ЛИТЕРАТУРА

1. Комраз Л. А. Динамическая модель спускового регулятора с магнито-электрическим приводом. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4.
2. Комраз Л. А. Особенности динамики спускового регулятора с электромагнитным приводом. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
3. Аксельрод З. М. Электромеханические часы. М., Машгиз, 1952.
4. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Изв. вузов. Радиофизика, 1958, т. 1, № 2.
5. Баутин Н. Н. Динамическая модель электромеханических часов с ходом Гиппа. Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 11.

ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ В ОДНОМ БЛИЗКОМ К КРИТИЧЕСКОМУ СЛУЧАЕ

В. Г. Веретенников

(Москва)

Рассматривается действительная дифференциальная система вида

$$x_s^{\cdot} = \mu_s x_s - \lambda_s y_s + X_s(x, y), \qquad y_s^{\cdot} = \mu_s y_s + \lambda_s x_s + Y_s(x, y)$$
$$x \equiv (x_1, \ldots, x_n), \qquad y \equiv (y_1, \ldots, y_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{0.1}$$

Здесь μ_s — малые положительные вещественные части комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения. X_s, Y_s — голоморфные функции x_s, y_s, разложения которых начинаются с членов не ниже второго порядка.

На основании определения устойчивости движения в случаях, близких к критическим, данного в работе [1], и результатов работы [2], развитых на случай n-пар чисто мнимых корней, выделяются области устойчивости для системы (0.1).

1. Для исследования устойчивости системы (0.1) при всех $\mu_s = 0$ в нерезонансных случаях от этой системы преобразованием Каменкова Г. В. [3, 4] перейдем к эквивалентной задаче об устойчивости системы

$$\rho^{\cdot} = 2\rho^{k+1} R_0(z) + 2\rho^{k+2} R_1(z) + \ldots$$
$$z_s^{\cdot} = 2\rho^k z_s (z_1 R_{s1}^{(2)} + z_2 R_{s2}^{(2)} + \ldots + z_n R_{sn}^{(2)}) + \ldots$$
$$R_{sj}^{(2)} = R_s^{(2)} - R_j^{(2)}, \quad R_0 = \sum z_j R_j^{(2)}(z) \quad (z_1 + \ldots + z_n = 1, \ s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

На основании теоремы Г. В. Каменкова [3] о неустойчивости можем утверждать, что невозмущенное движение неустойчиво, если хотя бы на одном, отличном от тривиального, вещественном решении системы уравнений

$$z_s z_j R_{sj}^{(2)} = 0 \tag{1.2}$$

выражение $R_0 > 0$.

Таким образом, устойчивость может иметь место только в том случае, если на всех вещественных прямых (1.2) выражение $R_0 \leqslant 0$.

Как показано в работе [5], для $s = n$ и в работе [2] для $s = 3$ условие $R_0 < 0$ на прямых (1.2) является необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости по формам третьего порядка.

Когда задача об устойчивости системы (1.1) решается формами третьего порядка, тогда функцию Ляпунова можно взять в виде [2]

$$V = \rho \exp\left[-Nu(z)\right] \tag{1.3}$$

Здесь N — положительное число, а u — любая непрерывная и ограниченная функция $z_1, \ldots, z_n$.

Производная от (1.3) будет представлять собой определенно-отрицательную функцию, равную

$$V' = 2\rho^{k+1} e^{-Nu} [R_0 - N \sum z_s z_j (R_{sj}^{(2)})^2 P_{sj}] + \ldots \tag{1.4}$$

если функцию u можно выбрать из уравнений

$$\partial u / \partial z_s - \partial u / \partial z_j = R_{sj}^{(2)} P_{sj} \tag{1.5}$$

Здесь P_{sj} — положительные, непрерывные и ограниченные функции $z_1, \ldots, z_n$, не обращающиеся в нуль, или обращающиеся в нуль только на прямых (1.2); или же просто положительные постоянные.

Выражения для u и P_{sj} при $n = 3$ получены в работе [2]. Аналогичные выражения для u и P_{sj} можно построить и при $n \geqslant 4$. Так, если в системе (1.5) положить все $P_{sj} = 1$, то для асимптотической устойчивости по формам третьего порядка, кроме выполнения условия $R_0 < 0$ на решениях системы (1.2), необходимо потребовать (при выбранной функции V), чтобы имела решение система алгебраических уравнений

$$\frac{\partial R_{sn}^{(2)}}{\partial z_{s+k}} - \frac{\partial R_{s+k,n}^{(2)}}{\partial z_s} = 0 \quad (s, k = 1, \ldots, n-2;\ s + k \leqslant n - 1) \tag{1.6}$$

Заметим, что коэффициенты этой системы при введении соответствующей замены [2] можно менять по величине.

