

Итак, для решения вопроса об условиях существования субгармонических колебаний в конкретных задачах может быть использован метод анализа амплитудных уравнений.

Поступила 21 V 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

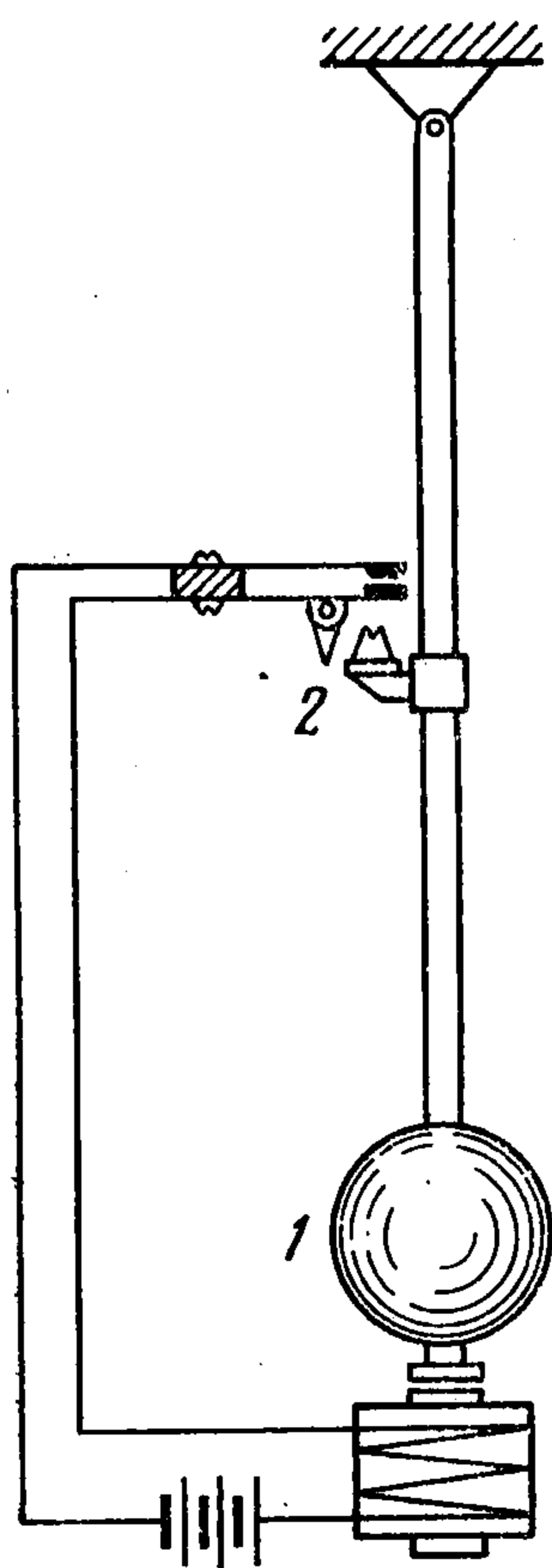
1. П р о с к у р я к о в А. П. Колебания квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы вблизи резонанса. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. М а л к и н И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
3. H a l e J. K. On differential equations containing a small parameter. Contrib. different. equations, vol. 1. N. Y. J. Wiley a Sons, Inc., 1963.
4. А р х а н г е л ь с к и й Ю. А. Об одном случае построения периодических решений квазилинейных систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.

### ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАЯТНИКОВОГО РЕГУЛЯТОРА ГИППА

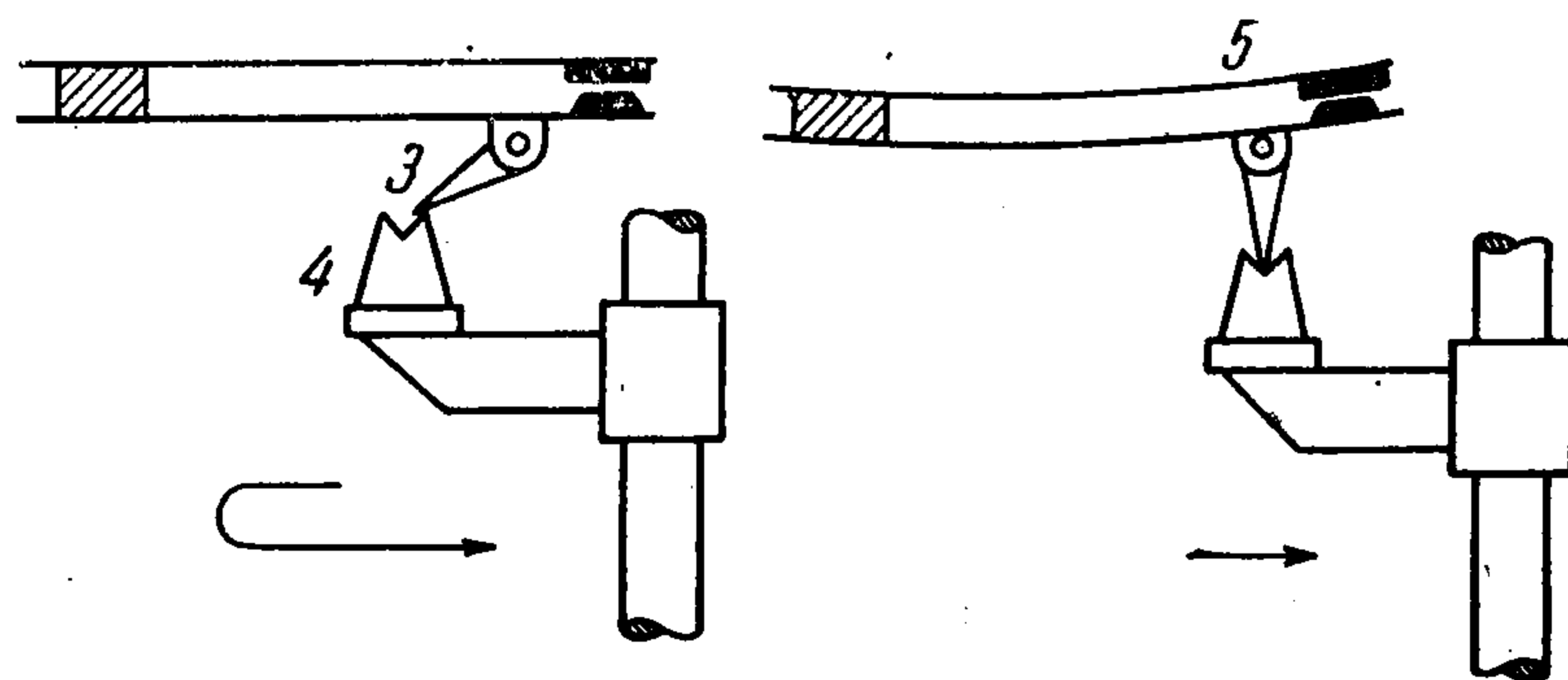
Л. А. Комраз

(Горький)

Рассматривается динамика электромеханических часов с ходом Гиппа. Исследуются две модели: модель с сухим трением и модель с вязким трением. Для модели с сухим трением выделены области в пространстве параметров, соответствующие простым устойчивым периодическим движениям, найдены области, соответствующие сложным устойчивым периодическим движениям и выделена область значений параметров, при которых в системе существует колебательное неперiodическое движение. Для модели с вязким трением в пространстве параметров выделены области, соответствующие одному простому устойчивому периодическому движению, области, соответствующие двум простым устойчивым периодическим движениям, области, соответствующие сложным устойчивым периодическим движениям, и области, соответствующие двум устойчивым периодическим движениям, из которых одно простое, а второе сложное.



Фиг. 1



Фиг. 2

**1. Описание конструкции. Уравнения движения. Переход к модели с мгновенным импульсом.** Принципиальная схема регулятора Гиппа в электромеханических часах изображена на фиг. 1.

Маятник 1 совершает свободные затухающие колебания до тех пор, пока контактное устройство 2 замкнет электрическую цепь и маятник получит подталкивающий импульс, увеличивающий его амплитуду.

Контактное устройство изображено в двух положениях на фиг. 2. В первом положении маятник изображен в момент изменения знака скорости, при амплитуде, уменьшившейся настолько, что язычок 3, подвешенный на оси, задерживается между зубцами гребенки 4, связанной со стержнем маятника. При обратном движении маятника язычок 3 изгибает контактную пружину 5 и замыкает электрическую цепь (второе положение на фиг. 2).

Пренебрегая затуханием для движения осциллятора во время импульса при обычных упрощающих предположениях о характере передачи импульса [1,2], получаем уравнения движения

между импульсами

$$mx'' + H_2x' + kx = -Q \frac{x'}{|x'|}, \quad y_1 = 0 \quad (1.1)$$

во время импульса

$$mx'' + kx = My_1^2, \quad Ly_1' + Ry_1 = E \quad (1.2)$$

Здесь  $m$  — приведенная масса,  $H_2$ ,  $Q$  — коэффициенты соответственно вязкого и сухого трения,  $k$  — коэффициент, характеризующий восстанавливающую силу,  $My_1^2$  — величина силы,  $L$  — самоиндукция катушки,  $R$  — сопротивление цепи,  $E$  — электродвижущая сила,  $x$  — координата маятника, отсчитанная от положения статического равновесия,  $y_1$  — сила тока.

