в случае касательных контактных напряжений сравнивались не сами напряжения, а их величины, домноженные на функцию, несущую особенность. Указанные отклонения наблюдались, в основном, в окрестности концов накладки. При подсчете напряжений количество приближений m бралось таким, чтобы $\sigma(ax)$ или $\tau(ax)$ в $m+1$-м приближении не отличалось от $\sigma(ax)$ или $\tau(ax)$ в m-м приближении более чем на несколько единиц в третьей значащей цифре.

На фигуре приведены графики изменения $\sigma(ax)$ и $\tau(ax)$ при $\mu = 1$ (для расчетной схемы, показанной там же). Кривые *1* и *2* относятся соответственно к случаям $\alpha = {}^4/_5\pi$ и $\alpha = {}^2/_3\pi$. Пунктиром показаны соответствующие напряжения для случая одной изолированной накладки. Приведенные на графиках значения $\sigma(ax)$ должны быть домножены на P / F, а $\tau(ax)$ — на P / ah. Вычисления были проведены и для параметров $\alpha = {}^1/_2\pi$; ${}^2/_5\pi$ и ${}^1/_3\pi$. Соответствующие кривые (которые не приведены на графике с целью не загромождать его) расположены между кривыми *2* и пунктирными. При $\alpha = {}^1/_3\pi$ эти кривые практически совпадают с пунктирными (максимальное отклонение не превышает 15%).

Как видно из фигуры, присутствие соседних накладок не только количественно, но и качественно может изменять эпюры напряжений (кривые *1*).

В заключение заметим, что рассмотренная здесь задача эквивалентна контактной задаче для полуполосы $(-l \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant y < \infty)$, когда к ее конечной грани на отрезке $(-a \leqslant x \leqslant a)$ приклеена упругая накладка, а на полубесконечных гранях равны нулю вертикальное перемещение и нормальное напряжение.

Поступила 18 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33. вып. 5.
2. Попов Г. Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
4. Попов Г. Я. Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби. Укр. матем. ж., 1968, т. 2, № 4.
5. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
6. Ростовцев Н. А. О некоторых случаях контактной задачи. Укр. матем. ж., 1954, т. 6, № 3.

ДЕЙСТВИЕ СДВИГАЮЩЕЙ СИЛЫ И ОПРОКИДЫВАЮЩЕГО МОМЕНТА НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ШТАМП, СЦЕПЛЕННЫЙ С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

В. И. Фабрикант

(Рыбинск)

Рассмотрена задача о действии сдвигающей силы и опрокидывающего момента на круговой в плане жесткий штамп, сцепленный с трансверсально-изотропным полупространством. Найдено распределение касательных и нормальных напряжений под штампом. Получены формулы, связывающие угловое и линейное перемещение штампа с величиной сдвигающей силы и опрокидывающего момента. Заметим, что решение неосесимметричной задачи для цилиндрического штампа, сцепленного с изотропным полупространством, можно найти в работе [1].

1. Рассмотрим круговой в плане штамп радиусом a, сцепленный с трансверсально-изотропным полупространством $z \geqslant 0$. Пусть на штамп действует сдвигающая сила

T, направленная по оси x, и опрокидывающий момент M. Без нарушения общности задачи можно считать, что момент направлен по оси y. Поставим задачу определения напряжений под штампом, а также линейного u_0 и углового перемещения штампа δ.

Введем на плоскости $z = 0$ комплексные перемещения $u = u_x + iu_y$ и комплексные касательные напряжения $\tau = \tau_{zx} + i\tau_{yz}$. Воспользовавшись результатами работы [2], можно записать выражения, которые определяют перемещения точки с цилиндрическими координатами (ρ, φ, 0) от действия сосредоточенной силы с проекциями P_x, P_y, P_z, приложенной в точке (ρ_0, φ_0, 0)

$$u = \frac{1}{2R}\left\{G_1(P_x + iP_y) + G_2(P_x - iP_y)\frac{\rho e^{i\varphi} - \rho_0 e^{i\varphi_0}}{\rho e^{-i\varphi} - \rho_0 e^{-i\varphi_0}}\right\} - \frac{P_z H\alpha}{\rho e^{-i\varphi} - \rho_0 e^{-i\varphi_0}}$$

$$w = H\alpha \operatorname{Re}\left\{\frac{P_x + iP_y}{\rho e^{i\varphi} - \rho_0 e^{i\varphi_0}}\right\} + \frac{P_z H}{R} \tag{1.1}$$

