel. Proc. 11 th Japan Congr. Mater. Res., Tokyo, 1967, Kyoto, 1968.
8. Саймондс П. С., Мендел Т. Импульсивное нагружение пластических балок с осевым закреплением. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1962, № 5.
9. Гопкинс, Прагер. Динамика пластической круглой пластинки, Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1955, № 3.