ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra V. Leçons sur les fonctions de lignes. Paris, 1913.
2. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
3. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1969.
4. Ильюшин А. А. Метод аппроксимации для расчета конструкций по линейной теории термовязкоупругости. Механика полимеров, 1968, № 2.
5. Быков Д. Л. Об одном методе определения напряжений и деформаций в линейно-вязко-упругих телах. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
6. Михлин С. Г. Дальнейшее исследование функций Коссера. Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ., астрон., 1967, № 7, вып. 2.
7. Победря Б. Е. О разрешимости задач теории упругости контактного типа. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
8. Бондарева В. Ф. Контактная задача для весомого полушара. Теоретические исследования в области физики и метрологии. Тр. метрологических ин-тов СССР, вып. 119 (199), М., Изд-во стандартов, 1970.
9. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.

К АВТОМОДЕЛЬНЫМ РЕШЕНИЯМ ВТОРОГО РОДА В ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В. И. Керчман (Москва)

Чтобы некоторое автомодельное решение было асимптотическим представлением определенного класса неавтомодельных движений, необходимо, чтобы оно было устойчивым по отношению к малым возмущениям. В предлагаемой работе показана устойчивость в линейном приближении автомодельных решений второго рода задачи Коши для уравнения упруго-пластического режима фильтрации, построенных в работе [1], и построено решение аналогичной осесимметричной задачи.

1. Как показано в [1], автомодельное решение задачи Коши для одномерного уравнения упруго-пластической фильтрации

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad a^2(z) = a_1^2 \ (z < 0); \qquad a_2^2 \ (z \geqslant 0) \tag{1.1}$$

представляется в виде

$$U_0 - u(x, t) = \frac{A}{(a_1^2 t)^{1/2(1+\alpha)}} f(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{a_1^2 t}} \tag{1.2}$$

Здесь функция f выражается через функции параболического цилиндра, при этом показатель α и значение $\xi = \xi_0$ такое, что $\partial u / \partial t = 0$ при $x = x_0(t) = \xi_0\sqrt{a_1^2 t}$, определяются из системы уравнений

$$D_{\alpha+2}(\xi_0 / \sqrt{2}) = 0, \quad M(-1 - {}^1/_2\alpha, {}^1/_2; {}^1/_4\xi_0^2\varepsilon^{-1}) = 0, \quad \varepsilon = a_2^2 / a_1^2 \tag{1.3}$$

Рассмотрим решение задачи Коши, начальные данные которой есть слабо возмущенное в некоторый момент t_0 автомодельное решение

$$U_0 - u(x, t_0) = A\,[f(\xi) + \mu v(\xi, t_0)]\,(a_1^2 t_0)^{-1/2(1+\alpha)}$$

Здесь μ мало, а функция $v(\xi, t_0)$ такова, что $u(x, t_0)$, как и автомодельное решение, имеет только две точки перегиба. Поверхность, на которой $\partial u / \partial t = 0$, при этом также возмущается и движется по закону

$$x_1(t) = [\xi_0 + \beta_1(t)]\sqrt{a_1^2 t}, \qquad x_2(t) = -[\xi_0 + \beta_2(t)]\sqrt{a_1^2 t}$$

Подставляя возмущенное решение (1.1) и переходя к переменной $\tau = \ln t$, получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\xi}{2}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1+\alpha}{2} v \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\xi}{2}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1+\alpha}{2} v + \frac{\varepsilon - 1}{\mu}\frac{d^2 f}{d\xi^2} \qquad (\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 + \beta_1(t)) \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\xi}{2}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1+\alpha}{2} v \qquad (\xi_0 + \beta_1(t) \leqslant \xi < \infty)$$

и аналогичные уравнения при $\xi < 0$.

Линеаризуем условие $\partial u / \partial t = 0$ при $\xi = \xi_0 + \beta_1(t)$, найдем

$$\mu \left[\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{1+\alpha}{2} v\right]_{\xi=\xi_0} - \frac{1+\alpha}{2} f'(\xi_0)\,\beta_1(t) = 0$$

Таким образом, смещение границы $\beta_1(t)$ пропорционально величине малого возмущения. Производная $d^2 f / d\xi^2 = 0$ при $\xi = \xi_0$, поэтому неоднородность в промежуточной области не дает скачка $\partial v / \partial \xi$ при $\mu \to 0$. Линеаризуя (1.4), получим для v линейное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\xi}{2}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1+\alpha}{2} v \qquad (|\xi| \leqslant \xi_0)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\xi}{2}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1+\alpha}{2} v \qquad (|\xi| \leqslant \xi_0)$$

Здесь v и $\partial v / \partial \xi$ непрерывны при $\xi = \xi_0$.