Пусть  $A_1 > \dots > A_N > \dots$  — ряд последовательных «левых» амплитуд при свободном затухающем движении маятника между двумя последовательными импульсами. Импульс передается маятнику в зоне

$$-2b \leq x < 0, \quad x' > 0$$

если амплитуда  $A_N$  попала в интервал

$$|m_1| < A_N \leq |M_1|$$

где  $|M_1|$  — максимальное значение амплитуды, при котором контактное устройство срабатывает и

$$m_1 = M_1 \exp\left(-\frac{\pi H_2}{m\omega}\right) + \frac{Q}{k} \left[ \exp\left(-\frac{\pi H_2}{2m\omega}\right) + 1 \right]^2 \quad (1.3)$$

$$\omega = \frac{1}{2m} (4mk - H_2^2)^{1/2} \quad (H_2^2 - 4mk < 0)$$

Вводя новые переменные и параметры

$$t = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} tcm, \quad y = \left(\frac{M}{k}\right)^{1/2} y_1, \quad A = \frac{R}{L} \left(\frac{m}{k}\right)^{1/2} \quad (1.4)$$

$$B = \frac{E}{R} \left(\frac{M}{k}\right)^{1/2}, \quad H_1 = \frac{H_2}{2\sqrt{mk}}, \quad r = \frac{Q}{k}$$

приведем уравнения (1.1) и (1.2) соответственно к виду,

$$x'' + 2H_1x' + x = -r \frac{x'}{|x'|}, \quad y = 0 \quad (1.5)$$

$$x'' + x = y^2, \quad y' + Ay = AB \quad (1.6)$$

Переход от (1.6) к (1.5) происходит при  $x = 0$ ,  $x' > 0$ , а от (1.5) к (1.6) при  $x = -2b$  на отрезке  $s$ . Отрезок  $s$  — отображение отрезка  $[M_1, m)$  оси  $x$  на полупрямой  $x = -2b$ ,  $y = 0$ ,  $x' > 0$  по кускам траекторий уравнения (1.5) с наименьшим временем перехода.

Перейдем к модели с мгновенным импульсом, осуществив в уравнениях (1.6) предельный переход при  $b \rightarrow 0$  и

$$\int_0^{\tau} y^2 d\tau = B^2 \psi(\tau) \equiv I_0 = \text{const}, \quad \psi(\tau) = \tau + \frac{2}{A} (e^{-A\tau} - 1) - \frac{1}{2A} (e^{-2A\tau} - 1) \quad (1.7)$$

Здесь  $\tau$  — время импульса.

Для этого найдем аналитические выражения точечного преобразования отрезка  $s$  в отрезок  $\sigma$  полупрямой  $x = 0, x' > 0, y = 0$ .

Пусть  $u \in s$  и  $v \in \sigma$  тогда для точечного преобразования получаем

$$u = \frac{1}{\sin \tau} [2b \cos \tau - B^2 \varphi(\tau)], \quad v = \frac{1}{\sin \tau} [2b + B^2 \xi(\tau)] \quad (1.8)$$

Здесь,

$$\varphi(\tau) = 1 - \cos \tau - 2F(A, \tau) + F(2A, \tau), \quad F(A, \tau) = \frac{e^{-A\tau} - \cos \tau + A \sin \tau}{1 + A^2}$$

$$\xi(\tau) = 1 - \cos \tau - 2\Phi(A, \tau) + \Phi(2A, \tau), \quad \Phi(A, \tau) = \frac{1 - e^{-A\tau} (\cos \tau + A \sin \tau)}{1 + A^2}$$

$$0 < \tau \leq \tau_0 < \frac{1}{2} \pi$$

Из первого уравнения (1.8) находим, что для любого  $u = \text{const} > 0$  существует (см. приложение 1) такая функция  $\tau = \tau(b)$ , что  $\lim_{b \rightarrow 0} \tau(b) = 0$  ( $b \rightarrow 0$ ).

Используя (1.7), запишем (1.8) в следующем виде

$$u = \frac{1}{\sin \tau} \left[ 2b \cos \tau - I_0 \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)} \right], \quad v = \frac{1}{\sin \tau} \left[ 2b + I_0 \frac{\xi(\tau)}{\psi(\tau)} \right] \quad (1.9)$$

Переходя в выражениях (1.9) к пределу при  $b \rightarrow 0$ , получаем (см. приложение 2)

$$u = \frac{1}{4} [(h / I_0)^{1/3} - I_0], \quad v = \frac{1}{4} [(h / I_0)^{1/3} + 3I_0]$$

и исключая  $I_0$ , находим окончательно зависимость между доимпульсной и послеимпульсной скоростями осциллятора при мгновенном импульсе

$$(v - u)(v + 3u)^3 = h \quad (1.10)$$

Рассмотрим в плоскости  $uv$  кривую (1.10). Имеем

$$\frac{dv}{du} = \frac{3u - 2v}{v}, \quad \frac{d^2v}{du^2} = \frac{3h}{v^3(v - 3u)^2} > 0 \quad (1.11)$$

При  $u = 0$  будет  $dv/du = -2$ , при  $v = \frac{3}{2}u$  кривая (1.10) имеет минимум. При  $u \rightarrow \infty$  приближается к асимптоте  $v = u$  сверху (фиг. 3).

Замечая, что

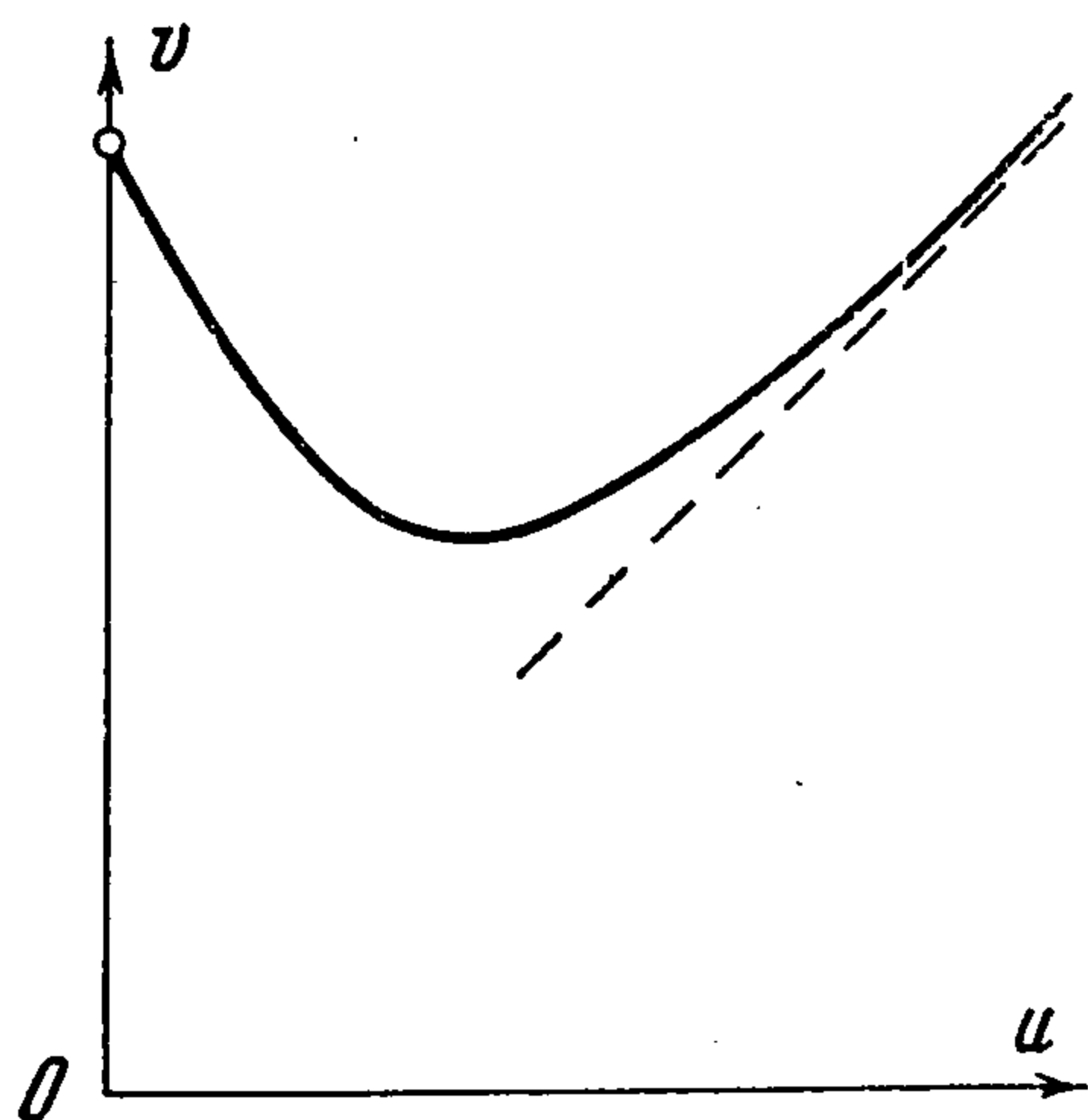
$$\frac{dv}{dh} = \frac{1}{4v(v + 3u)}, \quad \frac{du}{dh} = \frac{1}{4(2v - 3u)(v + 3u)} \begin{cases} > 0 \text{ при } v > \frac{3}{2}u \\ < 0 \text{ при } v < \frac{3}{2}u \end{cases} \quad (1.12)$$

заключаем, что при увеличении (уменьшении) параметра  $h$  кривая (1.10) поднимается (опускается).