Здесь

$$G_1 = \beta + \gamma_1\gamma_2 H, \quad G_2 = \beta - \gamma_1\gamma_2 H$$

$$H = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) A_{11}}{2\pi (A_{11}A_{33} - A_{13}^2)}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{A_{11}A_{33}} - A_{13}}{A_{11}(\gamma_1 + \gamma_2)}, \quad \beta = \frac{\gamma_3}{2\pi A_{44}}$$

$$\gamma_{1,2}^2 = N \pm \sqrt{N^2 - A_{33}/A_{11}}, \quad \gamma_3 = \sqrt{A_{44}/A_{66}}$$

$$N = (A_{11}A_{33} - A_{13}^2 - 2A_{13}A_{44}) / 2A_{11}A_{44}$$

$$R^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\varphi - \varphi_0)$$

Здесь A_{11}, $A_{13}, \ldots$, A_{66} — упругие константы материала полупространства [3]

Формулы (1.1) и принцип суперпозиции позволяют записать интегральные уравнения основной смешанной задачи в виде

$$u = \frac{G_1}{2}\int_0^a\int_0^{2\pi} \frac{\tau(\rho_0, \varphi_0)}{R}\rho_0 d\rho_0 d\varphi_0 + \frac{G_2}{2}\int_0^a\int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{i\varphi} - \rho_0 e^{i\varphi_0}}{\rho e^{-i\varphi} - \rho_0 e^{-i\varphi_0}}\frac{\bar\tau(\rho_0, \varphi_0)}{R}\rho_0 d\rho_0 d\varphi_0 - H\alpha\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\sigma(\rho_0, \varphi_0)\rho_0 d\rho_0 d\varphi_0}{\rho e^{-i\varphi} - \rho_0 e^{-i\varphi_0}} \tag{1.2}$$

$$w = H\alpha \operatorname{Re}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\tau(\rho_0, \varphi_0)\rho_0 d\rho_0 d\varphi_0}{\rho e^{i\varphi} - \rho_0 e^{i\varphi_0}} + H\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\sigma(\rho_0, \varphi_0)}{R}\rho_0 d\rho_0 d\varphi_0$$

Представим заданные и искомые величины u, w, τ, σ в виде разложений

$$Z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n(\rho)e^{in\varphi}, \qquad Z = u, w, \tau, \sigma \tag{1.3}$$

Так как в рассматриваемой задаче $u = u_0$, $w = \delta\rho\cos\varphi$ при $\rho \leqslant a$, то уравнениям (1.2) можно удовлетворить, положив отличными от нуля только τ_0, τ_2, σ_1, σ_{-1}.

Воспользуемся легко проверяемым тождеством

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} V(\rho, \rho_0) & (\rho_0 > \rho) \\ V(\rho_0, \rho) & (\rho_0 < \rho)\end{cases} \tag{1.4}$$

$$V(\rho, \rho_0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\rho\left\{2\operatorname{Re}\left[1 - \frac{x^2}{\rho\rho_0}e^{i(\varphi-\varphi_0)}\right]^{-1} - 1\right\}\frac{dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2}\sqrt{\rho_0^2 - x^2}}$$

Подставим (1.3) и (1.4) в (1.2) и проинтегрируем по φ_0, изменив порядок интегрирования. После приравнивания одинаковых гармоник получим интегральные уравнения рассматриваемой задачи в виде

$$\frac{2G_1}{\rho^2}\int_0^\rho \frac{x^4dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\int_x^a \frac{\tau_2(s)\,ds}{s\sqrt{s^2-x^2}}+\frac{2G_2}{\rho^2}\int_0^\rho \frac{\rho^2-2x^2}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\,dx\int_x^a \frac{\bar\tau_0(s)\,sds}{\sqrt{s^2-x^2}}-\tag{1.5}$$

$$-2\pi\frac{H\alpha}{\rho^2}\int_0^\rho \sigma_1(x)\,x^2dx=0$$

$$2G_2\int_0^\rho \frac{dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\int_x^a \frac{s^2-2x^2}{s\sqrt{s^2-x^2}}\,\bar\tau_2(s)\,ds+$$

$$+2G_1\int_0^\rho \frac{dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\int_x^a \frac{\tau_0(s)\,sds}{\sqrt{s^2-x^2}}+2\pi H\alpha\int_\rho^a \sigma_{-1}(x)\,dx=u_0$$

$$2\pi H\alpha\,\mathrm{Re}\left\{e^{-i\varphi}\int_0^\rho \tau_0(x)\,\frac{x}{\rho}\,dx-e^{i\varphi}\int_\rho^a \tau_2(x)\,\frac{\rho}{x}\,dx\right\}+$$

$$+\frac{4H}{\rho}\int_0^\rho \frac{x^2dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\int_x^a \frac{\sigma_1(s)\,e^{i\varphi}+\sigma_{-1}(s)\,e^{-i\varphi}}{\sqrt{s^2-x^2}}\,ds=\delta\rho\cos\varphi$$