Положим $v = \Sigma w_n(\xi) \exp(-{}^1/_2 \lambda_n \tau)$. Для доказательства устойчивости необходимо показать, что все собственные значения λ неотрицательны, возмущения автомодельного решения убывают при $t \to \infty$ не медленнее его самого. Для определения функций $w(\xi)$ имеем уравнение

$$\varepsilon \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2}\frac{dw}{d\xi} + \frac{1+\alpha+\lambda}{2} w = 0 \qquad (|\xi| \leqslant \xi_0) \tag{1.5}$$

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2}\frac{dw}{d\xi} + \frac{1+\alpha+\lambda}{2} w = 0 \qquad (|\xi| > \xi_0)$$

Здесь w и $dw / d\xi$ должны быть непрерывны при $\xi = \xi_0$. Легко видеть, что спектр этой задачи дискретен.

В рамках линеаризованной теории достаточно рассмотреть отдельно симметричные w_1° и антисимметричные w_2° возмущения.

Симметричное решение уравнения (1.5), удовлетворяющее условиям при $\xi \to \infty$, имеет вид

$$w_1^\circ = \begin{cases} C_1 \exp(-{}^1/_8 \xi^2 \varepsilon^{-1}) \left[D_{\alpha+\lambda}(\xi/\sqrt{2\varepsilon}) + D_{\alpha+\lambda}(-\xi/\sqrt{2\varepsilon})\right], & |\xi| \leqslant \xi_0 \\ C_2 \exp(-{}^1/_8 \xi^2) D_{\alpha+\lambda}(|\xi|/\sqrt{2}), & |\xi| > \xi_0 \end{cases}$$

Здесь $D_\nu(z)$ — функции параболического цилиндра. Характеристическое уравнение для λ после перехода к вырожденным гипергеометрическим функциям приводится к виду

$$\Delta(\lambda) = (\alpha + \lambda + 1) D_{\alpha+\lambda}(\zeta_0) M(-1 - {}^1/_2(\alpha + \lambda), {}^1/_2; {}^1/_2 \zeta_0^2 \varepsilon^{-1}) + D_{\alpha+\lambda+2}(\zeta_0) M(-{}^1/_2(\alpha + \lambda), {}^1/_2; {}^1/_2 \zeta_0^2 \varepsilon^{-1}) \doteq 0 \tag{1.6}$$

Здесь α и $\zeta_0 = \xi_0 / \sqrt{2}$ определяются из (1.3). Используя (1.3), легко видеть, что $\lambda_0 = 0$ является корнем уравнения (1.6). Покажем, что остальные его корни положительны. Уравнение (1.6) преобразуется к виду

$$\Delta(\lambda) = \zeta_0 D_{\alpha+\lambda+1}(\zeta_0) M(-1 - {}^1/_2(\alpha + \lambda), {}^1/_2; {}^1/_2 \zeta_0^2 \varepsilon^{-1}) + D_{\alpha+\lambda+2}(\zeta_0) \left[M(-{}^1/_2(\alpha + \lambda), {}^1/_2; {}^1/_2 \zeta_0^2 \varepsilon^{-1}) - M(-1 - {}^1/_2(\alpha + \lambda), {}^1/_2; {}^1/_2 \zeta_0^2 \varepsilon^{-1})\right] = 0 \tag{1.7}$$

Согласно [2], функция $M(a+l, {}^1/_2, x_0)$ есть монотонно возрастающая функция от l при $l>0$, если x_0 — наименьший положительный корень уравнения $M(a, {}^1/_2, x)=0$. Если ζ_0 — наименьший положительный корень уравнения $D_{\alpha+2}(\zeta)=0$, то $D_{\alpha+\lambda+2}(\zeta_0)>0$ при $\lambda<0$. Поэтому $\Delta(\lambda)>0$ при $\lambda<0$.

Аналогичное антисимметричное решение имеет вид

$$w_2^\circ = \begin{cases} C_3 \exp(-{}^1/_8\xi^2\varepsilon^{-1})\,[D_{\alpha+\lambda}(\xi/\sqrt{2\varepsilon}) - D_{\alpha+\lambda}(-\xi/\sqrt{2\varepsilon})], & 0\leqslant\xi\leqslant\xi_0 \\ C_4 \exp(-{}^1/_8\xi^2)\, D_{\alpha+\lambda}(\xi/\sqrt{2}), & \xi_0\leqslant\xi<\infty \end{cases} \tag{1.8}$$