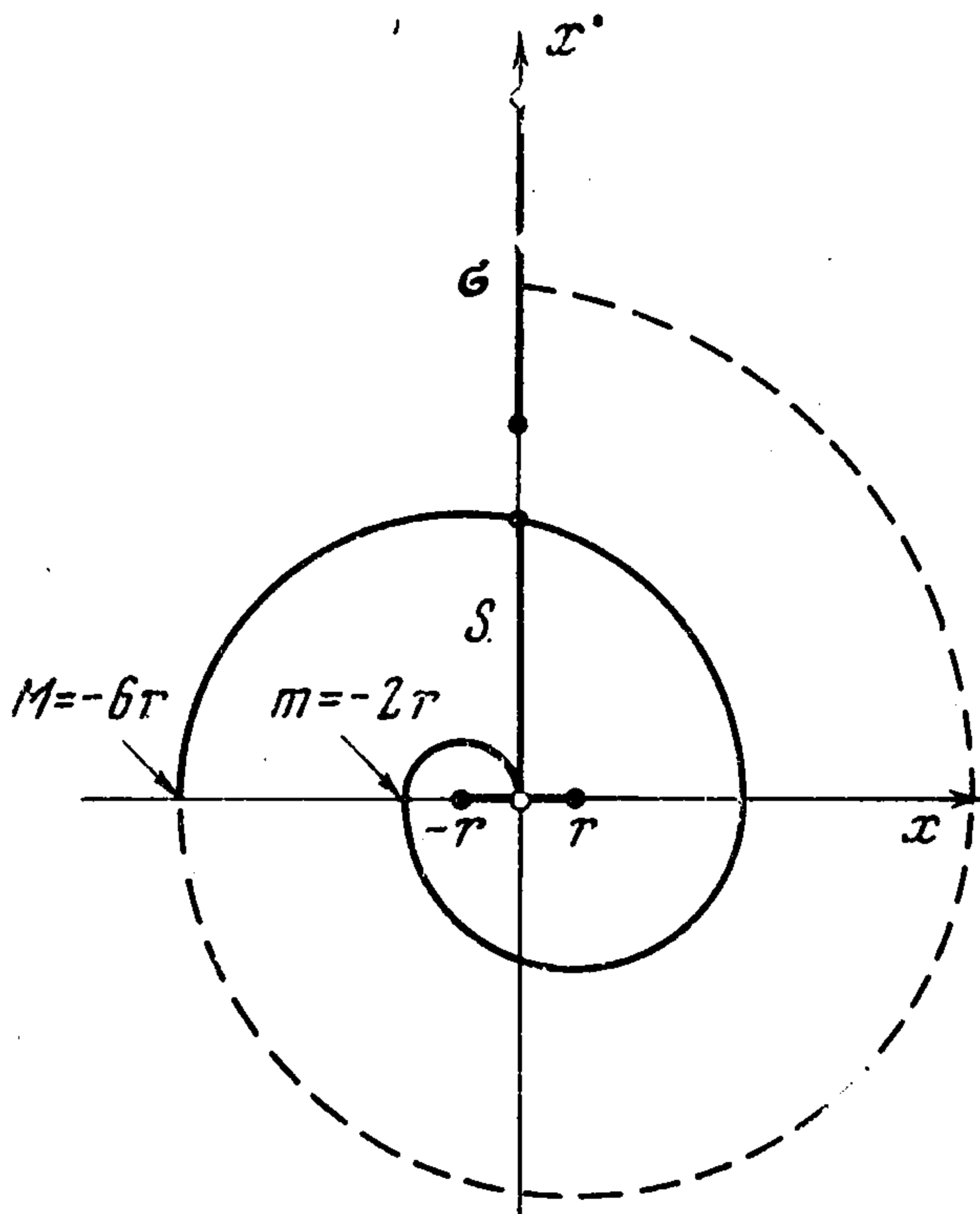
2. Модель с сухим трением. 2.1 Сведение задачи к точечному преобразованию. Рассмотрим модель с сухим трением<sup>1</sup> (в уравнении (1.5) положим  $H_1 = 0$ ) и отрезком  $s$ , примыкающим к оси  $x' = 0$ . В этом случае из (1.3) и (1.4) будет:  $M_1 = -6r$ ,  $m_1 = -2r$  (фиг. 4).

<sup>1</sup> Часы с ходом Гипса именно в такой идеализации при учете только сухого трения рассматриваются в работе [3]. Постулируя осуществимость при любых значениях параметров системы простейшего типа движений, автор ограничивается определением его периода.

Точки отрезка  $s$  ( $x = 0, 0 < x' \leq 2r\sqrt{6}$ ) соответствуют состояниям, при которых осциллятор получает импульс. Изображающая точка, попавшая на отрезок  $s$  в точку с координатами  $x = 0, x' = u$ , мгновенно перескакивает в соответствии с уравнением (1.10) в точку  $x = 0, x' = v$ . Отрезок  $\sigma$  полупрямой  $x = 0, x' > 0$  есть отображение  $s$  по уравнению (1.10). Фазовое пространство системы заполнено траекториями уравнения (1.5) (в рассматриваемом случае — спиралями, составленными из кусков полуокружностей), имеющими своим началом точки куска  $\sigma$ , а своим концом точки куска  $s$ . Кусок  $s$  есть отрезок между соседними витками спирали. Каждая траектория, имеющая своим началом точку, принадлежащую  $\sigma$ , пересекает и кусок  $s$ , если отрезки  $\sigma$  и  $s$  не имеют общих точек (точки, принадлежащие пересечению  $\sigma$  и  $s$ , попадают на отрезок покоя). Точечное преобразование  $T$  в себя куска  $\sigma$  полностью определяет структуру разбиения фазового пространства на траектории.



Фиг. 3



Фиг. 4

Преобразование отрезка  $\sigma$  в отрезок  $s$  ( $v_1 \in \sigma, u \in s$ ) имеет следующий вид:

$$(v_1^2 + r^2)^{1/2} - (u^2 + r^2)^{1/2} = 4rN \quad (2.1)$$

Здесь  $N$  для каждого  $v_1$  определяется однозначно.

2.2. *Исследование преобразования отрезка  $\sigma$  в отрезок  $s$ .* Рассмотрим в плоскости  $u, v_1$  кривую (2.1) ( $N = 1, 2, \dots$ ). Пусть  $D_N(0, v_1(0, N))$  — точки пересечения различных ветвей кривой (2.1) с прямой  $u = 0$  ( $v_1(0, N) = 2r[2N(2N+1)]^{1/2}$ ). Тогда точки  $P_N(u_1, v_1(0, N+1))$  будут точками пересечения соответствующих ветвей кривой (2.1) с прямой  $u = u_1$  ( $u_1 = 2r\sqrt{6}$ ). Обозначим через  $s_N$  полуинтервалы  $v_1(0, N) < v_1 < v_1(0, N+1)$  на оси  $v_1$ .

Уравнение (2.1) определяет для всех  $v_1 > v_1(0, 1)$  и  $u$ , принадлежащих  $s$  ( $0 < u \leq u_1$ ), величину  $u$  как однозначную, разрывную в точках  $v_1 = v_1(0, N)$  функцию  $v_1$ .

Из выражения (2.1) находим

$$\frac{dv_1}{du} = \frac{u}{v_1} \left( \frac{v_1^2 + r^2}{u^2 + r^2} \right)^{1/2} \geq 0, \quad \frac{d^2v_1}{du^2} = \frac{r^2}{u(u^2 + r^2)} \left( \frac{dv_1}{du} - \frac{u^3}{v_1^3} \right) > 0 \quad (2.2)$$

2.3. *Исследование устойчивости неподвижных точек преобразования  $T$ .* Рассмотрим теперь плоскость  $uv$ , на которой совместим кривые (1.10) и (2.1) (диаграмму Ламерея). При значениях параметров, удовлетворяющих условию

$$r = 1/12 \sqrt{6} h^{1/4} \quad (2.3)$$

кривая (1.10) и ветвь  $N = 1$  кривой (2.1) отсекают на оси  $v$  диаграммы Ламерея равные отрезки:  $v = 2r \sqrt{6}$  (проходят через точку  $D_1$ ). При  $r > 1/12 \sqrt{6} h^{1/4}$  кривые (1.10) и (2.1) не имеют точек пересечения (при этом  $\sigma \subset s$  и часы заведомо не работают).

