Тогда производную функции V в силу уравнений (2.1) можно представить следующим образом:

$$V' = 2\rho e^{-Nu} \left\{ \Sigma\mu_i z_i - N\Sigma \frac{\partial u}{\partial z_s} z_s (\mu_s - \Sigma\mu_i z_i) + \right.$$

$$\left. + \rho [R_0 - N\Sigma z_s z_j (R_{sj}^{(2)})^2 P_{sj}] \right\} + \rho^3 S \qquad (2.2)$$

Как показано в п. 1, функции u и P_{sj} могут быть выбраны таким образом, что выражение

$$[R_0 - N\, \Sigma z_s z_j (R_{sj}^{(2)})^2 P_{sj}] \leqslant -\delta$$

Здесь δ — некоторое положительное число такое, что

$$\delta = \inf |R_0|$$

на вещественных прямых (1.2).

Кроме того, для выбранной функции u можно определить величину

$$\nu = \sup [\Sigma \mu_i z_i - N\Sigma \frac{\partial u}{\partial z_s} z_s (\mu_s - \Sigma\mu_i z_i)] \quad (z_1 + \cdots + z_n = 1)$$

Теперь внутренняя граница области устойчивости ρ_* (при малых ρ) с точностью до членов пятого порядка определится выражением

$$\rho_* = \nu / \delta$$

Приближенная оценка внешней границы области устойчивости (при малых ρ) производится при известных V и V' обычным образом.

Поступила 4 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменков Г. В. Об устойчивости движения в случаях близких к критическим. Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, сер. теорет. механ., 1963, т. 1, вып. 1.
2. Веретенников В. Г. Об устойчивости движения в случае трех пар чисто мнимых корней. Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, сер. теорет. механ., 1966, т. 15, вып. 3.
3. Каменков Г. В. Об устойчивости движения. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1939, № 9.
4. Каменков Г. В. К задаче об устойчивости движения в критических случаях. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
5. Молчанов А. М. Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения. Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 1.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ТРЕХ ПАР ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ ПРИ ВНУТРЕННЕМ РЕЗОНАНСЕ

А. Л. Куницын

(Москва)

Исследуется устойчивость тривиального решения автономной системы в критическом случае трех пар чисто мнимых корней при наличии целочисленных соотношений между частотами линеаризованной системы. Даются необходимые и достаточные условия устойчивости в первом нелинейном порядке. Результаты распространяются и на вырожденный случай, включающий гамильтоновы системы.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x^{\cdot}_s = \sum_{r=1}^{6} p_{sr} x_r + X_s (x_1, \ldots, x_6) \qquad (s = 1, \ldots, 6) \qquad (1)$$

где X_s — голоморфные функции, разложения которых по степеням переменных $x_1, \ldots, x_6$ начинаются членами не ниже второго порядка, а постоянные p_{sr} таковы, что матрица $\{p_{sr}\}$ имеет лишь чисто мнимые собственные значения $\pm i\lambda_s$, $(s = 1,2,3)$. Говорят [1–3], что в системе (1) имеет место внутренний резонанс $k+1$-го порядка, если между частотами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ выполняются соотношения вида

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0, \quad |k_1| + |k_2| + |k_3| = k+1$$

где k_s — любые целые числа, а k — наинизший показатель форм, которыми начинаются разложения функций X_s. Резонанс третьего порядка вида $\lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_1$ был рассмотрен в [3], где, за исключением вырожденных случаев [1], были получены необходимые и достаточные условия сохранения нейтральности во втором порядке. Рассмотрим более общую задачу, предположив для определенности, что частоты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ удовлетворяют соотношению

$$p_3\lambda_3 = p_2\lambda_2 + p_1\lambda_1 \tag{2}$$

где p_1, p_2, p_3 — целые положительные числа, дающие в сумме $k+1$.

