К ОБОСНОВАНИЮ ПРИНЦИПА МИНИМУМА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ МЕМБРАНЫ

А. М. Слободкин[1]

(Москва)

Дан достаточный признак устойчивости формы равновесия гибкой осесимметричной оболочки при осесимметричных начальных возмущениях. Предполагается, что энергия, накопленная в элементе оболочки, определяется лишь изменением его площади, что и дает закон деформирования оболочки.

1. Мембрана — двумерный континуум, внутренние силы в котором сводятся к натяжению T, направленному по тангенциальной нормали к линии рассечения. Пусть $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x^1, x^2, t)$ — радиус-вектор материальной частицы (x^1, x^2) в момент времени t; ρ — текущая плотность массы и $\mathbf{q}$ — вектор внешней нагрузки на единицу площади. Рассматривая движение бесконечно малого элемента мембраны, образованного материальными координатными линиями x^1, $x^1 + dx^1$, x^2, $x^2 + dx^2$, получим

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = \mathbf{q} + \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{\partial \sqrt{R} T \mathbf{R}^\alpha}{\partial x^\alpha} \qquad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{R}^\alpha$ — базис, взаимный к базису $\mathbf{R}_\alpha \equiv \partial R / \partial x^\alpha$ и R—определитель метрического тензора $R_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta$ текущей конфигурации мембраны. По повторяющимся греческим индексам здесь и далее производится суммирование от единицы до двух.

Пусть r — определитель метрического тензора мембраны в ее естественном состоянии ($T \equiv 0$). Положив

$$k = (R \,/\, r)^{1/2} \qquad (1.2)$$

будем иметь $\rho k = \rho_0$, где ρ_0 — плотность массы мембраны в естественном состоянии. Кроме того, будем считать мембрану упругой, что означает существование функции $w(k)$ — плотности энергии деформации на единицу площади недеформированной мембраны такой, что

$$T = w'(k), \quad w'(1) = 0, \quad w(1) = 0 \qquad (1.3)$$

При этом предполагается, что

$$w''(k) > 0, \qquad (0 < k < \infty) \qquad (1.4)$$

С учетом этих обозначений уравнения движения мембраны можно переписать в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = \mathbf{q}_* + \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial \sqrt{r} k w'(k) \mathbf{R}^\alpha}{\partial x^\alpha} \qquad (\mathbf{q}_* = k\mathbf{q}) \qquad (1.5)$$

---

[1] А. М. Слободкин, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ВЦ АН СССР передал в редакцию свою работу 24 ноября 1969 г.

При рассмотрении оказалось, что для логического завершения исследования целесообразно выразить условие (1.1) непосредственно через исходные данные задачи: начальную форму равновесия оболочки $r_0(s)$ и нагрузки, т. е. необходимо дать условия (хотя бы частичные) существования решения, удовлетворяющего (1.1).

Это пожелание редакции осталось невыполненным ввиду безвременной кончины молодого ученого.

Редакция публикует работу в ее первоначальном виде и полагает, что коллеги А. М. Слободкина в память о своем товарище восполнят этот пробел.

Текст аннотации несколько изменен.

2. Предположим теперь, что естественное состояние мембраны реализуется в виде поверхности вращения, уравнение меридиана которой имеет вид

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{r}_0(s) = x_0(s)\,\mathbf{i} + y_0(s)\,\mathbf{j} \qquad (s_1 \leqslant s \leqslant s_2) \tag{2.1}$$

где s — длина дуги указанной кривой, причем

$$y_0(s) > 0, \; s_1 \leqslant s \leqslant s_2 \tag{2.2}$$

Кроме того, будем считать условную нагрузку $\mathbf{q}_*$ осесимметричной. Тогда уравнения осесимметричного движения мембраны $\mathbf{r} = x\,(s,\, t)\,\mathbf{i} + y\,(s,\, t)\,\mathbf{j}$ примут вид

$$\rho_0 y_0(s)\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2} = \frac{d}{ds}\left[\frac{y^2}{y_0}\frac{w'(k)}{k}\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right] - \frac{y_0}{y}kw'(k)\,\mathbf{j} + y_0\mathbf{q}_* \tag{2.3}$$

$$k \equiv \frac{y}{y_0}\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| \tag{2.4}$$

Будем считать, что

$$\mathbf{q}_* = -\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} - p\frac{y}{y_0}\,\mathfrak{E}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{2.5}$$

где $\mathfrak{E}$ — оператор поворота в плоскости xy на 90° по часовой стрелке.