Исходя из вида правых частей уравнений (1.5) и учитывая, что нормальное напряжение под штампом должно быть действительной функцией, можно положить

$$\tau_0=\bar\tau_0,\quad \tau_2=\bar\tau_2,\quad \sigma_1=\sigma_{-1}$$

2. Будем искать решение системы (1.5) в виде

$$\sigma_1(s)=\sigma_{-1}(s)=\frac{1}{s}\int_0^s \frac{t\,df(t)}{\sqrt{s^2-t^2}}\tag{2.1}$$

$$\tau_0(s)=\bar\tau_0(s)=C\int_s^a \frac{df(t)}{\sqrt{t^2-s^2}}+\frac{D}{\sqrt{a^2-s^2}}$$

$$\tau_2(s)=\bar\tau_2(s)=\frac{C}{s^2}\int_s^a \frac{2t^2-s^2}{\sqrt{t^2-s^2}}\,df(t)-D\,\frac{2a^2-s^2}{s^2\sqrt{a^2-s^2}}$$

Здесь $f(t)$ — некоторая искомая функция, C и D — некоторые константы, которые определяются при решении задачи. При подстановке (2.1) в первое и второе из уравнений (1.5) они удовлетворяются тождественно, если выполнены условия

$$C=-\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2},\qquad D=\frac{C}{a}\int_0^a t\,df(t)\tag{2.2}$$

$$\pi^2D\beta+2\pi H\alpha\int_0^a \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}}=u_0\tag{2.3}$$

Подстановка (2.1) в третье из уравнений (1.5) приводит его к виду

$$\frac{8H}{\rho}\int_0^\rho \frac{xdx}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\int_0^a \ln\frac{a\sqrt{|x^2-t^2|}}{|x\sqrt{a^2-t^2}-t\sqrt{a^2-x^2}|}\,df(t)+$$

$$+2\pi\frac{H}{\rho}\frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\left[2\int_\rho^a \sqrt{t^2-\rho^2}\,df(t)-\int_0^a t\,df(t)\right]+2\pi H\alpha\frac{a}{\rho}D=\delta\rho$$

Последнее выражение путем интегрирования по частям, использования (2.2), умножения полученного результата на $\rho^2 (r^2-\rho^2)^{-1/2}$ и интегрирования по ρ от 0 до r приводит к уравнению для искомой функции $f(t)$

$$\sqrt{a^2-r^2}\int_0^a \Phi(r,t)\,dt-\lambda^2\int_0^a \Psi(r,t)\,dt=\frac{\delta}{2\pi H} \tag{2.4}$$

$$\Phi(z,t)=\frac{f(t)}{\sqrt{a^2-t^2}\,(t^2-z^2)},\qquad \lambda=\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}$$
$$\Psi(z,t)=\sqrt{a^2-t^2}\,\Phi(z,t) \tag{2.5}$$

Введем обозначения

$$Y_{c,s}(z)=\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left[\theta\ln\frac{a+z}{a-z}\right]$$

Величина θ будет определена в дальнейшем.

Найдем общее решение уравнения (2.4), когда правая часть произвольна и равна $\chi(r)$. Умножим обе части на $(r^2-x^2)^{-1}\,Y_c(r)$ и проинтегрируем по r от 0 до a, используя при этом формулу перестановки Пуанкаре — Бертрана [4]; в результате получим

$$-\frac{\pi^2}{4x^2}(1-\lambda^2)f(x)Y_c(x)+$$
$$+\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\pi\theta\int_0^a\Phi(x,t)\left[\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t}Y_s(t)-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}Y_s(x)\right]dt-$$
$$-\frac{\pi}{2}\lambda^2\operatorname{cth}\pi\theta\int_0^a\Psi(x,t)\left[\frac{Y_s(t)}{t}-\frac{Y_s(x)}{x}\right]dt=X_c(x)$$

