ОБ УРАВНЕНИЯХ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ В КОМПОНЕНТАХ СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Д. Д. Ивлев, А. Д. Чернышов

(Москва, Воронеж)

Излагается вывод уравнений теории идеальной пластичности в компонентах скоростей перемещений. Полученные уравнения аналогичны уравнениям Ламе в теории упругости, когда за неизвестное принимаются перемещения.

В теории идеальной пластичности компоненты напряжений могут быть выражены через компоненты скорости перемещений по формулам [1, 2]

$$\sigma_{ij} = \partial D / \partial e_{ij} \tag{1}$$

где $D = D(e_{ij})$ — диссипативная функция, e_{ij} — компоненты скорости пластической деформации (для простоты тело полагается жестко-пластическим).

Подстановка соотношений (1) в уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \tag{2}$$

приводит к уравнениям

$$(\partial D / \partial e_{ij})_{,j} + F_i = 0 \tag{3}$$

Если перейти в (3) к компонентам скоростей перемещений u_i по формулам

$$e_{ij} = {}^1/_2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{4}$$

то три уравнения (3) определят замкнутую систему уравнений теории идеальной пластичности относительно трех компонент скорости перемещений u_i.

Эти уравнения являются аналогом уравнений Ламе в теории упругости.

Рассмотрим случай несжимаемого материала. Припишем компонентам девиатора штрих наверху

$$e_{ij}' = e_{ij} - e\delta_{ij}, \qquad e = {}^1/_3 e_{kk} \tag{5}$$

Диссипативную функцию можно представить в виде $D = D(e'_{ij}, e)$. Соотношение 1) запишется так

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial D}{\partial e_{mn}'} \frac{\partial e_{mn}'}{\partial e_{ij}} + \frac{1}{3} \frac{\partial D}{\partial e} \delta_{ij} \tag{6}$$

Обозначим $e_{11} = e_x$, $e_{12} = e_{xy} \ldots$, тогда

$$\frac{\partial e_x'}{\partial e_x} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{\partial e_y'}{\partial e_x} = \frac{\partial e_z'}{\partial e_x} = -\frac{1}{3} \qquad (xyz) \tag{7}$$

Символ (xyz) означает, что невыписанные выражения получаются круговой перестановкой индексов. Из (6), (7) найдем

$$\sigma_x = \frac{2}{3} \frac{\partial D}{\partial e_x'} - \frac{1}{3} \frac{\partial D}{\partial e_y'} - \frac{1}{3} \frac{\partial D}{\partial e_z'} + \frac{1}{3} \frac{\partial D}{\partial e}, \qquad \tau_{xy} = \frac{\partial D}{\partial e_{xy}} \qquad (xyz) \tag{8}$$

Суммируя первые три выражения (8), получим

$$\sigma = {}^1/_3 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = {}^1/_3 \partial D / \partial e \tag{9}$$

Тогда (8) примет вид

$$\sigma_x' = \frac{2}{3} \frac{\partial D}{\partial e_x'} - \frac{1}{3} \frac{\partial D}{\partial e_y'} - \frac{1}{3} \frac{\partial D}{\partial e_z'}, \qquad \tau_{xy} = \frac{\partial D}{\partial e_{xy}} \qquad (x\,y\,z) \tag{10}$$

Формулы (10) связывают компоненты девиаторов напряжений и деформаций. Для несжимаемого материала $e = 0$ и штрих наверху у компонент e_{ij} может быть опущен. Поэтому окончательно для несжимаемого материала (10) примут вид

$$\sigma_x - \sigma = \frac{\partial D}{\partial e_x} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial D}{\partial e_x} + \frac{\partial D}{\partial e_y} + \frac{\partial D}{\partial e_z}\right), \qquad \tau_{xy} = \frac{\partial D}{\partial e_{xy}} \quad (x\, y\, z) \tag{11}$$

Величина σ для несжимаемого материала не может быть определена из (9) и остается неопределенной, аналогично тому как это имеет место в теории упругости.

Подставляя соотношения (11) в уравнения равновесия (2), получим три уравнения относительно четырех неизвестных: σ, u_x, u_y, u_z.

Эту систему уравнений замыкает уравнение несжимаемости

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{12}$$

Известно [2], что грани условия пластичности в пространстве главных напряжений σ_i соответствует ребро диссипативной функции в пространстве e_i.

В этом случае формулы (11) обобщаются и принимают вид

$$\sigma_{ij}' = \sum_{k=1}^{m} \nu_k \left[\frac{\partial D_k}{\partial e_{ij}} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\left(\frac{\partial D_k}{\partial e_{11}} + \frac{\partial D_k}{\partial e_{22}} + \frac{\partial D_k}{\partial e_{33}}\right)\right] \tag{13}$$

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m = 1$$

Рассмотрим конкретные выражения диссипативной функции для условий пластичности максимального касательного напряжения (условие Треска), максимального приведенного напряжения и условия Мизеса.

Условие пластичности Треска в компонентах главных напряжений имеет вид $\sigma_i - \sigma_j\,| = 2k$.

