Грани условия пластичности максимального приведенного напряжения соответствует ребро призмы диссипативной функции, которое можно рассматривать как пересечение плоскостей

$$D_1 = 2k\lambda = {}^2/_3 k\,(e_i - e_j), \qquad D_2 = {}^2/_3 k\,(e_i - e_k) \tag{16}$$

Для ребра призмы максимального приведенного напряжения

$$2\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k = \pm 2k, \qquad 2\sigma_j - \sigma_k - \sigma_i = \pm 2k$$

имеет место

$$e_i = 2\lambda - \mu, \quad e_j = -\lambda + 2\mu, \quad e_k = -\lambda - \mu$$

Выражение диссипативной функции имеет вид $D = 2k\,|\,e_i + e_j\,|$.

Легко получить, что диссипативная функция определяется из соотношения

$$D^3 - 2k^2 J_2 D + 8k^3 J_3 = 0$$

Наконец, для условия пластичности Мизеса $\sigma_{ij}'\sigma_{ij}' = 2k^2$ имеет место $D = k\sqrt{e_{ij}e_{ij}}$.

В случае плоской деформации все условия пластичности сводятся к одному $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, $\sigma_1 > \sigma_2$. Диссипативная функция имеет вид

$$D = k\sqrt{2e_{ij}e_{ij}} = k\sqrt{2}\,(e_x^2 + e_y^2 + 2e_{xy}^2)^{1/2} \tag{17}$$

Согласно (11), (17), получим

$$\sigma_x' = ke_x\sqrt{2/J_2}, \quad \sigma_y' = ke_y\sqrt{2/J_2}, \quad \tau_{xy} = ke_{xy}\sqrt{2/J_2} \tag{18}$$

Подставляя (18) в уравнение равновесия и присоединяя уравнение несжимаемости $e_x + e_y = 0$, получим искомые уравнения.

Аналогично могут быть рассмотрены другие частные случаи.

Авторы благодарят Г. И. Быковцева за ценные замечания.

Поступила 5 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Прагер В. Проблемы теории пластичности М., Физматгиз, 1958.
2. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М., «Наука» 1966.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

А. Б. Ефимов, В. И. Малый

(Москва)

Строится приближенное решение задач линейной вязкоупругости. Способ применим как для нестареющих, так и для стареющих материалов, а также в случае численного решения соответствующей упругой задачи. Дается оценка точности построенного приближенного решения. В качестве иллюстрации рассматривается задача о деформировании весомого вязко-упругого полушара, лежащего на горизонтальном гладком основании.

Решение квазистатических задач линейной вязкоупругости при стационарных границах тела сводится к расшифровке функций операторов вязкоупругости [1-3]. В изотропном случае вязко-упругие свойства материала описываются двумя операторами Е и ν. От оператора Е решение зависит простым образом, причем оператор Е определяется из простейших опытов на ползучесть или релаксацию. Нетравиальной остается зависимость от оператора ν, который к тому же значительно труднее определять экспериментально.

При сложной зависимости решения от коэффициента Пуассона приближенное решение может быть получено по методу аппроксимаций [3-5].

1. Рассмотрим какой-либо параметр напряженно-деформированного состояния $f(\mathbf{r}, \nu, t)$ нагруженного упругого тела, зависимость которого от времени определяется изменением во времени граничных условий. Решение соответствующей вязко-упругой задачи получается заменой в функции f константы ν на оператор $\boldsymbol{\nu}$. Определение точного значения $f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\nu}, t)$ трудоемко, а подчас и невыполнимо. Построим приближенное решение.

Упругое решение есть аналитическая функция [6, 7] комплексной переменной ν в полосе $(-1 < \operatorname{Re}\nu < 1/2)$, поэтому оно представимо рядом Тейлора в окрестности любой точки $\nu_0 \in (-1, 1/2)$

$$f(\mathbf{r}, \nu, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (\nu - \nu_0)^l a_l(\mathbf{r}, \nu_0, t) \tag{1.1}$$

В общем случае стареющих материалов оператор $\boldsymbol{\nu}$ представляется в виде

$$\boldsymbol{\nu}\varphi(t) = \nu_1(t)\varphi(t) + \int_0^t K_\nu(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau$$