Возьмем значения параметров, удовлетворяющих условию (2.3). В точке  $D_1$  будет  $dv/dv_1 = -\infty$ . Зафиксируем параметр  $r$  и будем увеличивать  $h$  до значения, при котором кривые (1.10) и (2.1) пересекутся в точке  $P_1$  (в силу (1.12) такое значение параметра  $h$  найдется). В этой точке будет

$$dv/dv_1 = 5/9 (3 - \sqrt{40/3}) > -1$$

Из сказанного следует, что найдутся такие значения параметров  $h$  и  $r$ , при которых в точке пересечения кривых (1.10) и (2.1) будет

$$dv/dv_1 = -1$$

Аналогичное рассуждение можно провести и для ветви  $N = 2$  кривой (2.1). Таким образом, для ветвей  $N = 1$  и  $N = 2$  существует бифуркация неподвижной точки преобразования  $T$ , при которой корень характеристического полинома переходит через значение  $\lambda = -1$ .

Уравнение соответствующей бифуркационной кривой имеет вид

$$(v - u)(v + 3u)^3 = h, \quad (v^2 + r^2)^{1/2} - (u^2 + r^2)^{1/2} = 4rN \quad (2.4)$$

$$\frac{u}{v} \left( \frac{v^2 + r^2}{u^2 + r^2} \right)^{1/2} = \frac{2v - 3u}{v}$$

Из третьего выражения (2.4) получаем

$$r^2 = \frac{3}{4} \frac{3u - v}{v - 2u} u^2 \quad (2.5)$$

Отсюда следует

$$2 < z < 3 \quad (z \equiv v/u) \quad (2.6)$$

Из (2.4) легко получить уравнение для определения  $z$

$$(z + 1)(z + 2)^3 - 12N^2(3 - z)^2 = 0 \quad (2.7)$$

которое имеет единственный положительный корень. Используя (2.5), получаем для бифуркационной кривой

$$r = \left[ \frac{9(3 - z)^2 h}{16(z - 2)^2(3 + z)^3(z - 1)} \right]^{1/4} \equiv r_1(z, h) \quad (2.8)$$

Здесь  $z$  — корень уравнения (2.7).

Для координат точки  $P_3$  (координат правого конца ветви  $N = 3$  кривой (2.1)) будет  $z = 2\sqrt{3} > 3$ . Для точек пересечения кривой (1.10) с ветвями  $N = 3, 4, \dots$  будет  $dv/dv_1 < -1$  и, следовательно, соответствующие неподвижные точки преобразования  $T$  будут неустойчивы.

При значениях параметров, удовлетворяющих условию

$$r = \frac{h^{1/4}}{\{2^6 [ \sqrt{(N+1)(2N+3)} - \sqrt{3} ] [3\sqrt{3} + \sqrt{(N+1)(2N+3)}] \}^{1/4}} \equiv r_2(N, h) \quad (2.9)$$

кривая (1.10) проходит через точку  $P_N$ . При выборе параметров, удовлетворяющих условию

$$r_1(z, h) < r < r_2(N, h) \quad (2.10)$$

(здесь  $z$  — корень уравнения (2.7)) для  $N = 1$  или  $N = 2$  неподвижные точки преобразования  $T$  будут устойчивы.

2.4. Неустойчивость неподвижных точек преобразования  $T^n$  для  $N > 3$ . При выборе параметров, удовлетворяющих неравенству

$$h^{1/4} \geq 6r [4(2 - \sqrt{3}/3)(2 + \sqrt{3})^3]^{1/4} \quad (2.11)$$

для  $u \in s$  кривая (1.10) расположена выше точки  $P_3$ .

Справедливо утверждение: для параметров, удовлетворяющих условию (2.11), преобразование  $T^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) может иметь только неустойчивые неподвижные точки (в фазовом пространстве рассматриваемой динамической системы могут существовать лишь неустойчивые предельные циклы).

Действительно для любого  $u \in s$  справедливо неравенство

$$\left| \frac{dv_1}{du} \right|_{N=3} > \left| \frac{dv_1}{du} \right|_{N>3}$$

(для каждого  $u$  наклоны ветвей кривой (2.1) убывают с возрастанием  $N$ ) и при выполнении (2.11) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\min \left| \frac{dv}{du} \right| = \left| \frac{dv}{du} \right|_{P_3} > \left| \frac{dv_1}{du} \right|_{P_{3,1}} = \max \left| \frac{dv_1}{du} \right|_{N=3} = \max \left| \frac{dv_1}{du} \right|_{N>3} \quad (2.12)$$

Пусть преобразование  $T^n$  имеет неподвижную точку  $v^{(1)} = v^{(n+1)} = v^*$ , т. е.

$$v^* = T^n v^*$$

Тогда для корня  $\lambda$  характеристического полинома преобразования  $T^n$  имеем

$$|\lambda| = \prod_{i=1}^n \left| \frac{dv}{du} \right|_{v^{(i)}} \left| \frac{du}{dv_1} \right|_{v^{(i+1)}}$$

Но в силу (2.12) справедливо

$$\left| \frac{dv}{du} \right|_{v^{(i)}} \left| \frac{du}{dv_1} \right|_{v^{(i+1)}} > 1$$

Следовательно,  $|\lambda| > 1$  и утверждение доказано.

2.5. Количество неподвижных точек преобразования  $T$ . Кривая (1.10) может иметь с каждой из ветвей кривой (2.1) лишь одну точку пересечения. Действительно, в точке пересечения ( $v = v_1$ ) будет

$$\frac{dv}{du} = \frac{3u - 2v}{v} < \frac{u}{v} < \frac{u}{v} \left( \frac{v^2 + r^2}{u^2 + r^2} \right)^{1/2} = \frac{dv_1}{du}$$

Выясним число точек пересечения кривой (1.10) с различными ветвями кривой (2.1) для  $u \in s$ . При выборе параметров, удовлетворяющих условию (2.9), кривая (1.10) пересекает  $N$ -ю ветвь кривой (2.1) в точке  $P_N$ , в которой выполняется (см. приложение 3)  $dv/du < 0$ . Поэтому в силу (1.12) среди параметров, удовлетворяющих условию

$$r > r_2(N, h)$$

найдутся такие, при которых кривая (1.10) будет пересекать не менее двух ( $N$  и  $N + 1$ ) ветвей кривой (2.1)).

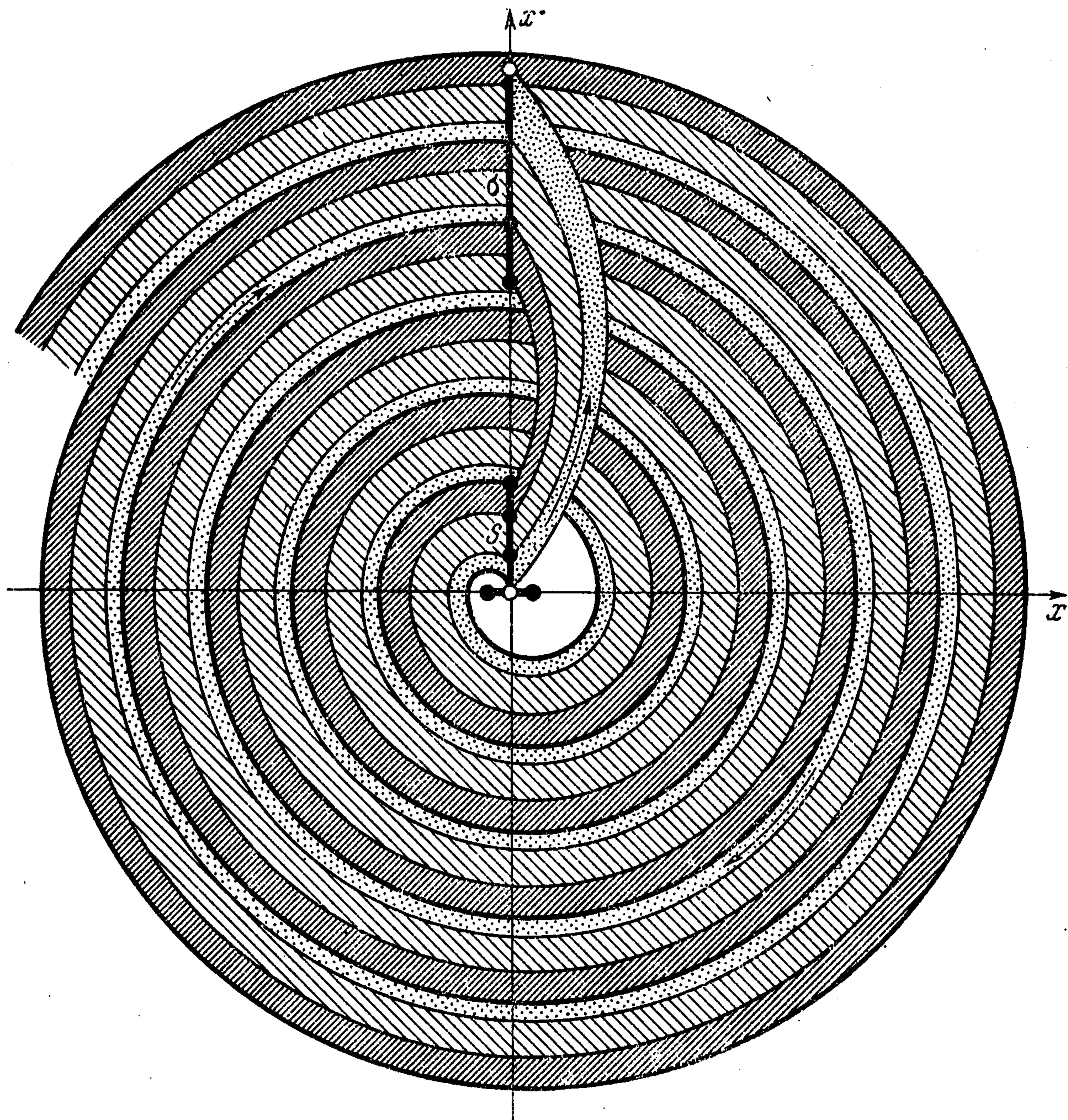
Для значений параметров, удовлетворяющих условию

$$r = \frac{h^{1/4}}{2[2(N+p+1)(2N+2p+3)]^{1/2}} \quad (2.13)$$

кривая (1.10) проходит через точку  $D_{N+p+1}$  при  $p = j$  ( $j = 0, 1, \dots$ )

Точка пересечения кривой (1.10) с осью  $v$  принадлежит интервалу  $s_{N+j+1}$  при изменении  $p$  в пределах  $j < p \leq j + 1$

Потребуем, чтобы кривая (1.10) проходила через точку  $P_N$  и определим наибольший номер  $N + j + 1$  интервала  $s_{N+j+1}$ , в который она попадает.