Как известно, специальным линейным преобразованием систему (1) можно представить в виде

$$\dot z_s = i\lambda_s z_s + Z_s, \qquad \dot{\bar z}_s = -i\lambda_s \bar z_s + \bar Z_s \qquad (s = 1, 2, 3) \tag{3}$$

где $z_s, \bar z_s$ — комплексно-сопряженные переменные, а комплексно-сопряженные функции $Z_s, \bar Z_s$ представляются в виде абсолютно сходящихся рядов, расположенных по возрастающим степеням переменных $z_1, \ldots, z_3, \bar z_1, \ldots, \bar z_3$, начинающихся формами k-го порядка.

От $z_s, \bar z_s$, перейдем к новым переменным $\sigma_s, \bar\sigma_s$ по формулам

$$z_s = [\sigma_s - \Sigma u_s^* \sigma_1^{k_{s1}} \ldots \sigma_3^{k_{s3}} \bar\sigma_1^{l_{s1}} \ldots \bar\sigma_3^{l_{s3}}] \exp\ (i\lambda_s t)$$
$$\bar z_s = [\bar\sigma_s - \Sigma \bar u_s^* \bar\sigma_1^{k_{s1}} \ldots \bar\sigma_3^{k_{s3}} \sigma_1^{l_{s1}} \ldots \sigma_3^{l_{s3}}] \exp (-i\lambda_s t)$$

где $u_s^*, \bar u_s^*$ — периодические функции времени t, подлежащие определению (звездочка заменяет индекс $(k_{s1}, \ldots, k_{s3}, l_{s1}, \ldots, l_{s3})$), а суммы распространяются на все целые неотрицательные числа $k_{s1}, \ldots, k_{s3}, l_{s1}, \ldots, l_{s3}$, дающие в сумме k. Первая группа сопряженных уравнений в новых переменных запишется в виде

$$\dot\sigma_s = \Sigma [R_s^* \exp (i\varkappa_s^* t) + \dot u_s^*] \sigma_1^{k_{s1}} \ldots \sigma_3^{k_{s3}} \bar\sigma_1^{l_{s1}} \ldots \bar\sigma_3^{l_{s3}} + \Phi_s \tag{4}$$
$$\varkappa_s^* = -\lambda_s + \lambda_1 (k_{s1} - l_{s1}) + \ldots + \lambda_3 (k_{s3} - l_{s3}) \qquad (s = 1, 2, 3)$$

Здесь R_s^* — комплексные коэффициенты форм k-го порядка, которыми начинаются разложения функций Z_s уравнений (3), а Φ_s представляют собою ряды относительно переменных $\sigma_1, \ldots, \sigma_3, \bar\sigma_1, \ldots, \bar\sigma_3$ с периодическими по времени коэффициентами, начинающиеся с членов не ниже $k+1$-го порядка.

Определим функции u_s^* из уравнений

$$\dot u_s^* + R_s^* \exp (i\varkappa_s^* t) = P_s^*$$

где P_s^* — какие-нибудь константы, которые при $\varkappa_s^* \neq 0$ должны быть равны нулю (чтобы функции u_s^* вышли периодическими), а при $\varkappa_s^* = 0$ получаем $P_s^* = R_s^*$. При четном k соотношения

$$\lambda_s = (k_{s1} - l_{s1}) \lambda_1 + \ldots + (k_{s3} - l_{s3})\lambda_3$$
$$k_{s1} + l_{s1} + \ldots + k_{s3} + l_{s3} = k \qquad (s = 1, 2, 3) \tag{5}$$

---

[1] Ниже показано, что, в частности, всякая гамильтонова система представляет полностью вырожденный случай.