Характеристическое уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) = {} & \zeta_0 D_{\alpha+\lambda}(\zeta_0) M(-1-{}^1/_2(\alpha+\lambda-1), {}^1/_2;\ {}^1/_2\zeta_0^2\varepsilon^{-1}) + \\ & + \varepsilon D_{\alpha+\lambda+1}(\zeta_0)\,[M(-{}^1/_2(\alpha+\lambda-1), {}^1/_2;\ {}^1/_2\zeta_0^2\varepsilon^{-1}) - \\ & - M(-1-{}^1/_2(\alpha+\lambda-1), {}^1/_2, {}^1/_2\zeta_0^2\varepsilon^{-1})] = 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Сравнивая это уравнение с (1.7), легко видеть, что наименьший корень уравнения (1.9) есть $\lambda_1=1$. Таким образом, автомодельное решение оказалось устойчивым относительно малых возмущений.

Исследование показывает, что наименьший положительный корень уравнения (1.6) есть $\lambda_2=2$, а соответствующий корень уравнения (1.9) есть $\lambda_3=3$. Тогда, аналогично тому, как это сделано в работе [3], асимптотическое представление решения при больших значениях времени записывается в виде

$$U_0 - u(x, t) = \frac{A}{(a_1^2 t)^{{}^1/_2(1+\alpha)}}\left[(1+c_0)f(\xi) + \frac{c_1}{t^{1/2}}w_1(\xi) + \frac{c_2}{t}w_2(\xi) + \frac{c_3}{t^{3/2}}w_3(\xi) + o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)\right] \tag{1.10}$$

Постоянная c_0, вообще говоря, отлична от нуля, что подтверждает неопределимость постоянной A в автомодельной постановке задачи [1].

2. Аналогично исследуется устойчивость автомодельного решения типа диполя [1]. Возмущаемое решение имеет вид (1.2), где α и ξ_0 определяется из системы

$$D_{\alpha+2}(\zeta_0)=0,\quad M(-{}^1/_2\alpha, {}^3/_2;\ {}^1/_2;\ \zeta_0^2\varepsilon^{-1})=0$$

Возмущение $v(\xi, t)$ должно обращаться в нуль при $\xi=0$. Тогда собственные функции $w(\xi)$ определяются выражением (1.8). Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} & (\alpha+\lambda) D_{\alpha+\lambda}(\zeta_0)\, M(-{}^1/_2(\alpha+\lambda+1), {}^3/_2;\ {}^1/_2\zeta_0^2\varepsilon^{-1}) + \\ & + D_{\alpha+\lambda+2}(\zeta_0)\, M(1-{}^1/_2(\alpha+\lambda+1), {}^3/_2;\ {}^1/_2\zeta_0^2\varepsilon^{-1}) = 0 \end{aligned}$$

Наименьшим корнем этого уравнения будет $\lambda=0$, т. е. решение типа диполя устойчиво.

3. Методом, предложенным в [1], построим автомодельное решение задачи об упруго-пластической фильтрации от мгновенного осесимметричного источника.

Для уравнения упруго-пластического режима фильтрации

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Delta u \tag{3.1}$$

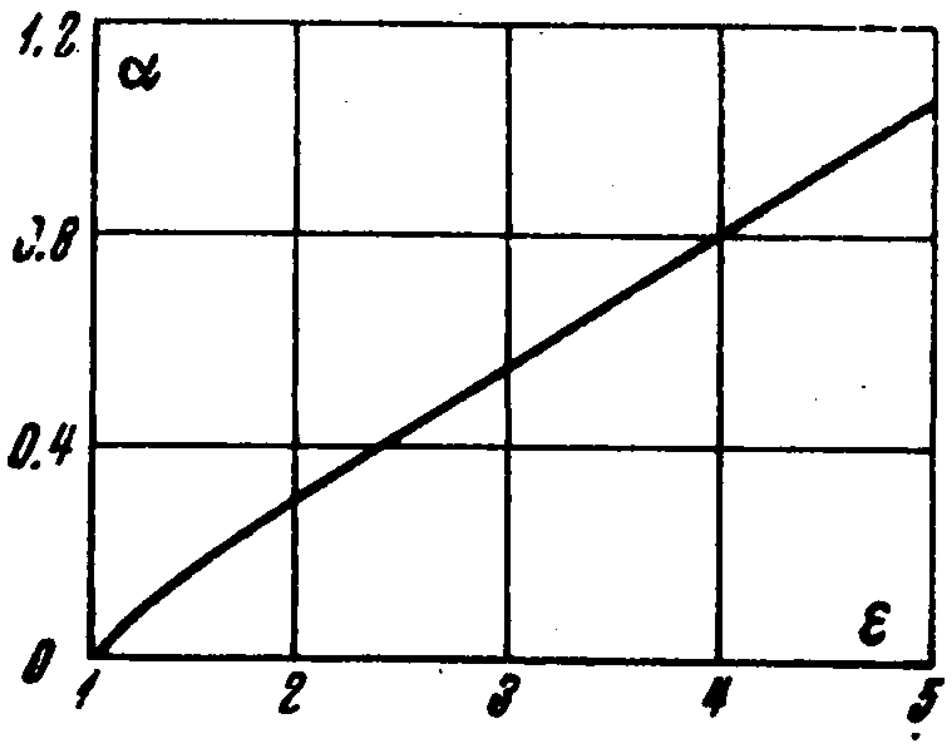
поставим неавтомодельную задачу Коши с осесимметричными начальными данными (ρ — цилиндрическая координата)