Условие (2.5) означает, что мембрана находится под воздействием консервативной нагрузки с потенциалом $\varphi\,(\mathbf{r})$ и постоянного давления интенсивности p.

Наконец, предположим, что мембрана закреплена вдоль ограничивающих ее параллелей

$$\mathbf{r}^*(s_1,\, t) = \mathbf{r}_1^*, \qquad \mathbf{r}^*(s_2,\, t) = \mathbf{r}_2 \qquad (t \geqslant 0) \tag{2.6}$$

причем

$$y_1 > 0, \quad y_2 > 0 \tag{2.7}$$

Предположим, что граничная задача (2.3) —(2.6) допускает не зависящее от времени решение

$$\mathbf{r}\,(s,\, t) = \mathbf{r}^\circ(s) \in C_2\;(s_1 \leqslant s \leqslant s_2) \tag{2.8}$$

Теорема. Если при любом s, $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ имеем

$$K^\circ(s) = \frac{y^\circ(s)}{y_0}\left|\frac{d\mathbf{r}^\circ}{ds}\right| > 1 \tag{2.9}$$

то положительность второй вариации функционала [1]

$$U[\mathbf{r}] = \int_{s_1}^{s_2}\left\{y_0\left[w(k) + \varphi(\mathbf{r})\right] + {}^1\!/_3\,py\left\langle\mathbf{r},\, \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right\rangle\right\}ds \tag{2.10}$$

$$\mathbf{r}(s_1) = \mathbf{r}_1, \qquad \mathbf{r}(s_2) = \mathbf{r}_2$$

в положении равновесия (2.8) гарантирует устойчивость этого положения равновесия по двум системам мер [1] возмущения

$$(\rho_1,\, \rho_2), \quad (\rho_1,\, \rho_3), \quad \rho_1 = \left\{\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\right)^2 ds\right\}^{1/2} = \left\{\int_{s_1}^{s_2} v^2\,ds\right\}^{1/2} \tag{2.11}$$

$$\rho_2 = \max_{s_1\leqslant s\leqslant s_2}\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds} - \frac{d\mathbf{r}^\circ}{ds}\right|, \qquad \rho_3 = \max_{s_1\leqslant s\leqslant s_2}\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}^\circ\right|$$

Доказательство. В качестве пространства состояний Z задачи (2.3) — (2.6) возьмем произведение $X \times Y$ двух множеств, первое из которых — X образовано всевоз-

[1] Угловые скобки означают псевдоскалярное произведение двух плоских векторов.

можными кусочно-гладкими вектор-функциями $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ $(s_1 \leqslant s \leqslant s_2)$ такими, что $\mathbf{r}^*(s_1) = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}(s_2) = \mathbf{r}_2$, а второе — Y всевозможными кусочно-непрерывными [1] вектор-функциями $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s)$ $(s_1 \leqslant s \leqslant s_2)$.

Исследование устойчивости равновесия будет производиться на совокупности всевозможных разрывных решений задачи (2.3) — (2.6), т. е. на совокупности классических решений, первые производные которых при фиксированном t могут претерпевать разрывы первого рода в конечном числе точек отрезка $s_1 s_2$.

