

К ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

Г. А. Морарь, Г. Я. Понов

(Одесса)

Указанная в заголовке задача сводится к интегро-дифференциальному уравнению типа Прандтля с ядром Гильберта, для которого в работе [1] дан приближенный метод решения.

Здесь для приближенного решения этого уравнения (встречающегося и в других областях математической физики) использован метод ортогональных многочленов [2]. Можно полагать, что излагаемый здесь метод проще и быстрее ведет к цели. Это позволяет дать численную реализацию предлагаемого метода при сравнительно небольшом объеме вычислений.

§ 1. Пусть к бесконечной пластинке (полуплоскости) толщиной h на конечных отрезках ее границы $[-a + 2nl, a + 2nl]$, ($l > a$, $n = 0, \pm 1, \dots$) приварены (приклеены) упругие наклейки с площадью поперечного сечения F . Как показано в [1], отыскание контактного напряжения $\tau(x')$, возникающего вдоль линии контакта наклейки с полуплоскостью, связано с решением следующего уравнения:

$$\varphi(\xi) + \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\xi - \eta}{2} \varphi'(\eta) d\eta = g(\xi) \quad (|\alpha| < \pi) \quad (1.1)$$

$$\left(\int_{-\alpha}^{\xi} t(\eta) d\eta = \varphi(\xi), \lambda = \frac{E_2 h}{2\pi E_1 F}, \alpha = \frac{\pi a}{l}, \tau(a\xi/\alpha) = t(\xi) \right)$$

Здесь E_1, E_2 — соответственно модуль упругости наклейки и полуплоскости. Искомое напряжение $\tau(x')$ должно быть подчинено одному из условий равновесия

$$h \int_{-a}^a \tau(x') dx' = R, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} t(\xi) d\xi = \frac{\alpha R}{ah} \quad (1.2)$$

Здесь через R обозначена равнодействующая всех сил, приложенных к наклейке. Положим

$$\int_{-\alpha}^{\xi} t(\eta) d\eta = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sign}(\xi - \eta) t(\eta) d\eta + \frac{\alpha R}{2ah}$$

С учетом последнего выражения уравнение (1.1) может быть записано в виде

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sign}(\xi - \eta) + \frac{1}{2\pi\lambda} \operatorname{ctg} \frac{\xi - \eta}{2} \right] t(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (|\alpha| < \pi) \quad (1.3)$$

$$(f(\xi) = g(\xi) - \alpha R/2ah)$$

§ 2. Ниже часто используются формулы справочника [3]. Для краткости будем указывать только номер формулы, не повторяя каждый раз источника.

Предлагаемый приближенный метод решения уравнения (1.3) или (1.1) основывается на следующих соотношениях для полиномов Чебышева:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\xi - \eta}{2} \frac{T_m(\operatorname{tg}^{1/2} \eta \operatorname{ctg}^{1/2} \alpha)}{\sqrt{2 \cos \eta - 2 \cos \alpha} \cos^{1/2} \eta} d\eta = J_{1,m}(\xi) \quad (2.1)$$

$$J_{1,0}(\xi) = -\pi \sec^{1/2} \alpha \operatorname{tg}^{1/2} \xi \quad (m = 0)$$

$$J_{1,m}(\xi) = -\pi \csc^{1/2}\alpha (\sec^{1/2}\xi)^2 U_{m-1}(\operatorname{tg}^{1/2}\xi \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sign}(\xi - \eta) \frac{T_m(\operatorname{tg}^{1/2}\eta \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha)}{\sqrt{2 \cos \eta - 2 \cos \alpha}} \frac{d\eta}{\cos^{1/2}\eta} = J_{2,m}(\xi) \quad (2.2)$$

$$J_{2,0}(\xi) = \sec^{1/2}\alpha \arcsin(\operatorname{tg}^{1/2}\xi \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha) \quad (m = 0)$$

$$J_{2,m}(\xi) = -(m \sin \alpha \cos^{1/2}\xi)^{-1} \sqrt{2 \cos \xi - 2 \cos \alpha} U_{m-1}(\operatorname{tg}^{1/2}\xi \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Здесь $T_m(x)$, $U_m(x)$ — соответственно полиномы Чебышева первого и второго рода. Для доказательства равенства (2.1) будем исходить из известного соотношения

$$\int_{-1}^1 \ln|x-y| \frac{T_m(y) dy}{\sqrt{1-y^2}} = \begin{cases} -\pi \ln 2 & (m = 0) \\ -\pi m^{-1} T_m(x) & (m = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.3)$$