Фиг. 5

Используя (2.9) и (2.13), получаем для определения  $p$  уравнение

$$(N + p + 1)^2 (2N + 2p + 3)^2 = [\sqrt{(N + 1)(2N + 3)} - \sqrt{3}][3\sqrt{3} + \sqrt{(N + 1)(2N + 3)}]^2 \quad (2.14)$$

Число искомых точек пересечения  $l$  кривых (1.10) и (2.1) выражается через  $p$

$$l = [p] + 2$$

Здесь символ  $[p]$  означает — целая часть  $p$ .

Можно показать (см. приложение 4), что  $1 < p < 3$ . Таким образом, при выборе параметров, удовлетворяющих условию (2.11), преобразование  $T$  может иметь две, три или четыре неустойчивые неподвижные точки.

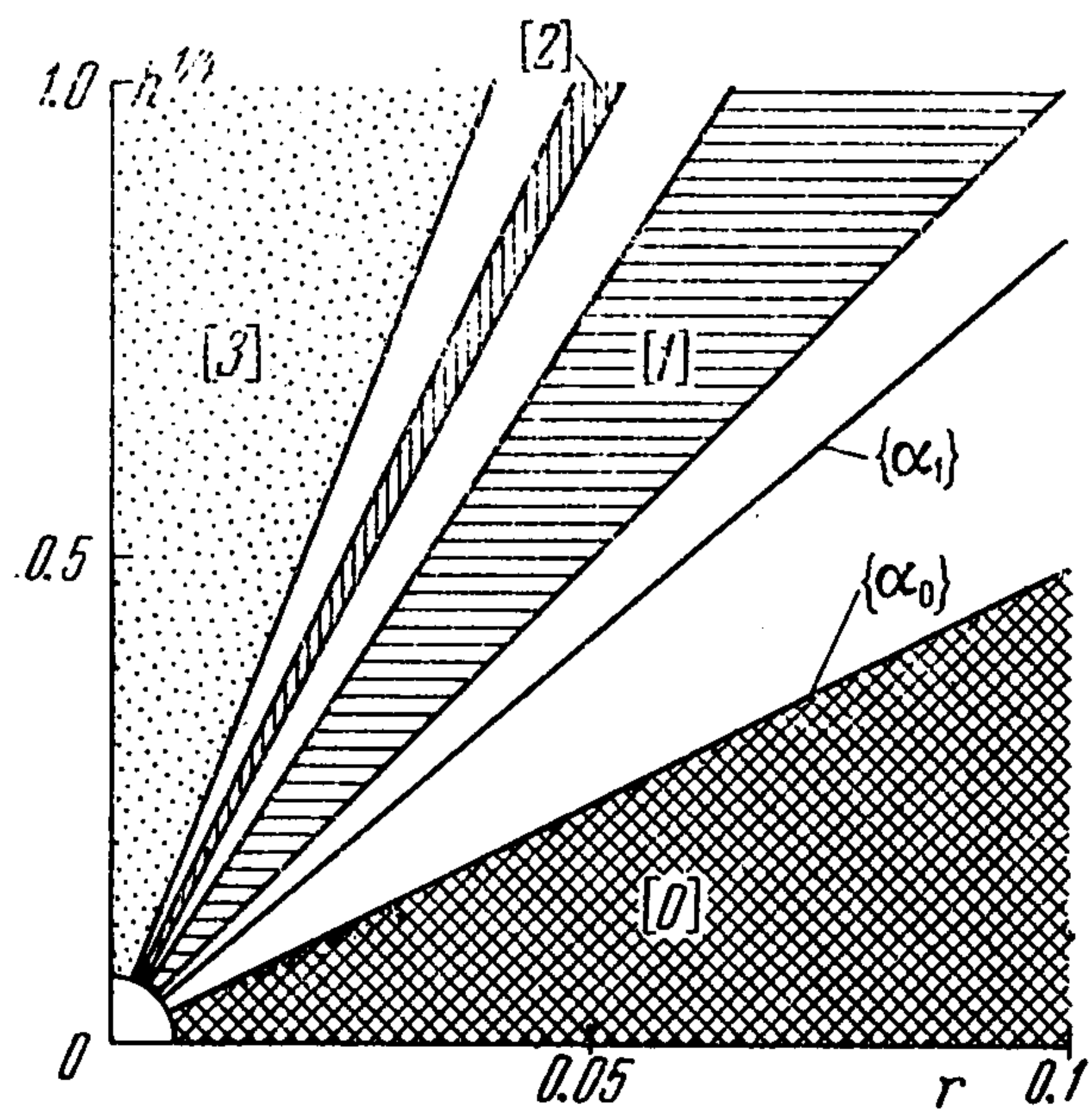
На фиг. 5 представлено фазовое пространство системы для случая, когда кривая (1.10) пересекает две ветви кривой (2.1). Отрезок  $s$  разделен на три части: точки нижней части вернутся на  $s$  после скачка на отрезок  $s_1$  (согласно (1.10)) и пяти оборотов по плоскости  $xx'$  (согласно (2.1)); точки средней части вернутся после четырех оборотов, а точки верхней части — после трех.

2.6. Разбиение пространства параметров и характер бифуркаций неподвижных точек преобразования  $T^n$ . Уравнение (2.3) определяет в пространстве параметров  $h^{1/4}$ ,  $r$  прямую, которая выделяет область [0], когда часы заведомо не работают (фиг. 6).

Требование того, чтобы минимум кривой (1.10) был равен минимуму ветви  $N = 1$  кривой (2.1), приводит к уравнению

$$r = h^{1/4} / \sqrt{72} \quad (2.15)$$

(прямая  $\{\alpha_1\}$ ). Выше прямой  $\{\alpha_1\}$  в пространстве параметров расположена область, для которой отрезки  $\sigma$  и  $s$  не имеют общих точек и при любых начальных условиях изображающая точка попадет в часть фазовой плоскости, заполненной траекториями уравнения (1.5), имеющими своим началом отрезок  $\sigma$ , а концом —  $s$ . При своем дальнейшем движении изображающая точка не может покинуть указанную часть фазовой плоскости (часы работают).



Фиг. 6

Неравенства (2.10) (которые могут быть выполнены лишь при  $N = 1$  или  $N = 2$ ) выделяют среди параметров, расположенных выше прямой  $\{\alpha_1\}$ , области существования устойчивых неподвижных точек преобразования  $T$ , соответствующих простейшему устойчивому периодическому движению, при котором импульс передается через каждые  $N$  колебаний осциллятора (область [1] — для  $N = 1$ , область [2] — для  $N = 2$ , фиг. 6).

Условие (2.11) выделяет область [3], для которой в системе существует колебательное непериодическое движение (изображающая точка не выходит из указанной выше полосы фазовой плоскости, в которой не может существовать устойчивого предельного цикла любой кратности).

Рассмотрим область в пространстве параметров, выделяемую неравенством

$$r > r_1(z, h^{1/4})$$

Здесь  $z$  — корень уравнения (2.7) при  $N = 1$ . В рассматриваемой области неподвижная точка преобразования  $T$  может быть только неустойчивой. Для любого  $r$  найдутся такие значения параметра  $h$ , взятые из этой области, при которых существует пара устойчивых неподвижных точек преобразования  $T^2$ , и такие его значения, при которых существует пара неустойчивых неподвижных точек преобразования  $T^2$  (см. приложение 5). Поэтому можно ожидать при изменении параметра  $h$  бифуркации неподвижной точки преобразования  $T^2$ , при которой корень характеристического полинома (для этого преобразования) переходит через значение  $\lambda = -1$  и появляются или исчезают четыре неподвижные точки преобразования  $T^4$ .

Для исследования характера бифуркаций неподвижных точек преобразования  $T^n$  был использован счет на БЭСМ-3М.