Для всякого такого решения $\mathbf{r}(s, t)$ в любой момент времени t, $0 \leqslant t < \infty$

$$\{\mathbf{r}(s,t),\ \partial\mathbf{r}/\partial t\} \in Z$$

В частности, равновесие (2.8) изображается в Z неподвижной точкой

$$\{\mathbf{r}^\circ(s),\ 0\}$$

Рассмотрим (определенный для любого $z \in Z$) функционал

$$\Delta H[z] = T[\mathbf{v}] + \Delta U[\mathbf{r}] = T + U - U_0 \tag{2.12}$$

$$T[\mathbf{v}] = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2} \rho_0 y_0 v^2\, ds \tag{2.13}$$

Здесь функция U определена (2.10), а U_0 — значение U при $\mathbf{r} = \mathbf{r}^\circ(s)$. Функционал ΔH (приращение полной энергии системы) сохраняет постоянное значение вдоль движения. Далее в силу положительности $\rho_0 y_0$ функционал (2.13) допускает бесконечно малый высший предел по мере ρ_1 согласно (2.11) и определенно-положителен по этой же мере. Кроме того движение в Y, порождаемое движением в X, непрерывно по мере ρ_1. Наконец, функционал ΔU допускает бесконечно малый высший предел по мере ρ_2. Для доказательства теоремы, таким образом, достаточно показать [2], что из ее посылок вытекает определенная положительность функционала ΔU по мере ρ_3 согласно (2.11).

Отметим, что равновесие (2.8) является экстремалью функционала U. Далее

$$\frac{\partial^2 y_0 w(k)}{\partial\mathbf{r}_s \partial\mathbf{r}_s} = y_0\left[w''\left(\frac{\partial k}{\partial\mathbf{r}_s} \cdot\cdot \frac{\partial k}{\partial\mathbf{r}_s}\right) + w'\frac{\partial^2 k}{\partial\mathbf{r}_s\partial\mathbf{r}_s}\right] = y_0\left(\frac{y}{y_0}\right)^2\left[w''(\boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\boldsymbol{\tau}) + \frac{w'}{k}(\mathbf{n}\cdot\cdot\mathbf{n})\right]$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_s / |\mathbf{r}_s|, \quad \mathbf{n} = \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\tau}. \tag{2.14}$$

Здесь две точки — символ тензорного произведения. Поэтому равновесие (2.8) в силу (1.3), (1.4), (2.9) является неособой экстремалью U.

Наконец, функция Вейерштрасса в данном случае

$$E(s, \mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \mathbf{R}_s) = y_0\left\{w(K) - w(k) - \frac{w'(k)}{k}\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 \mathbf{r}_s\cdot(\mathbf{R}_s - \mathbf{r}_s)\right\} =$$

$$= y_0\left\{w(K) - w(k) + kw'(k) - \frac{w'(k)}{k}\left(\frac{y}{y_0}\mathbf{r}_s\right)\cdot\left(\frac{y}{y_0}\mathbf{R}_s\right)\right\} \qquad K = \frac{y}{y_0}|\mathbf{R}_s| \tag{2.15}$$

В силу (2.9), (1.3), (1.4) можно указать в пространстве $(s, \mathbf{r}, \mathbf{r}_s)$ такую окрестность кривой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^\circ(s), \qquad \mathbf{r}_s = \frac{d\mathbf{r}^\circ}{ds}(s) \qquad (s_1 \leqslant s \leqslant s_2) \tag{2.16}$$

что для любых $(s, \mathbf{r}, \mathbf{r}_s)$ из этой окрестности и любого $\mathbf{R}_s$

$$E(s, \mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \mathbf{R}_s) \geqslant y_0\{w(K) - w(k) - (K - k)\, w'(k)\} \geqslant 0$$

Отсюда ввиду неособенности экстремали (2.8) следует [2], что существует такая окрестность кривой (2.16) в пространстве $(s, \mathbf{r}, \mathbf{r}_s)$, что для любых s, r, r_s из этой ок-

---

[1] Т. е. имеющими не более конечного числа точек разрыва первого рода.

[2] Очевидно, что движение в x непрерывно по мере ρ_3 согласно (2.11).