при условии (2) удовлетворяются единственным набором чисел k_{sj}, l_{sj}, а именно:

$$l_{11} = p_1 - 1, \quad l_{12} = p_2, \quad k_{13} = p_3, \quad k_{11} = k_{12} = l_{13} = 0$$
$$l_{21} = p_1, \quad l_{22} = p_2 - 1, \quad k_{23} = p_3, \quad k_{21} = k_{22} = l_{23} = 0$$
$$k_{31} = p_1, \quad k_{32} = p_2, \quad l_{33} = p_3 - 1, \quad l_{31} = l_{32} = l_{33} = 0$$

Полагая P_s^*, для которых выполняются (5), равными $a_s + ib_s$ и переходя к полярным координатам r_s, θ_s по формулам

$$\sigma_s = r_s \exp (i\theta_s), \qquad \bar{\sigma}_s = r_s \exp (-i\theta_s)$$

получим дифференциальные уравнения

$$\begin{gathered} r_s^{\cdot} = r_1^{p_1} \ldots r_s^{p_s - 1} \ldots r_3^{p_3} [a_s \cos \theta + (-1)^{\delta} b_s \sin \theta] + \ldots \\ r_s \theta_s^{\cdot} = r_1^{p_1} \ldots r_s^{p_s - 1} \ldots r_3^{p_3} [b_s \cos \theta - (-1)^{\delta} a_s \sin \theta] + \ldots \\ \theta = p_3\theta_3 - p_2\theta_2 - p_1\theta_1 \\ \delta = 1 \text{ при } s = 1,2, \ \delta = 0 \text{ при } s = 3 \end{gathered} \tag{6}$$

где невыписанные члены имеют не ниже чем $k + 1$-й порядок относительно переменных r_1, r_2, r_3, поведением которых и решается задача об устойчивости. Для системы (6) справедлива следующая теорема.

Теорема. Для устойчивости тривиального решения системы (6) необходимо и достаточно, чтобы в ряду чисел

$$\beta_1 = -(a_2b_3 + a_3b_2), \quad \beta_2 = (a_1b_3 + a_3b_1), \quad \beta_3 = a_1b_2 - a_2b_1$$

не было перемены знака.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что система (6) с точностью до членов k-го порядка обладает первым интегралом

$$\beta_1 r_1^2 + \beta_2 r_2^2 + \beta_3 r_3^2 = \text{const}$$

который будет знакоопределенным при отсутствии перемены знака в ряду чисел β_1, β_2, β_3, чем и доказывается достаточность сформулированных условий.

Необходимость докажем с помощью теоремы Четаева о неустойчивости [4]. Функцию Четаева возьмем в виде

$$V = r_1^{p_1} r_2^{p_2} r_3^{p_3} (\cos \theta + \varkappa \sin \theta) \tag{7}$$

где $\varkappa$ — некоторая постоянная, выбираемая по нашему усмотрению.

Производная $V^{\cdot}$ в силу уравнений (6) с точностью до членов k-го порядка будет

$$V^{\cdot} = r_1^{2(p_1-1)} r_2^{2(p_2-1)} r_3^{2(p_3-1)} [p_1 r_2^2 r_3^2 (a_1 - \varkappa b_1) + p_2 r_1^2 r_3^2 (a_2 - \varkappa b_2) + p_3 r_1^2 r_2^2 (a_3 + \varkappa b_3)]$$

Пусть, например, имеем

$$\beta_1 < 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \beta_3 > 0 \tag{8}$$

Полагая $\varkappa = a_2 / b_2$, получим

$$V^{\cdot} = r_1^{2(p_1-1)} r_2^{2(p_2-1)} r_3^{2(p_3-1)} [p_1 r_2^2 r_3^2 (a_1b_2 - a_2b_1) + p_3 r_1^2 r_2^2 (a_3b_2 + a_2b_3)] \frac{1}{b_2} \tag{9}$$

Из рассмотрения (9) видим, что $V^{\cdot}$ в области $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $r_3 > 0$ не меняет знака. Выбором же области изменения θ функцию V можно сделать того же знака, что и ее производная. Таким образом, в некоторой области $r_s > 0$ $(s = 1,2,3)$, $\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta''$, $V(\theta') = V(\theta'') = 0$ с точностью до членов k-го порядка производная $V^{\cdot}$ будет знакоопределенной, того же знака, что и V, а, следовательно, на основании теоремы Четаева тривиальное решение $r_s = 0$ $(s = 1,2,3)$ неустойчиво. При $a_2 = 0$ можно положить $\varkappa = a_3 / b_3$, и ход рассуждений не изменится (случай $\beta_s = 0$ будет рассмотрен ниже). Аналогичные рассуждения справедливы и при любой иной комбинации перемены знаков у чисел β_1, β_2, β_3.