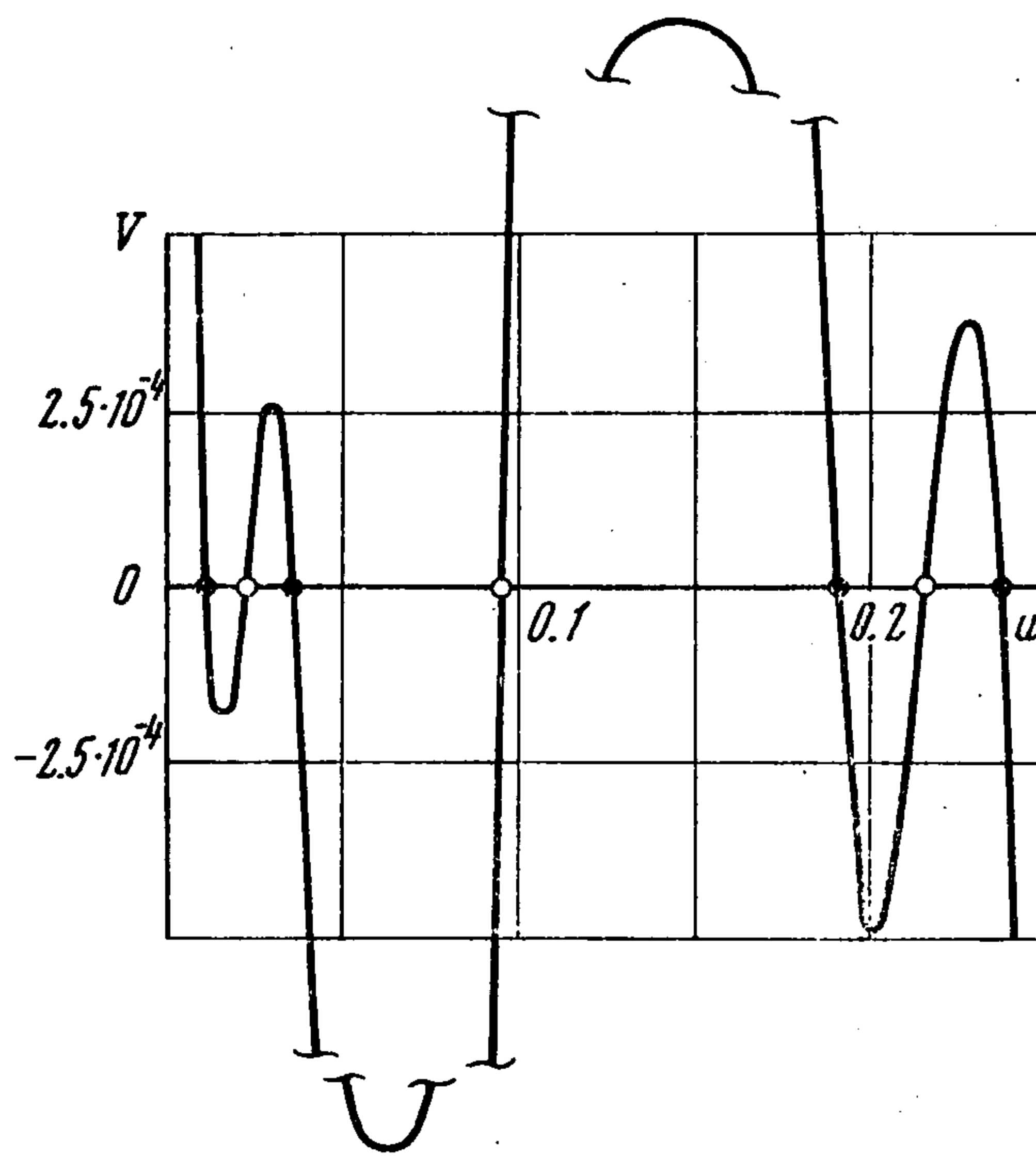
Для выяснения характера бифуркации неподвижной точки преобразования  $T$ , при которой корень характеристического полинома переходит через значение  $\lambda = -1$  (переход в пространстве параметров через нижнюю границу областей или [1] или [2] в сторону убывания параметра  $h$ ) для ряда значений параметров была вычислена величина  $g_0$  [4] и построена (при  $n = 2$ ) функция

$$V(u) = T^2 v - v \quad (2.16)$$

Как показало это исследование, при указанном переходе устойчивая неподвижная точка преобразования  $T$  становится неустойчивой, при этом из нее рождаются две

устойчивые неподвижные точки преобразования  $T^2$ , соответствующие устойчивому периодическому движению, в котором повторение происходит после двух импульсов, а импульсы чередуются с  $N$  ( $N = 1, 2$ ) колебаниями осциллятора.

Построение функции (2.16) при  $n = 4$  показало, что бифуркация неподвижной точки преобразования  $T^2$  (о ней было сказано выше), при которой корень характеристического полинома переходит через значение  $\lambda = -1$ , существует и что при переходе в пространстве параметров через соответствующую бифуркационную кривую в сторону убывания параметра  $h$  пара неподвижных точек преобразования  $T^2$  меняет устойчивость, превращаясь из устойчивых в неустойчивые, при этом из них рождаются четыре устойчивые неподвижные точки преобразования  $T^4$ , соответствующие устойчивому периодическому движению, в котором повторение происходит после четырех импульсов, а импульсы чередуются с одним ( $N = 1$ ) колебанием осциллятора. На фиг. 7 представлен график функции  $V(u)$ , построенный при значениях параметров  $h^{1/4} = 0.5$ ,  $r = 0.05865$ . Нули функции, изображенные на графике светлыми точками, соответствуют неустойчивым предельным циклам: центральная — однооборотному, две другие — двухоборотному; нули функции, изображенные на графике темными точками, соответствуют четырехоборотному устойчивому предельному циклу.



Фиг. 7

Построение функции (2.16) при  $n = 8$  показало, что существуют бифуркации неподвижной точки преобразования  $T^4$ , при которой корень характеристического полинома переходит через значение  $\lambda = -1$ , и что при переходе в пространстве параметров через соответствующую бифуркационную кривую в сторону убывания параметра  $h$  четыре неподвижные точки преобразования  $T^4$  меняют устойчивость, превращаясь из устойчивых в неустойчивые, при этом из них рождаются восемь устойчивых неподвижных точек преобразования  $T^8$ , соответствующих устойчивому периодическому движению, в котором повторение происходит после восьми импульсов, а импульсы чередуются с одним колебанием осциллятора.

Приводим бифуркационные значения параметра  $r$  (при фиксированном  $h^{1/4} = 0.5$  и  $N = 1$ ), при которых рождаются устойчивые неподвижные точки преобразования  $T^n$  ( $n = 2, 4, 8$ )

$$T^2 \text{ при } r = 0.05035, \quad T^4 \text{ при } r = 0.05836, \quad T^8 \text{ при } r = 0.05876$$

Приведенные значения параметра  $r$  выделяют интервалы

$$0.05035 < r < 0.05836, \quad 0.05836 < r < 0.05876$$

существования неподвижных устойчивых точек преобразования соответственно  $T^2$  и  $T^4$ .

**3. Модель с вязким трением. 3.1 Точечное преобразование.** Рассмотрим модель с вязким трением (в уравнении (1.5) положим  $r = 0$ ). Осциллятор получает импульс на отрезке  $s$

$$x = 0, \quad 0 < u_0 = Ke^{-2\pi H} < x' \leq K = u_1 \quad H = H_1(1 - H_1^2)^{-1/2}$$

Преобразование отрезка  $\sigma$  в отрезок  $s$  ( $v_1 \in \sigma$ ,  $u \in s$ ) имеет следующий вид:

$$v_1 = ue^{2\pi HN} \quad (3.1)$$

Кривая (3.1) имеет  $N$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) ветвей (отрезков прямых). Пусть  $D_N(u_0, v_1(u_0, N))$  — точки пересечения различных ветвей кривой (3.1) с прямой  $u =$

$= u_0 (v_1(u_0, N) = Ke^{2\pi N(N-1)})$ . Тогда точки  $P_N(u_1, v_1(u_0, N+1))$  будут точками пересечения соответствующих ветвей кривой (3.1) с прямой  $u = u_1$ . Как и раньше,  $s_N$  — полуинтервалы  $v_1(u_0, N) < v_1 < v_1(u_0, N+1)$  на оси  $v_1$ .

Уравнение (3.1) определяет для всех  $v_1 > v(u_0, 1)$  и  $u$ , принадлежащих  $s$ , величину  $u$  как однозначную, разрывную в точках  $v_1 = v_1(u_0, N)$  функцию  $v_1$ .

Выражения (1.10) и (3.1) определяют преобразование  $T$  отрезка  $\sigma$  самого в себя. Исследуем взаимное расположение кривой (1.10) и ветвей кривой (3.1) (отрезков прямых) на интервале  $(u_0, u_1]$ .

В точке пересечения кривых (1.10) и (3.1) имеет место

$$|dv/du| < |dv_1/du| \quad (3.2)$$

и, следовательно, кривая (1.10) может иметь с каждой из ветвей кривой (3.1) единственную точку пересечения, соответствующую устойчивой неподвижной точке преобразования  $T$ .