В результате замены $x = \operatorname{tg}^{1/2}\xi \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha$, $y = \operatorname{tg}^{1/2}\eta \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha$ и использования известных свойств тригонометрических функций будем иметь

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \frac{|\sin \frac{\xi - \eta}{2}|}{\cos^{1/2}\xi \cos^{1/2}\eta} \frac{T_m(\operatorname{tg}^{1/2}\eta \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha)}{\sqrt{2 \cos \eta - 2 \cos \alpha}} \frac{d\eta}{\cos^{1/2}\eta} = J_{3,m}(\xi) \quad (2.4)$$

$$J_{3,0}(\xi) = -\pi \sec^{1/2}\alpha \ln(2 \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha) \quad (m = 0)$$

$$J_{3m}(\xi) = -\pi m^{-1} \sec^{1/2}\alpha T_m(\operatorname{tg}^{1/2}\xi \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Дифференцируя¹ последнее уравнение, получим соотношение (2.1). Та же подстановка в формулу [4]

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \operatorname{sign}(x-y) \frac{T_m(y) dy}{\sqrt{1-y^2}} = \begin{cases} \arcsin x & (m = 0) \\ -m^{-1} \sqrt{1-x^2} U_{m-1}(x) & (m = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

приводит к соотношению (2.2)

§ 3. Решение уравнения (1.3) ищем в виде

$$t(\xi) = \frac{\sec^{1/2}\xi}{\sqrt{2 \cos \xi - 2 \cos \alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} X_m T_m(\operatorname{tg}^{1/2}\xi \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha) \quad (3.1)$$

Подставим (3.1) в (1.3) и воспользуемся соотношениями (2.1) и (2.2). Затем полученное равенство умножим на $\sqrt{2 \cos \xi - 2 \cos \alpha} \times \sec^{1/2}\xi U_k(\operatorname{tg}^{1/2}\xi \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha)$ и проинтегрируем по ξ в пределах $(-\alpha, \alpha)$. Использование свойства ортогональности полиномов Чебышева (перефразированное для переменной ξ) приводит к следующей бесконечной системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов X_m ($m = 1, 2, \dots$)

$$(\pi/4\lambda) \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha X_{k+1} + \sum_{m=1}^{\infty} B_{m-1,k} X_m = C_k X_0 - \cos^{1/2}\alpha b_k \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (3.2)$$

¹ Соотношение (2.1) можно получить также непосредственно из формулы 7.344 (1) посредством той же замены. Здесь исходим из соотношения (2.3), чтобы получить спектральное соотношение (2.4), представляющее самостоятельный интерес. В частности, оно позволяет дать решение интегрального уравнения периодической контактной задачи [5, 6] в виде бесконечного ряда по полиномам Чебышева. Такая форма решения иногда бывает предпочтительней по сравнению с решениями в виде квадратур, полученными в работах [5, 6].

Здесь

$$B_{m-1,k} = \frac{1}{m} \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2) U_{m-1}(x) U_k(x)}{1+x^2 (\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha)^2} dx \quad \begin{matrix} (m=1, 2, \dots) \\ (k=0, 1, \dots) \end{matrix} \quad (3.3)$$

$$C_k = \int_{-1}^1 \frac{[\arcsin x - (x/2\lambda) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha] \sqrt{1-x^2} U_k(x)}{1+x^2 (\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha)^2} dx \quad (k=0, 1, \dots) \quad (3.4)$$

$$b_k = \int_{-1}^1 \frac{p(x) \sqrt{1-x^2} U_k(x)}{1+x^2 (\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha)^2} dx \quad (k=0, 1, \dots) \quad (3.5)$$

$$p(x) = f[\operatorname{arctg}(x \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha)]$$

В последних выражениях для удобства введена новая переменная $x = x' / a = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\xi \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2}\alpha$.

Коэффициент X_0 определяется из второго уравнения (1.2). Подставив (3.1) в указанное уравнение и используя условие ортогональности полиномов Чебышева, получим $X_0 = (R / lh) \cos^2 \frac{1}{2}\alpha$.