Согласно ассоциированному закону течения, для грани призмы Треска

$$e_i = \lambda, \quad e_j = -\lambda, \quad e_k = 0, \quad \lambda \geqslant 0$$

Грани призмы Треска соответствует ребро диссипативной функции, определяемое пересечением плоскостей в пространстве главных скоростей деформаций

$$D_1 = \sigma_i e_i = 2k\lambda = 2ke_i, \qquad D_2 = -2ke_j \tag{14}$$

Из (14) и (13) легко получить исходное условие пластичности.

Если переписать соотношения (14) в компонентах тензора e_{ij}, из (13) и уравнений равновесия (2) можно получить исходные уравнения в компонентах скоростей перемещений.

Уравнения ребра призмы Треска запишем в виде

$$\sigma_i - \sigma_j = \pm 2k, \qquad \sigma_i - \sigma_k = \pm 2k$$

Отсюда

$$e_i = \lambda + \mu, \quad e_j = -\lambda, \quad e_k = -\mu$$

Выражение диссипативной функции имеет вид

$$D = \sigma_i e_i = 2k(\lambda + \mu) = 2k\,|e_i|$$

Используя выражения для второго и третьего инвариантов девиатора скорости деформации J_2, J_3, легко получить уравнение для определения диссипативной функции

$$D^3 - 2k^2 J_2 D - 8k^3 J_3 = 0, \; J_2 = e_i^2 + e_j^2 + e_k^2, \; J_3 = e_i e_j e_k \tag{15}$$

Условие пластичности максимального приведенного напряжения в компонентах главных напряжений имеет вид $2\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k\,| = 2k$.

Для грани призмы условия максимального приведенного напряжения

$$e_i = 2\lambda, \quad e_j = -\lambda, \quad e_k = -\lambda, \quad \lambda \geqslant 0$$

Грани условия пластичности максимального приведенного напряжения соответствует ребро призмы диссипативной функции, которое можно рассматривать как пересечение плоскостей

$$D_1 = 2k\lambda = {}^2/_3 k\,(e_i - e_j), \qquad D_2 = {}^2/_3 k\,(e_i - e_k) \tag{16}$$

Для ребра призмы максимального приведенного напряжения

$$2\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k = \pm 2k, \qquad 2\sigma_j - \sigma_k - \sigma_i = \pm 2k$$

имеет место

$$e_i = 2\lambda - \mu, \quad e_j = -\lambda + 2\mu, \quad e_k = -\lambda - \mu$$

Выражение диссипативной функции имеет вид $D = 2k\,|\,e_i + e_j\,|$.

Легко получить, что диссипативная функция определяется из соотношения

$$D^3 - 2k^2 J_2 D + 8k^3 J_3 = 0$$

Наконец, для условия пластичности Мизеса $\sigma_{ij}'\sigma_{ij}' = 2k^2$ имеет место $D = k\sqrt{e_{ij}e_{ij}}$.

В случае плоской деформации все условия пластичности сводятся к одному $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, $\sigma_1 > \sigma_2$. Диссипативная функция имеет вид

$$D = k\sqrt{2e_{ij}e_{ij}} = k\sqrt{2}\,(e_x^2 + e_y^2 + 2e_{xy}^2)^{1/2} \tag{17}$$

Согласно (11), (17), получим

$$\sigma_x' = ke_x\sqrt{2/J_2}, \quad \sigma_y' = ke_y\sqrt{2/J_2}, \quad \tau_{xy} = ke_{xy}\sqrt{2/J_2} \tag{18}$$

Подставляя (18) в уравнение равновесия и присоединяя уравнение несжимаемости $e_x + e_y = 0$, получим искомые уравнения.

Аналогично могут быть рассмотрены другие частные случаи.

Авторы благодарят Г. И. Быковцева за ценные замечания.

Поступила 5 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. П р а г е р В. Проблемы теории пластичности М., Физматгиз, 1958.
2. И в л е в Д. Д. Теория идеальной пластичности. М., «Наука» 1966.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

А. Б. Ефимов, В. И. Малый

(Москва)

Строится приближенное решение задач линейной вязкоупругости. Способ применим как для нестареющих, так и для стареющих материалов, а также в случае численного решения соответствующей упругой задачи. Дается оценка точности построенного приближенного решения. В качестве иллюстрации рассматривается задача о деформировании весомого вязко-упругого полушара, лежащего на горизонтальном гладком основании.

Решение квазистатических задач линейной вязкоупругости при стационарных границах тела сводится к расшифровке функций операторов вязкоупругости [1-3]. В изотропном случае вязко-упругие свойства материала описываются двумя операторами E и ν. От оператора E решение зависит простым образом, причем оператор E определяется из простейших опытов на ползучесть или релаксацию. Нетравиальной остается зависимость от оператора ν, который к тому же значительно труднее определять экспериментально.

При сложной зависимости решения от коэффициента Пуассона приближенное решение может быть получено по методу аппроксимаций [3-5].