рестности и любого $\mathbf{R}_s \neq \mathbf{r}_s$

$$E(s, \mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \mathbf{R}_s) > 0 \tag{2.17}$$

Таким образом, условие положительности второй вариации U равносильно отсутствию на экстремали

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^\circ(s), \qquad s_1 \leqslant s \leqslant s_2 \tag{2.18}$$

точек, сопряженных ее концам. Это позволяет доказать определенную положительность ΔU по мере ρ_3 методом Кнезера—Хана [3,4].

Действительно, экстремаль (2.18) можно распространить на отрезок $s_1' \leqslant s \leqslant s_2'$, $s_1' < s_1$, $s_2' > s_2$ так, что расширенная экстремаль

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^\circ(s), \qquad s_1' \leqslant s \leqslant s_2' \tag{2.19}$$

сохраняет все свойства экстремали (2.18)

Если провести через левый и правый концы дуги (2.19) достаточно тонкие пучки экстремалей, включающие эту дугу, то каждый из указанных пучков образует на отрезке $s_1' \leqslant s \leqslant s_2'$ центральное поле, в котором выполняется условие (2.17).

Удобно ввести следующие обозначения: левые концы дуг (2.18) (2.19) будем называть точками A, A', а правые — точками B, B' соответственно. Значение интеграла

$$\int \left\{ y_0 [w(k) + \varphi(\mathbf{r})] + \frac{1}{3} py \left\langle \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\rangle \right\} ds$$

на $\mathbf{r}(s) \in X$ будем обозначать через U_{AB}, на дуге экстремали (2.20) — через U_{AB}^*, на дуге экстремали левого пучка, заключенной между точкой A' и некоторой точкой P,— через $U_{A'P}^*$ на дуге экстремали правого пучка, заключенной между P и B',— через $U_{AB'}^*$ соответственно.

Пусть теперь ε — произвольное положительное число такое, что замкнутый цилиндр R

$$\{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^\circ(s)| = \varepsilon \quad (s_1 \leqslant s \leqslant s_2)\}$$

целиком лежит в пересечении указанных выше центральных полей. Покажем, что для любого $\mathbf{r}(s) \in X$, для которого $\rho_3 = \varepsilon$ будет $\Delta U > \mu > 0$, где $\mu = \mu(\varepsilon)$ не зависит от выбора $\mathbf{r}(s)$.

В самом деле, если $\rho_3[\mathbf{r}(s)] = \varepsilon$, то кривая $\mathbf{r}(s)$ $(s_1 \leqslant s \leqslant s_2)$ целиком лежит внутри цилиндра R и имеет с ним по крайней мере одну общую точку P. Тогда, каково бы ни было $P \in R$

$$\Delta U = U_{AB} - U_{AB}^* = (U_{A'A}^* + U_{AP} + U_{PB} + U_{BB'}^*) - U_{A'B'}^* > U_{A'P}^* + U_{PB'}^* - U_{A'B'}^* > 0$$

Но $U_{A'P} + U_{PB'}^*$ есть непрерывная функция точки $P \in R$. Отсюда, ввиду ограниченности и замкнутости R в пространстве $(\mathbf{r}, s)$, следует существование точки $M \in R$ такой, что

$$U_{A'P}^* + U_{PB'}^* \geqslant U_{A'M}^* + U_{MB'}^*$$

Таким образом

$$\mu = U_{A'M}^* + U_{MB'}^* - U_{A'B'}^* > 0$$

что и требовалось показать.

Поступила 24 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Слободкин А. М. Об устойчивости равновесия систем с бесконечным числом степеней свободы в смысле Ляпунова. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 1.
2. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
3. Kneser A. Die Stabilität des Gleichgewichts hangeuder schwerer Fäden. J. reine und agnew. Math., 1903, Bd. 125, S. 189—206.
4. Hahn H. Uber einen Satz von Osgood in der Variationsrechnung. Monatsh. Math. und Phys., 1906, Bd 17, S. 63—77.