Согласно (1.1), решение вязко-упругой задачи можно свести к определению произвольных степеней интегрального оператора. Для больших значений l, вообще говоря, при этом возникают трудности того же порядка, что и при непосредственной расшифровке функции $f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\nu}, t)$, поэтому ограничимся первыми m членами ряда (1.1). Оценим точность построенного таким образом приближенного решения $f_m(\mathbf{r}, \boldsymbol{\nu}, t)$

$$\max_t |f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\nu}, t) - f_m(\mathbf{r}, \boldsymbol{\nu}, t)| \leqslant \quad (0 \leqslant t \leqslant T) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{l=m+1}^{\infty} \max_t |(\boldsymbol{\nu} - \nu_0)^l a_l(\mathbf{r}, \nu_0, t)| \leqslant \sum_{l=m+1}^{\infty} \|\boldsymbol{\nu} - \nu_0\|^l \|a_l(\mathbf{r}, \nu_0, t)\| \tag{1.2}$$

где введены следующие обозначения для норм интегральных операторов и функций [9]:

$$\|\boldsymbol{\nu} - \nu_0\| = \max_t \left[|\nu_1(t) - \nu_0| + \int_0^t |K_\nu(t, \tau)|\,d\tau \right]$$
$$\|a_l(\mathbf{r}, \nu_0, t)\| = \max_t |a_l(\mathbf{r}, \nu_0, t)| \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1.3}$$

Коэффициенты Тейлора a_l выражаются через значения функции f при комплексных значениях аргумента ν на окружности $|\nu - \nu_0| = r$, расположенной целиком в области аналитичности функции f

$$a_l(\mathbf{r}, \nu_0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\mathbf{r}, \nu, t) - f_m(\mathbf{r}, \nu, t)}{(\nu - \nu_0)^{l+1}}\,d\nu \qquad (l > m)$$

Отсюда следует оценка для коэффициентов Тейлора a_l

$$|a_l(\mathbf{r}, \nu_0, t)| \leqslant \frac{\Delta(\mathbf{r}, \nu_0, t)}{r^l} \qquad (l > m)$$

$$\Delta(\mathbf{r}, \nu_0, t) = \max_\nu |f(\mathbf{r}, \nu, t) - f_m(\mathbf{r}, \nu, t)| \qquad (\nu \in \Gamma_r)$$

а затем и ряда (1.2)

$$\max_t |f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\nu}, t) - f_m(\mathbf{r}, \boldsymbol{\nu}, t)| \leqslant M(\mathbf{r}, \nu_0) \frac{r}{r - \|\boldsymbol{\nu} - \nu_0\|} \left(\frac{\|\boldsymbol{\nu} - \nu_0\|}{r} \right)^{m+1}$$
$$M(\mathbf{r}, \nu_0) = \max_t \Delta(\mathbf{r}, \nu_0, t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1.4}$$

Таким образом, погрешность приближенного решения $f_m(\mathbf{r}, \nu, t)$ можно легко оценить, если вычислены значения упругого решения $f(\mathbf{r}, \nu, t)$ на окружности Γ_r комплексной плоскости ν. Оценка тем сильнее, чем больше в аппроксимации удержано членов ряда Тейлора.

В случае, когда внешние нагрузки изменяются пропорционально одному параметру $\psi(t)$, или являются линейной комбинацией k однопараметрических нагрузок с параметрами $\psi_j(t)$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$, зависимость решения вязко-упругой задачи от оператора ν имеет вид

$$f(\mathbf{r}, \nu, t) = \sum_{j=1}^{k} f_j(\mathbf{r}, \nu)\, \psi_j(t)$$

и все рассуждения проводятся не для функции $f(\mathbf{r}, \nu, t)$, а для каждого оператора $f_j(\mathbf{r}, \nu)$. Оценка (4) переходит в следующую оценку для нормы оператора невязки $\varphi_j(\mathbf{r}, \nu)$

$$\|\varphi_j(\mathbf{r}, \nu)\| \leqslant M_j(\mathbf{r}, \nu_0)\, \frac{r}{r - \|\nu - \nu_0\|} \left(\frac{\|\nu - \nu_0\|}{r}\right)^{m_j+1} \tag{1.5}$$

$$\varphi_j(\mathbf{r}, \nu) = f_j(\mathbf{r}, \nu) - \sum_{i=0}^{m_j} a_i(\mathbf{r}, \nu_0)(\nu - \nu_0)^i$$

$$M_j(\mathbf{r}, \nu_0) = \max_\nu |\varphi_j(\mathbf{r}, \nu)| \qquad (\nu \in \Gamma_r)$$

Аналогичные построения и оценки нетрудно провести, разлагая решение по некоторой аналитической функции коэффициента Пуассона.

2. В качестве примера рассмотрим задачу о весомом полушаре, лежащем на гладком горизонтальном основании. Материал полушара примем линейно вязко-упругим со старением.