Пусть  $W$  — наибольшая, а  $w$  — наименьшая ординаты кривой (1.10) на интервале  $s$ . На интервале  $[w, W]$  для всех точек кривых (1.10) и (3.1) справедливо (см. приложение 6) неравенство (3.2) и, следовательно, кривая (1.10) может пересекать не более двух различных ветвей кривой (3.1) (интервал  $\sigma$  расположен не более чем на двух полуинтервалах  $s_N$  и  $s_{N+1}$ ), а преобразование  $T^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) может иметь только устойчивые неподвижные точки (на фазовой плоскости рассматриваемой модели предельные циклы любой кратности могут быть лишь устойчивыми).

Возможны следующие три варианта взаимного расположения кривой (1.10) и ветвей (3.1): кривая (1.10) не пересекает ни одной ветви кривой (3.1); пересекает  $N+1$ -ю ветвь; пересекает две ветви  $N$  и  $N+1$ .

В первом случае, используя (3.2) и повторяя рассуждения [5], можно показать, что преобразование  $T^n$  имеет  $n$  устойчивых неподвижных точек, которые соответствуют устойчивому периодическому движению, в котором происходит чередование с импульсами серий из  $N$  и  $N+1$  колебаний осциллятора.

Во втором случае всегда существует одна устойчивая неподвижная точка преобразования  $T$ , которой соответствует на фазовой плоскости спираль из  $N+1$  витков с замыканием мгновенным импульсом, и кроме того, может существовать  $n$  устойчивых неподвижных точек преобразования  $T^n$  (когда интервал  $\sigma$  расположен на двух полуинтервалах  $s_N$  и  $s_{N+1}$ ). В зависимости от начальных условий устанавливается простое или сложное устойчивое периодическое движение.

В третьем случае всегда существуют две простые устойчивые неподвижные точки преобразования  $T$ . В зависимости от начальных условий устанавливается или периодическое движение, в котором происходит чередование с импульсами  $N$  колебаний осциллятора, или периодическое движение, в котором с импульсами чередуются  $N+1$  колебаний осциллятора.

3.2. Структура пространства параметров. Рассмотрим теперь пространство параметров  $H$ ,  $h$  и  $K$  и выделим в нем области, отвечающие каждому из трех перечисленных выше вариантов взаимного расположения кривой (1.10) и ветвей кривой (3.1).

При значениях параметров, удовлетворяющих условию

$$h = e^{-8\pi H} (e^{2\pi HN} - 1)(e^{2\pi HN} + 3)^3 K^4 \equiv G_1(N, H) K^4 \quad (3.3)$$

кривая (1.10) проходит через точку  $D_N$  (отсекает равные отрезки на прямой  $u = u_0$  с  $N$ -й ветвью кривой (3.1)).

При значениях параметров, удовлетворяющих условию

$$h = (e^{2\pi HN} - 1)(e^{2\pi HN} + 3)^3 K^4 \equiv G_2(N, H) K^4 \quad (3.4)$$

кривая (1.10) проходит через точку  $P_N$  (отсекает на прямой  $u = u_1$  равные отрезки с  $N$ -й ветвью кривой (3.1)).

Уравнения (3.3) и (3.4) определяют в пространстве параметров два семейства поверхностей  $\{\alpha_N\}$  и  $\{\beta_N\}$  ( $N = 1, 2, \dots$ ), которые обладают (см. приложение 7) следую-

щими свойствами: поверхности каждого из семейств  $\{\alpha_N\}$  или  $\{\beta_N\}$  не пересекаются при  $H > 0$  и  $K > 0$ ; поверхности разных семейств пересекаются, причем поверхность  $\{\alpha_{N+1}\}$  пересекается только с поверхностью  $\{\beta_N\}$  и только один раз. Сечение пространства параметров  $H, h, K$  плоскостью  $K = 1$  представлено на фиг. 8.

Поверхность  $\{\alpha_1\}$  ограничивает область значений параметров [0], для которой кривые (1.10) и (3.1) не имеют точек пересечения, при этом  $\sigma \subset s$  и часы не работают.

Каждая пара поверхностей  $\{\alpha_{N+1}\}$  и  $\{\beta_N\}$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) выделяет области [2] и [3] (на фиг. 8 представлены только три такие пары).

Области значений параметров [3], расположенной ниже поверхности  $\{\alpha_{N+1}\}$  и выше поверхности  $\{\beta_N\}$ , соответствует первый вариант взаимного расположения кривых (1.10) и (3.1) (они не пересекаются).

Кривая (1.10) расположена между  $N$ -й и  $N + 1$ -й ветвями кривой (3.1).

Области значений параметров [2], расположенной выше поверхности  $\{\alpha_{N+1}\}$  и ниже поверхности  $\{\beta_N\}$ , соответствует третий вариант взаимного расположения кривых (1.10) и (3.1). Кривая (1.10) пересекает  $N$ -ю и  $N + 1$ -ю ветви кривой (3.1).

Всю оставшуюся часть пространства параметров занимают области [1], которые соответствуют второму варианту взаимного расположения кривых (1.10) и (3.1).

Области [1], расположенной выше области [0] и ниже областей [3] и [2], выделяемых поверхностями  $\{\alpha_2\}$  и  $\{\beta_1\}$ , соответствует случай, когда интервал  $\sigma$  имеет общие точки только с полуинтервалом  $s_1$  (существует только единственная устойчивая неподвижная точка преобразования  $T$ , соответствующая точке пересечения кривой (1.10) с первой ветвью кривой (3.1)).

Для каждого фиксированного  $K$  кусок поверхности

$$h = 9K^4 e^{8\pi HN}, \quad H \geq H_0 \equiv \frac{1}{2\pi(N+1)} \ln \frac{3}{2} \quad (3.5)$$

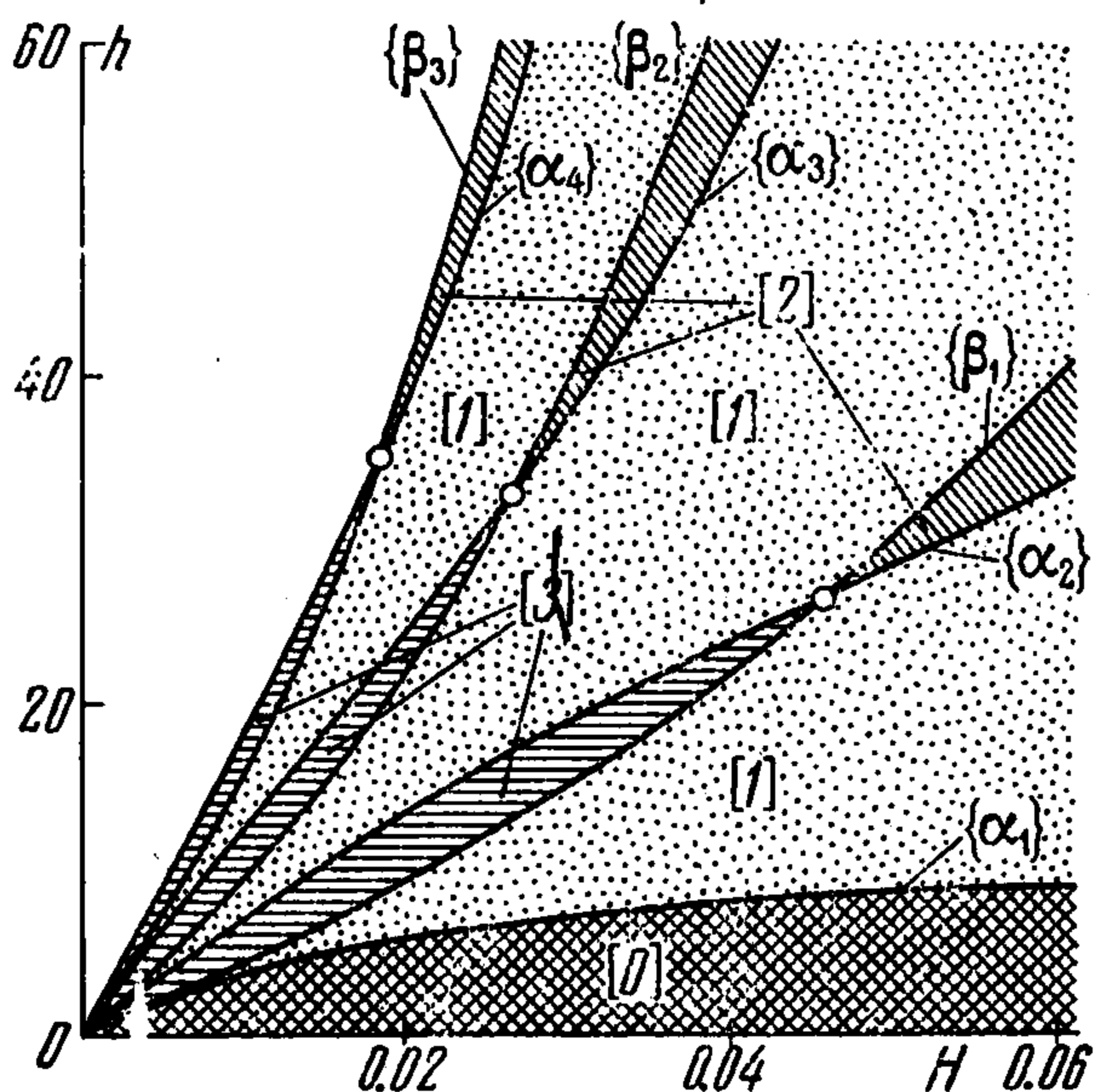
(здесь  $H_0$  — координата линии пересечения поверхности (3.5) с поверхностью  $\{\alpha_{N+1}\}$ ), разбивает на две части ту часть области [1], которая расположена выше областей [3] и [2], выделяемых поверхностями  $\{\alpha_{N+1}\}$  и  $\{\beta_N\}$ , и ниже областей [3] и [2], выделяемых поверхностями  $\{\alpha_{N+2}\}$  и  $\{\beta_{N+1}\}$  ( $N = 1, 2, \dots$ ). Точкам области, расположенным ниже куска поверхности (3.5), соответствует случай, когда интервал  $\sigma$  расположен на двух полуинтервалах  $s_N$  и  $s_{N+1}$ , точкам оставшейся части области соответствует случай, когда интервал  $\sigma$  расположен только на полуинтервале  $s_{N+1}$ . Во втором случае существует единственная устойчивая неподвижная точка преобразования  $T$ , соответствующая точке пересечения кривой (1.10) с  $N + 1$ -й ветвью кривой (3.1), в первом случае можно выделить (см. приложение 8) области  $[1_2], [1_3], \dots, [1_n]$ , в каждой из которых наряду с этой неподвижной точкой существует устойчивая неподвижная точка соответственно преобразования  $T^2, T^3, \dots, T^n$ . Границами области  $[1_2]$  являются поверхность  $\{\alpha_{N+1}\}$  и поверхности, определяемые соответственно условиями