Для практического вычисления коэффициентов $B_{m-1,k}$ и C_k воспользуемся разложением

$$\frac{1}{1+x^2 (\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha)^2} = 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2}\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\operatorname{tg}^2 \frac{1}{4}\alpha)^{2n+1} U_{2n}(x) \quad (|\alpha| < \pi, |x| \leq 1) \quad (3.6)$$

Для проверки последнего следует обе части умножить на $\sqrt{1-x^2} U_{2k}(x)$ и проинтегрировать по x в пределах $(-1, 1)$. Для вычисления интеграла, получающегося в левой части, следует вместо функции $[1+x^2 (\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha)^2]^{-1}$ подставить ее интегральное представление, даваемое формулой 3.893 (2), изменить порядок интегрирования и воспользоваться формулами 3.715 (18) и 6.611 (1).

Подставив (3.6) в (3.3) и (3.4) и воспользовавшись формулами

$$\int_{-1}^1 (1-x^2) U_m(x) U_k(x) U_n(x) dx = - \frac{4(m+1)(k+1)(n+1) [\cos \frac{1}{2}(m+k+n)\pi]^2}{[(m+1)^2 - (k-n)^2][(m+1)^2 - (k+n+2)^2]} \quad (m, k, n = 0, 1, \dots) \quad (3.7)$$

$$\int_{-1}^1 \arcsin x \sqrt{1-x^2} U_k(x) U_n(x) dx = \frac{4(k+1)(n+1) [\sin \frac{1}{2}(k+n)\pi]^2}{(k-n)^2 (k+n+2)^2} \quad (k, n = 0, 1, \dots) \quad (3.8)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x \sqrt{1-x^2} U_k(x)}{1+x^2 (\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha)^2} dx = \pi \sin \frac{1}{2}k\pi (\operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2}\alpha)^2 (\operatorname{tg}^2 \frac{1}{4}\alpha)^{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (3.9)$$

приходим к следующим выражениям для коэффициентов $B_{m-1,k}$ и C_k :

$$B_{m-1,k} = -8(k+1) \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2}\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) (\operatorname{tg}^2 \frac{1}{4}\alpha)^{2n+1} [\sin \frac{1}{2}(m+k)\pi]^2}{[m^2 - (2n-k)^2][m^2 - (2n+k+2)^2]} \quad (m, k = 0, 1, \dots) \quad (3.10)$$

$$C_k = -B_{-1,k} - (\pi / 2\lambda) \sin \frac{1}{2}k\pi \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2}\alpha (\operatorname{tg}^2 \frac{1}{4}\alpha)^{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (3.11)$$

Для проверки формул (3.7) — (3.9) следует сделать замену $x = \cos \theta$ и учесть, что $U_m(\cos \theta) = \sin [(m+1)\theta] \cos \theta$. Кроме того, при вычислении интеграла (3.9) следует вместо функции $[1+x^2 (\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha)^2]^{-1}$ подставить, уже упоминавшееся выше, ее интегральное представление и изменить порядок интегрирования.

Благодаря быстрой сходимости ряда (3.10) вычисление коэффициентов $B_{m-1,k}$ не составляет большого труда.

Представим функцию $\tau(x')$ в виде $\tau(x') = \tau^+(x') + \tau^-(x')$, где $\tau^+(x')$, $\tau^-(x')$ — соответственно четная и нечетная части функции $\tau(x')$. Из структуры членов $B_{m-1,k}$ видно, что система (3.2) распадается на две: одна содержит неизвестные X_m с четными индексами (четная задача, $\tau(x') = \tau^+(x')$), другая — с нечетными индексами (нечетная задача, $\tau(x') = \tau^-(x')$). В первом случае нагрузка, действующая на накладку, должна быть кососимметричной ($p(x) = p^-(x)$), во втором — симметричной ($p(x) = p^+(x)$). Для получения решения четной задачи следует в формулах (3.2) — (3.5), (3.10) и (3.11) заменить m на $2m$ и k на $2k + 1$. Нечетный случай получается из тех же формул заменой m на $2m + 1$ и k на $2k$.