$$U_0 - u(\rho, 0) = \frac{Q}{2\pi R^2}u_0\left(\frac{\rho}{R}\right),\qquad \int_0^\infty u_0(r)\,r\,dr = 1 \tag{3.2}$$

Анализ размерностей позволяет представить решение в виде

$$U_0 - u(\rho, t) = \frac{Q}{a_1^2 t} F(\xi, \eta; \varepsilon), \quad \xi = \frac{\rho}{\sqrt{a_1^2 t}}, \quad \eta = \frac{R}{\sqrt{a_1^2 t}}, \quad \varepsilon = \frac{a_2^2}{a_1^2}$$

Предположение о том, что при стремлении η к нулю функция F имеет конечную асимптотику, будет верным лишь в линейном случае $\varepsilon = 1$. В общем случае можно предположить, что существует такое α, что при $\eta \to 0$ существует $\lim [\eta^{-\alpha} F(\xi, \eta; \varepsilon)] = f(\xi; \varepsilon)$. Тогда автомодельное решение задачи (3.1), (3.2) ищется в виде



$$U_0 - u(\rho, t) = \frac{A}{(a_1^2 t)^{1+1/2\alpha}} f(\xi; \varepsilon) \tag{3.3}$$

Уравнение для функции принимает вид (3.4)

$$\varepsilon \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{\varepsilon}{\xi} + \frac{\xi}{2}\right) \frac{df}{d\xi} + \frac{2+\alpha}{2} f = 0 \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0)$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{2}\right) \frac{df}{d\xi} + \frac{2+\alpha}{2} f = 0 \qquad (\xi_0 \leqslant \xi < \infty)$$

Решение уравнения (3.4), регулярное при $\xi = 0$ и удовлетворяющее условию

$$\int_0^\infty f(\xi)\, \xi^{\alpha+1} d\xi = \frac{1}{2\pi}$$

выражается [2] через вырожденные гипергеометрические функции M и U

$$f(\xi) = \begin{cases} B \exp(-{}^1/_4 \xi^2 \varepsilon^{-1})\, M(-{}^1/_2\alpha, 1; {}^1/_4 \xi^2 \varepsilon^{-1}), & 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 \\ C \exp(-{}^1/_4 \xi^2)\, U(-{}^1/_2\alpha, 1; {}^1/_4 \xi^2), & \xi_0 \leqslant \xi < \infty \end{cases}$$

Условие $\partial u / \partial t = 0$ при $\rho = \xi_0 \sqrt{a_1^2 t}$ дает систему трансцендентных уравнений для определения α и ξ_0

$$M(-{}^1/_2\alpha, 2; z_0 \varepsilon^{-1}) - 2M(-1 - {}^1/_2\alpha, 1; z_0 \varepsilon^{-1}) = 0$$

$$U(-{}^1/_2\alpha, 2; z_0) + 2U(-1 - {}^1/_2\alpha, 1; z_0) = 0 \qquad (z_0 = {}^1/_4 \xi_0^2)$$

Приводим значения α, вычисленные для некоторых значений ε

$\varepsilon = 1.1$	1.2	1.5	2.0	3.0	4.0
$\alpha = 0.03$	0.065	0.16	0.32	0.57	0.81

Характер зависимости $\alpha(\varepsilon)$ представлен на фигуре. При $\varepsilon = 1$ получается $\alpha = 0$, что дает классическое решение Пуассона. При $\varepsilon > 1$ имеем $\alpha > 0$ так же, как в одномерном случае.

Автор благодарит Г. И. Баренблатта за предложенную задачу и ценные замечания и Г. И. Сивашинского за внимание к работе.

Поступила 16 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Сивашинский Г. И. Автомодельные решения второго рода в нелинейной фильтрации. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
2. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. Washington, 1964.
3. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И. Об асимптотических свойствах автомодельных решений уравнений нестационарной фильтрации газа. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 4.