Вырожденный случай. Рассмотрим частный случай, когда хотя бы одна из величин β_1, β_2, β_3 обращается в нуль. Предположим вначале, что β_1, β_2, β_3 не обращаются в нуль одновременно. Тогда тривиальное решение неустойчиво вне зависимости от знака отличных от нуля β_s. Пусть, например

$$a_1 b_3 + a_3 b_1 = 0$$

Полагая $\varkappa = a_1 / b_1$, получим

$$V^{\cdot} = \frac{p_2}{b_1} r_1^{2p_1} r_2^{2(p_2-1)} r_3^{2p_3} (a_2 b_1 + a_1 b_2)$$

и если $a_2 b_1 + a_1 b_2 \neq 0$, то производная $V^{\cdot}$ будет знакоопределенной в области $r_s \geqslant 0$, $\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta''$. Если же и $a_2 b_1 + a_1 b_2 = 0$, то можно взять $\varkappa = a_2 / b_2$, что опять доказывает неустойчивость, так как $a_3 b_2 + a_2 b_3 \neq 0$.

Рассмотрим теперь сугубо вырожденный случай, когда все β_1, β_2, β_3 обращаются в нуль, т. е.

$$a_2 b_3 + a_3 b_2 = a_1 b_3 + a_3 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \tag{10}$$

Несмотря на особую частность этого случая он имеет большое практическое значение, так как соотношения (10) всегда выполняются для канонических гамильтоновых систем. Действительно, чтобы переменные σ_s, $\bar{\sigma}_s$, подчиняющиеся уравнениям (4) и сопряженным им, были каноническими, должны выполняться условия вида

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \pm \frac{p_1}{p_2}, \quad \frac{a_1}{a_3} = -\frac{b_1}{b_3} = \pm \frac{p_1}{p_3}, \quad \frac{a_2}{a_3} = -\frac{b_2}{b_3} = \pm \frac{p_2}{p_3} \tag{11}$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой. Тот или иной знак берется в зависимости от способа разбиения переменных σ_s, $\bar{\sigma}_s$, $(s = 1,2,3)$ на группы сопряженных канонических переменных.

Покажем, что в этом случае необходимым и достаточным условием сохранения нейтральности системы в k-м приближении является перемена знака в ряду чисел a_1, a_2, a_3 (либо b_1, b_2, $-b_3$).

Достаточность, докажем существованием знакоопределенного интеграла

$$r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 + \alpha_3 r_3^2 = \text{const}, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_3 > 0 \tag{12}$$

Чтобы (12) было интегралом уравнений (6), необходимо и достаточно подчинить α_2 и α_3 системе уравнений

$$a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0, \quad b_1 + \alpha_2 b_2 - \alpha_3 b_3 = 0 \tag{13}$$

которые в силу соотношений (11) тождественны одно другому. Отбрасывая второе уравнение, заключаем, что всегда найдутся $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$, удовлетворяющие (13), если в ряду чисел a_1, a_2, a_3 есть перемена знака.

Если же знаки всех a_1, a_2, a_3 одинаковы, то, полагая в (7) $\varkappa = 0$, на основании теоремы Четаева убеждаемся в неустойчивости тривиального решения в k-м приближении, чем и доказывается необходимость сформулированных условий.

Автор благодарит В. В. Румянцева за обсуждение работы.

Поступила 16 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменков Г. В. Об устойчивости движения. Казань, Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1939.
2. Молчанов А. М. Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения. Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 1,
3. Ибрагимова Н. К. Об устойчивости некоторых систем при наличии резонанса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 5.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения, изд. 2. М., Гостехиздат, 1955.