Рассмотрим два частных случая загрузки наклейки. Пусть наклейка загружена двумя силами, каждая величиной $0,5P$, приложенными к торцам наклейки и направленными в одну сторону (слева направо). В этом случае $p(x) \equiv 0$, $\tau(x') = \tau^+(x')$, $b_{2k} = b_{2k+1} = 0$ ($k = 0, 1, \dots$), $X_0 = (P/lh)\cos^{1/2}\alpha$. Из условия равновесия элемента наклейки нетрудно получить формулу для подсчета нормальных напряжений в сечении x' наклейки. Соответствующая формула для переменной $x = x'/a$ имеет вид

$$\sigma^-(ax) = (lh/\pi F) \sec^{1/2}\alpha \left[X_0 \arcsin x - \sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} (2m)^{-1} X_{2m} U_{2m-1}(x) \right]$$

Приведем еще формулу для подсчета контактных напряжений $\tau(x')$, записанную в переменной $x = x'/a$

$$\tau^+(ax) = \frac{1}{2 \sin^{1/2}\alpha} \frac{1 + x^2 (\operatorname{tg}^{1/2}\alpha)^2}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=0}^{\infty} X_{2m} T_{2m}(x) \quad (3.12)$$

В том случае, когда силы, приложенные к торцам наклейки, растягивают ее (нечетная задача), имеем аналогичные результаты

$$p(x) = p^+(x) = \pi P / 2hl, \quad X_0 = 0$$

$$b_{2k} = 0, \quad b_{2k+1} = (\pi^2 P / 2hl) (-1)^k \cos^{1/2}\alpha \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha (\operatorname{tg}^{1/4}\alpha)^{2k+1} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$\sigma^+(ax) = (P/F) \left[0,5 - (hl/\pi P) \sec^{1/2}\alpha \sqrt{1-x^2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^{-1} X_{2m+1} U_{2m}(x) \right]$$

Контактные напряжения $\tau^-(ax)$ можно подсчитать по формуле (3.12), если предварительно заменить $2m$ на $2m + 1$.

При подсчете коэффициентов b_k было использовано соотношение

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} U_k(x)}{1+x^2 (\operatorname{tg}^{1/2}\alpha)^2} dx = \pi \cos^{1/2}\alpha \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha (\operatorname{tg}^{1/4}\alpha)^{k+1} \quad (|\alpha| < \pi, k = 0, 1, \dots)$$

которое проверяется так же, как и соотношение (3.9).

§ 4. Займемся исследованием системы (3.2). Сначала найдем, при каких значениях параметра λ система вполне регулярна. С этой целью оценим сумму

$$S_k = (4\lambda/\pi) \operatorname{tg}^{1/2}\alpha \sum_{m=1}^{\infty} |B_{m-1,k}| \quad (k = 0, 1, \dots)$$

Положим

$$B_{m-1,k} = \frac{1}{m} D_{m-1,k}, \quad D_{m-1,k} = \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2) U_{m-1}(x) U_k(x)}{1+x^2 (\operatorname{tg}^{1/2}\alpha)^2} dx$$

($m = 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots$)

Неравенство Буняковского для сумм дает

$$S_k^2 \leq \left(\frac{4\lambda \operatorname{tg}^{1/2} \alpha}{\pi} \right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{m=1}^{\infty} D_{m-1, k}^2 \quad (4.1)$$

Рассмотрим функцию

$$\omega(x) = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{1-x^2} U_k(x)}{1+x^2 (\operatorname{tg}^{1/2} \alpha)^2}$$

Ее коэффициенты разложения в ряд по системе полиномов $U_{m-1}(x)$ ($m=1, 2, \dots$) будут $D_{m-1, k}$. Условие полноты (замкнутости) этой системы имеет вид

$$\sum_{m=1}^{\infty} D_{m-1, k}^2 = \frac{\pi^2}{4} \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^{3/2} U_k^2(x)}{[1+x^2 (\operatorname{tg}^{1/2} \alpha)^2]^2} dx$$

Так как $U_k^2(x) \leq 1$, ($|x| \leq 1$), то нетрудно оценить последний интеграл и тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} D_{m-1, k}^2 \leq \frac{3\pi^2}{16}$$

Суммируя первый ряд в (4.1) и учитывая изложенное, получим

$$S_k^2 \leq \frac{1}{2} \pi^2 \lambda^2 (\operatorname{tg}^{1/2} \alpha)^2, \quad S_k \leq \frac{1}{2} \sqrt{2} \pi \lambda \operatorname{tg}^{1/2} \alpha \quad (4.2)$$

Чтобы система (3.2) была вполне регулярной, достаточно, чтобы для всех k ($k=0, 1, \dots$) выполнялось неравенство $S_k \leq q < 1$. С учетом (4.2) это условие принимает вид

$$\lambda < \sqrt{2} \pi^{-1} \operatorname{ctg}^{1/2} \alpha \quad (4.3)$$

Полученное условие значительно шире, чем условие $\lambda < \frac{1}{25} \sin \alpha$, полученное в [1].