Задача об устойчивости может не решаться формами третьего порядка, аналогично тому как она не решается линейными членами. Тогда результаты работы [5] не применимы.

Это будет иметь место, когда на прямых (1.2) выражение R_0 равно нулю. В этом случае при решении задачи необходимо рассматривать формы более высокого порядка.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть формы $R_s^{(2)}$ таковы, что при выполнении условий (1.6) на части вещественных прямых (1.2) выражение $R_0 < 0$, а на остальных равно нулю, но внутри конусов со сколь угодно малыми углами раствора (оси конусов—прямые (1.2), на которых $R_0 = 0$) выражение $R_0 < 0$. Если при этом на тех прямых, где $R_0 = 0$, выражение $R_1 < 0$ или, если при $R_0 = 0$, $R_1 = 0, \ldots, R_{k-1} = 0$ выражение $R_k < 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы проводится при помощи функции Ляпунова вида

$$V = \rho e^{-Nu(z)} + a_1 \rho^2 + \cdots + a_k \rho_k^{k+1}$$

Здесь $a_1, \ldots, a_k$ — положительные числа. Доказательство аналогично приведенному в [2].

2. Теперь перейдем к построению областей устойчивости для систем вида (0.1). Аналогичными преобразованиями система (0.1) может быть приведена к виду

$$\rho^{\cdot} = 2\rho \sum_{i=1}^{n} \mu_i z_i + 2\rho^{k+1} R_0(z) + \ldots$$

$$z^{\cdot}_s = 2z_s \left[\left(\mu_s - \sum_{i=1}^{n} \mu_i z_i \right) + \rho^k \sum_{j=1, j \neq s}^{n} z_j R_{sj}^{(2)} \right] + \cdots \tag{2.1}$$

$$R_0 = \Sigma z_j R_j(z), \quad R_{sj}^{(2)} = R_s^{(2)} - R_j^{(2)} \quad (s = 1, \ldots, n)$$

Для выделения областей устойчивости воспользуемся функцией Ляпунова вида (1.3), предполагая, что при всех $\mu_s = 0$ имеет место асимптотическая устойчивость по формам третьего порядка.

Тогда производную функции V в силу уравнений (2.1) можно представить следующим образом:

$$V' = 2\rho e^{-Nu}\left\{\Sigma\mu_i z_i - N\Sigma\frac{\partial u}{\partial z_s} z_s(\mu_s - \Sigma\mu_i z_i) + \right.$$

$$\left. + \rho\left[R_0 - N\Sigma z_s z_j (R_{sj}^{(2)})^2 P_{sj}\right]\right\} + \rho^3 S \qquad (2.2)$$

Как показано в п. 1, функции u и P_{sj} могут быть выбраны таким образом, что выражение

$$[R_0 - N\,\Sigma z_s z_j (R_{sj}^{(2)})^2 P_{sj}] \leqslant -\delta$$

Здесь δ — некоторое положительное число такое, что

$$\delta = \inf|R_0|$$

на вещественных прямых (1.2).

Кроме того, для выбранной функции u можно определить величину

$$\nu = \sup\left[\Sigma\mu_i z_i - N\Sigma\frac{\partial u}{\partial z_s} z_s(\mu_s - \Sigma\mu_i z_i)\right] \quad (z_1 + \cdots + z_n = 1)$$

Теперь внутренняя граница области устойчивости ρ_* (при малых ρ) с точностью до членов пятого порядка определится выражением

$$\rho_* = \nu / \delta$$

Приближенная оценка внешней границы области устойчивости (при малых ρ) производится при известных V и V' обычным образом.

Поступила 4 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменков Г. В. Об устойчивости движения в случаях близких к критическим. Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, сер. теорет. механ., 1963, т. 1, вып. 1.
2. Веретенников В. Г. Об устойчивости движения в случае трех пар чисто мнимых корней. Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, сер. теорет. механ., 1966, т. 15, вып. 3.
3. Каменков Г. В. Об устойчивости движения. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1939, № 9.
4. Каменков Г. В. К задаче об устойчивости движения в критических случаях. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
5. Молчанов А. М. Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения. Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 1.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ТРЕХ ПАР ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ ПРИ ВНУТРЕННЕМ РЕЗОНАНСЕ

А. Л. Куницын

(Москва)

Исследуется устойчивость тривиального решения автономной системы в критическом случае трех пар чисто мнимых корней при наличии целочисленных соотношений между частотами линеаризованной системы. Даются необходимые и достаточные условия устойчивости в первом нелинейном порядке. Результаты распространяются и на вырожденный случай, включающий гамильтоновы системы.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x_s^{\cdot} = \sum_{r=1}^{6} p_{sr}x_r + X_s(x_1, \ldots, x_6) \qquad (s = 1, \ldots, 6) \qquad (1)$$