Простой подстановкой в уравнения равновесия и граничные условия можно убедиться, что выражение

$$u_\alpha(\mathbf{r}, t) = \gamma R^2 \mathbf{E}^{-1} u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu)\, \theta(t)$$

есть решение вязко-упругой задачи, если $\gamma R^2 E^{-1} u_\alpha^0(\mathbf{r}, \nu)$ — решение соответствующей упругой задачи. Здесь γ—удельный вес материала, R—радиус полушара, $\mathbf{E}$ — оператор Юнга, $\theta(t)$—единичная функция Хевисайда. Оператор Пуассона ν для стареющих материалов в нашем случае выражается через объемный и сдвиговый операторы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{G}$ следующим образом:

$$\nu = {}^1/_2\,(3\mathbf{K} - 2\mathbf{G})(3\mathbf{K} + \mathbf{G})^{-1}$$

Оценим безразмерное перемещение $u_\alpha^0(\mathbf{r}, \nu)\, \theta(t)$. Согласно (1.5), имеем

$$\max_t |u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu)\,\theta(t) - u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu_0)| \leqslant \|u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu) - u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu_0)\| \leqslant \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

$$\leqslant M_\alpha(\mathbf{r})\, \frac{\|\nu - \nu_0\|}{r - \|\nu - \nu_0\|} = \delta(\mathbf{r}, T) \qquad M_\alpha(\mathbf{r}) = \max_\nu |u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu) - u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu_0)| \quad (\nu \in \Gamma_r$$

Таким образом, для оценки точности приближенного решения $u_\alpha^\circ(r, \nu_0)$ достаточно построить решение упругой задачи $u_\alpha^0(\mathbf{r}, \nu)$ для значений ν на комплексной окружности Γ_r

$$\nu = \nu_0 + r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

что не вызывает затруднений как в случае, когда упругое решение дается аналитическим выражением, так и при численном его определении.

Оценим, например, перемещение вершины A полушара. При $\nu_0 = 0.25$ имеем [8]

$$u^\circ(A, \nu_0) = -0.426$$

Приводим значения $\operatorname{Re} u^\circ(A, \nu)$ и $\operatorname{Im} u^0(A, \nu)$, вычисленные тем же численным методом для некоторых значений φ *град* на окружности Γ_r $(r = 0.25)$

$\varphi =$	0	18	36	54	72	90
$-\operatorname{Re} u^\circ =$	0.439	0.439	0.437	0.435	0.431	0.427
$-\operatorname{Im} u^\circ =$	0	0.0037	0.0073	0.0104	0.0126	0.0135

$\varphi =$	108	126	144	162	180
$-\operatorname{Re} u^\circ =$	0.423	0.419	0.416	0.414	0.413
$-\operatorname{Im} u^\circ =$	0.0131	0.0112	0.0082	0.0043	0

Величина $M(A)$ в рассматриваемом случае равна 0.014, а отклонение вязко-упругого безразмерного перемещения $u^\circ(A, \nu)\,\theta(t)$ от упругого $u^\circ(A, \nu_0)$ оценивается следующим образом:

$$\max_t |u^\circ(A, \nu)\,\theta(t) - u^\circ(A, \nu_0)| \leqslant \frac{M(A)\,\|\nu - \nu_0\|}{r - \|\nu - \nu_0\|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{0.014\,\|\nu - \nu_0\|}{0.25 - \|\nu - \nu_0\|} = \delta(A, \|\nu - \nu_0\|) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{2.1}$$

Полученная оценка позволяет, не зная конкретного вида оператора ν, оценить безразмерное перемещение во времени.

Приводим значения δ для ряда значений $\Delta = \|\nu - \nu_0\|$

$\Delta =$	0.05	0.10	0.15	0.20
$\delta =$	0.0035	0.0093	0.021	0.056

Оценим собственно перемещения

$$u_\alpha(\mathbf{r}, T) = \gamma R^2 \mathrm{E}^{-1} u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu)\,\theta(t)$$

Используя интегральное представление оператора

$$\mathrm{E}^{-1}\varphi(t) = \frac{\varphi(T)}{E_0(T)} + \int_0^T K(T, t)\,\varphi(t)\,dt$$