Теперь покажем, что при любых λ ($0 \leq \lambda < \infty$) система (3.2) квазирегулярна, т.е. покажем, что $\lim S_k = 0$ при $k \rightarrow \infty$. Так как система (3.2) распадается на две системы, то исследуем их отдельно. Начнем с четного случая. В этом случае необходимо оценить сумму

$$S_{2k+1} = (4\lambda/\pi) \operatorname{tg}^{1/2} \alpha \sum_{m=1}^{\infty} |B_{2m-1, 2k+1}| \quad (4.4)$$

Прежде всего заметим, что для коэффициентов $B_{2m-1, 2k+1}$ можно указать оценку

$$\begin{aligned} |B_{2m-1, 2k+1}| &\leq 1/(k+1) + 2\pi (\sec^{1/2} \alpha)^2 / (4k+3)(4k+5) \quad (m = k+1, k = 0, 1, \dots) \\ |B_{2m-1, 2k+1}| &\leq \frac{\pi (\sec^{1/2} \alpha)^2}{8m} \left(\frac{1}{|2m-2k-2|+1} + \frac{1}{|2m-2k-2|-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2m+2k+3} + \frac{1}{2m+2k+1} \right) \\ &\quad (m = 1, 2, \dots; k = 0, 1, \dots; m \neq k+1) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для доказательства последнего неравенства следует в формуле (3.3) воспользоваться тождеством

$$2(1-x^2) U_{2m-1}(x) U_{2k+1}(x) = T_{2m-2k-2}(x) - T_{2m+2k+2}(x)$$

разбить интеграл на два и учесть, что

$$\int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(x) dx}{1+x^2 (\operatorname{tg}^{1/2} \alpha)^2} \leq \frac{\pi}{2 (\cos^{1/2} \alpha)^2} \left(\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m-1} \right) \quad (|\alpha| < \pi, m = 1, 2, \dots) \quad (4.6)$$

Для получения последней оценки следует в интеграле сделать замену $x = \cos \theta$ и учесть, что $T_m(\cos \theta) = \cos m \theta$. Воспользовавшись затем формулой 1.314 (1) и интегрируя по частям, получим оценку (4.6). Подставляя (4.5) в (4.4) и суммируя получающиеся ряды с помощью формулы 0.244 (1), получим

$$S_{2k+1} \leq \frac{4\lambda \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}{\pi} \left\{ \left[\frac{\psi(k + \frac{5}{2}) + \psi(k + 2) - 2\psi(\frac{1}{2}) + \psi(-k - \frac{1}{2}) + 2C}{2k + 3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\psi(k + \frac{3}{2}) + 2\psi(k + 2) - 2\psi(\frac{3}{2}) + \psi(-k + \frac{1}{2}) + 2C}{2k + 1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{8}{(4k + 3)(4k + 5)} \right] \frac{\pi}{8 (\cos \frac{1}{2} \alpha)^2} + \frac{1}{k + 1} \right\} \quad (4.7)$$

Здесь $\psi(x)$ — пси-функция Эйлера, C — постоянная Эйлера.