Здесь и в дальнейшем

$$X_{c,s}(x)=\int_0^a\frac{\chi(r)}{r^2-x^2}\begin{Bmatrix}Y_c(r)\\ rY_s(r)\end{Bmatrix}dr$$

Определим величину θ из условия

$$\operatorname{th}\pi\theta-\lambda^2\operatorname{cth}\pi\theta=0,\quad \theta=\pi^{-1}\operatorname{Arth}\lambda \tag{2.6}$$

Тогда полученное громоздкое выражение упрощается

$$-\frac{\pi^2 f(x)}{4x^2\operatorname{ch}^2\pi\theta}Y_c(x)+\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\pi\theta\,\frac{Y_s(x)}{x}\left[-\sqrt{a^2-x^2}\int_0^a\Phi(x,t)\,dt+\int_0^a\Psi(x,t)\,dt\right]=X_c(x) \tag{2.7}$$

Если умножить обе части уравнения (2.4) на $r\,(r^2-x^2)^{-1}Y_s(r)$ и проинтегрировать по r от 0 до a, то можно получить

$$-\frac{\pi^2 f(x)}{4x\operatorname{ch}^2\pi\theta}Y_s(x)+\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\pi\theta\,Y_c(x)\left[\sqrt{a^2-x^2}\int_0^a\Phi(x;t)\,dt-\int_0^a\Psi(x,t)\,dt\right]=X_s(x) \tag{2.8}$$

Теперь из (2.7), (2.8) находим

$$f(x)=-\frac{4\operatorname{ch}^2\pi\theta}{\pi^2}x\left[xY_c(x)X_c(x)+Y_s(x)X_s(x)\right] \tag{2.9}$$

Полное решение уравнения (2.4) можно получить, если к выражению (2.9) добавить член вида $AY_c(x)$, являющийся решением однородного уравнения, где A — произвольная постоянная.

3. Применим полученные результаты к рассматриваемой задаче. Тогда получим

$$f(t) = \frac{\delta \operatorname{ch}^2 \pi\theta}{\pi^2 H}\left[xY_s(x) + a\theta Y_c(x)\right] + AY_c(x) \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в условия (2.2) и (2.3) и производя интегрирование, можно определить параметры

$$A = \left(u_0 - \frac{\delta a\theta\alpha}{\operatorname{th}\pi\theta}\right)\left[\frac{\pi^2 H\alpha}{\operatorname{ch}\pi\theta}\left(1 + \frac{\beta}{\gamma_1\gamma_2 H}\frac{\pi\theta}{\operatorname{th}\pi\theta}\right)\right]^{-1}, \qquad D = \frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\frac{\pi\theta}{\operatorname{sh}\pi\theta}A \tag{3.2}$$

Теперь формулы (1.4), (2.1), (3.1) и (3.2) полностью определяют напряжения под штампом. Остается найти связь между перемещениями штампа и действующими на него внешними силами.

Применяем условия статики

$$T = 2\pi\int_0^a \tau_0(\rho)\,\rho d\rho, \qquad M = \int_0^a\int_0^{2\pi}(\sigma_1 e^{i\varphi} + \sigma_{-1}e^{-i\varphi})\,\rho^2\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi$$

Произведя все выкладки, можно получить

$$T = 4\pi^2\frac{a\theta}{\operatorname{sh}\pi\theta}\frac{\alpha A}{\gamma_1\gamma_2}, \qquad M = \frac{4\delta a^3\theta}{3H\operatorname{th}\pi\theta}(1+\theta^2) - \frac{4\pi^2 a^2\theta^2}{\operatorname{ch}\pi\theta}A \tag{3.3}$$

Выражения (3.2) и (3.3) позволяют определить перемещения штампа

$$u_0 = \left[\frac{\pi\beta}{4a} + \frac{\gamma_1\gamma_2 H\operatorname{th}\pi\theta}{4a\theta(\theta^2+1)}(4\theta^2+1)\right]T + \frac{3H\alpha}{4a^2(\theta^2+1)}M$$

$$\delta = \frac{3H\alpha}{4a^3\theta(\theta^2+1)}\left[a\theta T + \frac{M}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\right] \tag{3.4}$$

В случае изотропного полупространства формулы (3.4) дают решение, совпадающее с известным [1].

Поступила 19 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
2. Chen W. T. Stresses in a transversely isotropic elastic cone under an asymmetric force at its vertex. Z. angew. Math. und Phys., 1965, vol. 16, №. 3.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1968.