и оценку (2.1), получаем

$$|u_\alpha(\mathbf{r}, T) - \gamma R^2 \mathrm{E}^{-1} u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu_0)\,\theta(T)| = \gamma R^2\,|\mathrm{E}^{-1}[u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu) - u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu_0)]\,\theta(T)| \leqslant \tag{2.2}$$

$$\leqslant \gamma R^2 \eta(T)\,\delta(\mathbf{r}, T)$$

$$\eta(T) = \frac{1}{E_0(T)} + \int_0^T |K(T, t)|\,dt$$

Из неравенства (2.2) непосредственно следует оценка перемещений

$$\varepsilon(T)\,u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu_0) - \eta(T)\,\delta(\mathbf{r}, T) \leqslant \frac{u_\alpha(\mathbf{r}, T)}{\gamma R^2} \leqslant \varepsilon(T)\,u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu_0) + \eta(T)\,\delta(\mathbf{r}, T)$$

где $\varepsilon(T)$—функция ползучести. Если $K(T, t) \geqslant 0$, что выполняется, по крайней мере, для нестареющих материалов, то $\eta(T)$ совпадает с функцией ползучести $\varepsilon(T)$, и оценка перемещений при помощи приближенного решения

$$\gamma R^2 \mathrm{E}^{-1} u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu_0)\,\theta(T)$$

принимает более простой вид

$$\varepsilon(T)\,[u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu_0) - \delta(\mathbf{r}, T)] \leqslant \frac{u_\alpha(\mathbf{r}, T)}{\gamma R^2} \leqslant \varepsilon(T)\,[u_\alpha^\circ(\mathbf{r}, \nu_0) + \delta(\mathbf{r}, T)]$$

Авторы благодарят Л. С. Баркову и Г. Н. Александрову за помощь в проведении численных расчетов.

Поступила 24 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra V. Leçons sur les fonctions de lignes. Paris, 1913.
2. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
3. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1969.
4. Ильюшин А. А. Метод аппроксимации для расчета конструкций по линейной теории термовязкоупругости. Механика полимеров, 1968, № 2.
5. Быков Д. Л. Об одном методе определения напряжений и деформаций в линейно-вязко-упругих телах. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
6. Михлин С. Г. Дальнейшее исследование функций Коссера. Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ., астрон., 1967, № 7, вып. 2.
7. Победря Б. Е. О разрешимости задач теории упругости контактного типа. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
8. Бондарева В. Ф. Контактная задача для весомого полушара. Теоретические исследования в области физики и метрологии. Тр. метрологических ин-тов СССР, вып. 119 (199), М., Изд-во стандартов, 1970.
9. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.

К АВТОМОДЕЛЬНЫМ РЕШЕНИЯМ ВТОРОГО РОДА В ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В. И. Керчман (Москва)

Чтобы некоторое автомодельное решение было асимптотическим представлением определенного класса неавтомодельных движений, необходимо, чтобы оно было устойчивым по отношению к малым возмущениям. В предлагаемой работе показана устойчивость в линейном приближении автомодельных решений второго рода задачи Коши для уравнения упруго-пластического режима фильтрации, построенных в работе [1], и построено решение аналогичной осесимметричной задачи.

1. Как показано в [1], автомодельное решение задачи Коши для одномерного уравнения упруго-пластической фильтрации

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad a^2(z) = a_1^2\ (z < 0); \qquad a_2^2\ (z \geqslant 0) \tag{1.1}$$

представляется в виде

$$U_0 - u(x, t) = \frac{A}{(a_1^2 t)^{1/2(1+\alpha)}} f(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{a_1^2 t}} \tag{1.2}$$

Здесь функция f выражается через функции параболического цилиндра, при этом показатель α и значение $\xi = \xi_0$ такое, что $\partial u / \partial t = 0$ при $x = x_0(t) = \xi_0 \sqrt{a_1^2 t}$, определяются из системы уравнений

$$D_{\alpha+2}(\xi_0 / \sqrt{2}) = 0, \quad M(-1 - 1/_2\alpha, 1/_2; 1/_4\xi_0^2\varepsilon^{-1}) = 0, \quad \varepsilon = a_2^2 / a_1^2 \tag{1.3}$$

Рассмотрим решение задачи Коши, начальные данные которой есть слабо возмущенное в некоторый момент t_0 автомодельное решение

$$U_0 - u(x, t_0) = A\,[f(\xi) + \mu v(\xi, t_0)]\,(a_1^2 t_0)^{-1/2(1+\alpha)}$$

Здесь μ мало, а функция $v(\xi, t_0)$ такова, что $u(x, t_0)$, как и автомодельное решение, имеет только две точки перегиба. Поверхность, на которой $\partial u / \partial t = 0$, при этом также возмущается и движется по закону

$$x_1(t) = [\xi_0 + \beta_1(t)]\sqrt{a_1^2 t}, \qquad x_2(t) = -[\xi_0 + \beta_2(t)]\sqrt{a_1^2 t}$$