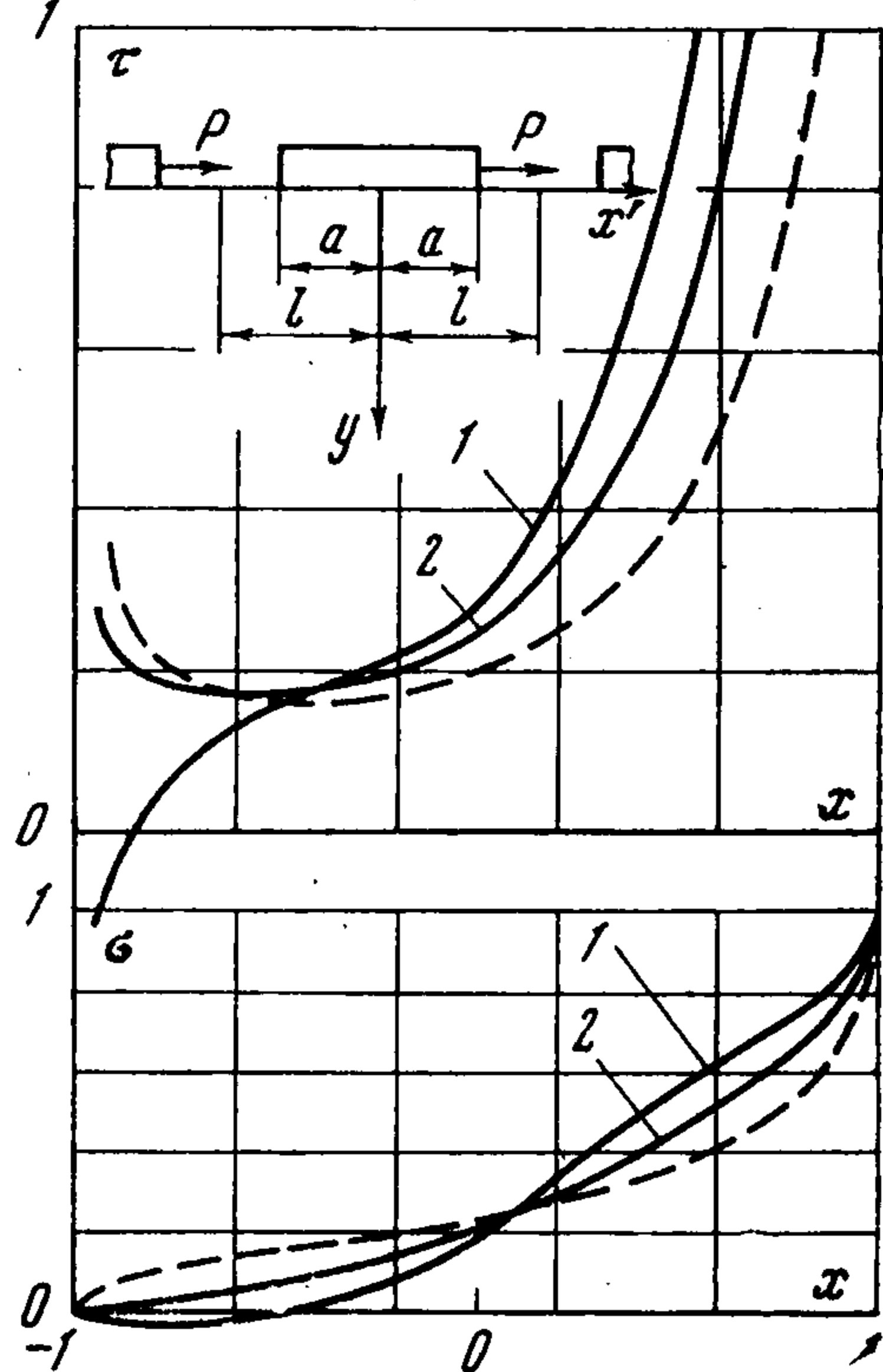
Учитывая поведение функции $\psi(x)$ при $x \rightarrow \infty$, правую часть в (4.7) при любом λ можно сделать сколь угодно малой при достаточно большом k , и, следовательно, система (3.2) (в четном случае) при любых $0 \leq \lambda < \infty$ квазирегулярна.

Аналогичный результат получается для нечетной системы. Из неравенства (4.7) может быть получено и условие вполне регулярности системы (3.2), однако полученный выше результат (4.3) является более точным.

§ 5. По полученным выше формулам для случая, когда накладка загружена по торцам, производились подсчеты $\sigma(ax)$ и $\tau(ax)$ при различных значениях параметров λ и α . Значения $\sigma(ax)$ и $\tau(ax)$ подсчитывались при последовательно возрастающем числе приближений m . Если $\sigma(ax)$ или $\tau(ax)$ в $m + 1$ -м приближении отличались от $\sigma(ax)$ или $\tau(ax)$ [в m -м приближении меньше чем на 5%, то процесс вычислений прекращался.

Необходимое количество приближений существенно зависит от параметра α и в меньшей степени от λ . Например, при всех λ , не превышающих более чем в два раза область регулярности, определяемой по формуле (4.3), при $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, для подсчета $\tau(ax)$ достаточно взять три приближения, а для подсчета $\sigma(ax)$ — два. При $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ для подсчета $\tau(ax)$ необходимо взять уже шесть приближений, а для подсчета $\sigma(ax)$ — четыре.

Важным моментом является выяснение влияния накладок друг на друга. Очевидно, это влияние зависит в первую очередь от α . Однако выяснилось, что оно зависит и от параметра $\mu = \lambda / \alpha = E_2 a h / 2 E_1 F$. Были проведены вычисления для различных значений параметров μ и α , когда накладка загружена по торцам (причем, как и выше, задача разбивалась на четную и нечетную). Результаты вычислений сведены в табли-



α	σ^+		σ^-		τ^+		τ^-	
	$\mu = 1$	$\mu = 5$	$\mu = 1$	$\mu = 5$	$\mu = 1$	$\mu = 5$	$\mu = 1$	$\mu = 5$
$\frac{4}{5}\pi$	23	60	231	265	90	240	220	335
$\frac{2}{3}\pi$	14	33	103	115	51	118	101	144
$\frac{1}{2}\pi$	7	15	44	48	43	50	41	57
$\frac{1}{3}\pi$	3	6	16	18	12	19	16	21

цу, где указаны в % максимальные по абсолютной величине отклонения напряжений от таковых в случае, когда имеется только одна изолированная накладка. При этом,

в случае касательных контактных напряжений сравнивались не сами напряжения, а их величины, домноженные на функцию, несущую особенность. Указанные отклонения наблюдались, в основном, в окрестности концов накладки. При подсчете напряжений количество приближений m бралось таким, чтобы $\sigma(ax)$ или $\tau(ax)$ в $m + 1$ -м приближении не отличалось от $\sigma(ax)$ или $\tau(ax)$ в m -м приближении более чем на несколько единиц в третьей значащей цифре.

На фигуре приведены графики изменения $\sigma(ax)$ и $\tau(ax)$ при $\mu = 1$ (для расчетной схемы, показанной там же). Кривые 1 и 2 относятся соответственно к случаям $\alpha = \frac{4}{5}\pi$ и $\alpha = \frac{2}{3}\pi$. Пунктиром показаны соответствующие напряжения для случая одной изолированной накладки. Приведенные на графиках значения $\sigma(ax)$ должны быть домножены на P/F , а $\tau(ax)$ — на P/ah . Вычисления были проведены и для параметров $\alpha = \frac{1}{2}\pi$; $\frac{2}{5}\pi$ и $\frac{1}{3}\pi$. Соответствующие кривые (которые не приведены на графике с целью не загромождать его) расположены между кривыми 2 и пунктирными. При $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ эти кривые практически совпадают с пунктирными (максимальное отклонение не превышает 15%).

Как видно из фигуры, присутствие соседних накладок не только количественно, но и качественно может изменять эпюры напряжений (кривые 1).

В заключение заметим, что рассмотренная здесь задача эквивалентна контактной задаче для полуполосы ($-l \leq x \leq l$, $0 \leq y < \infty$), когда к ее конечной грани на отрезке ($-a \leq x \leq a$) приклеена упругая накладка, а на полубесконечных гранях равны нулю вертикальное перемещение и нормальное напряжение.

Поступила 18 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. А р у т ю н я н Н. Х., М х и т а р я н С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
2. П о п о в Г. Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
3. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
4. П о п о в Г. Я. Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби. Укр. матем. ж., 1968, т. 2, № 4.
5. Ш т а е р м а н И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
6. Р о с т о в ц е в Н. А. О некоторых случаях контактной задачи. Укр. матем. ж., 1954, т. 6, № 3.

ДЕЙСТВИЕ СДВИГАЮЩЕЙ СИЛЫ И ОПРОКИДЫВАЮЩЕГО МОМЕНТА НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ШТАМП, СЦЕПЛЕННЫЙ С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

В. И. Ф а б р и к а н т

(Рыбинск)

Рассмотрена задача о действии сдвигающей силы и опрокидывающего момента на круговой в плане жесткий штамп, сцепленный с трансверсально-изотропным полупространством. Найдено распределение касательных и нормальных напряжений под штампом. Получены формулы, связывающие угловое и линейное перемещение штампа с величиной сдвигающей силы и опрокидывающего момента. Заметим, что решение неосесимметричной задачи для цилиндрического штампа, сцепленного с изотропным полупространством, можно найти в работе [1].

1. Рассмотрим круговой в плане штамп радиусом a , сцепленный с трансверсально-изотропным полупространством $z \geq 0$. Пусть на штамп действует сдвигающая сила