$$v_1(u_2) = v(u_1), \quad v_1(u_3) = v(u_1)$$

(поверхности  $\{\gamma_1\}$  и  $\{\gamma_2\}$ ), которые соединяются на поверхности (3.5) по кривой, координата  $H$  которой определяется из уравнения

$$(2e^{2\pi H(N+2)} - 3)(2e^{2\pi H(N+2)} + 9)^3 = 9^3 e^{8\pi HN}$$

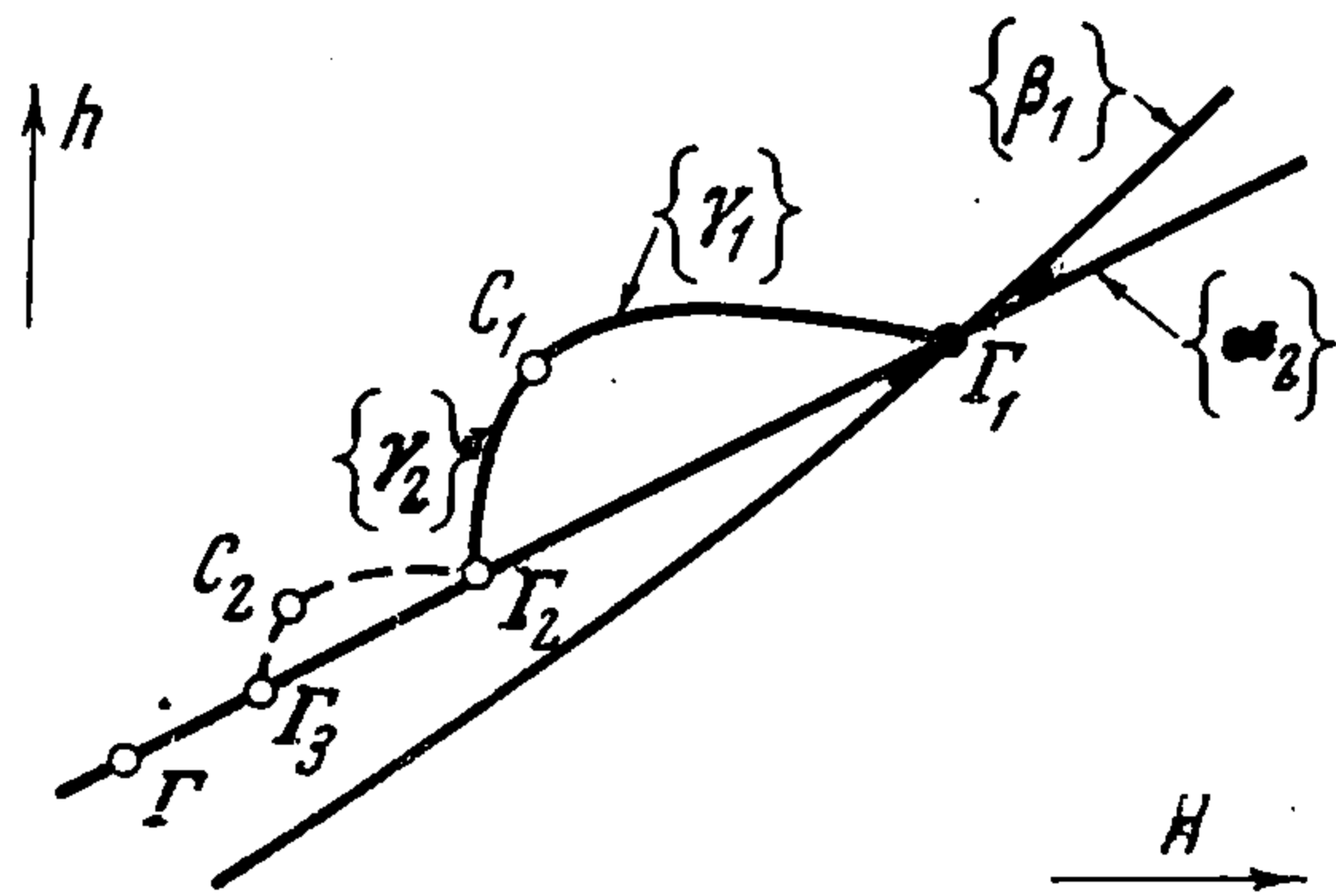
(случай, когда  $u_2 = u_3 = u_{\min}$  и  $v(u_{\min}) = v(u_1)$ ). Точкам поверхности  $\{\gamma_1\}$  соответствует фазовое пространство с простым предельным циклом, имеющим область при-



Фиг. 8

тяжения, состоящую из всей фазовой плоскости, за исключением счетного множества точек, образующих область притяжения двухоборотного предельного цикла.

На фиг. 9 представлена качественная картина сечения плоскостью  $K = \text{const}$  пространства параметров в некоторой окрестности точки пересечения поверхностей  $\{\alpha_2\}$  и  $\{\beta_1\}$ . Области  $[1_2], [1_3], \dots, [1_n]$  изображены «дольками», расположенными на  $\{\alpha_2\}$  как на основании, и накапливающимися к точке  $\Gamma$ .



Фиг. 9

Приводим координаты  $h$  поверхностей  $\gamma$  и  $\alpha$  для ряда значений  $H$  и  $K = 1$

$H \cdot 10^6 =$	33376	33565	33723	33957	34329
$\{\gamma_2\}:$	20.812	20.915	21.004	21.127	21.328
$\{\alpha_2\}:$	20.812	20.908	20.990	21.105	21.291
$H \cdot 10^6 =$	34329	36935	39809	42837	44999
$\{\gamma_1\}:$	21.328	22.691	24.113	25.520	26.467
$\{\alpha_2\}:$	21.291	22.584	23.985	25.439	26.467

и координаты  $(H \cdot 10^6, h)$  для характерных точек областей  $[1_2], [1_3]$  и точки  $\Gamma$

$\Gamma$  (32266, 20.250),  $\Gamma_3$  (32289, 20.262)  $C_2$  (32311, 20.273)  
 $\Gamma_2$  (33376, 20.812),  $C_1$  (34329, 21.328),  $\Gamma_1$  (44999, 26.467)

Приложение 1. Из первого уравнения (1.8) находим

$$b(\tau) = \frac{1}{\cos \tau} \{ u \sin \tau + B^2 [1 - \cos \tau - 2F(A, \tau) + F(2A, \tau)] \}$$

Заметим, что  $b(0) = 0$ . Для любого  $u = \text{const}$  имеем

$$\frac{db}{d\tau} = \frac{u^2 + B^2 \eta(\tau)}{\cos^2 \tau} \equiv \frac{u^2 + B^2 [\sin \tau - 2\Phi_1(A, \tau) + \Phi_1(2A, \tau)]}{\cos^2 \tau}$$

$$\Phi_1(A, \tau) = \frac{1}{1 + A^2} [A + e^{-A\tau} (\sin \tau - A \cos \tau)]$$

Так как  $\eta'(\tau) = (1 - e^{-A\tau})^2 \cos \tau$  и  $u > 0$ , то  $db/d\tau > 0$  и, следовательно, существует такая функция  $\tau = \tau(b)$ , что

$$\lim_{b \rightarrow 0} \tau(b) = 0$$

Приложение 2. Для функций  $\varphi(\tau)$ ,  $\xi(\tau)$  и  $\psi(\tau)$  имеем

$$\begin{aligned} \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = 0, \quad \varphi^{IV}(0) = 2A^2 \\ \xi(0) = \xi'(0) = \xi''(0) = \xi'''(0) = 0, \quad \xi^{IV}(0) = 6A^2 \\ \psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = 0, \quad \psi'''(0) = 2A^2 \end{aligned}$$

Из первого выражения (1.8) находим, что для  $u = \text{const}$  будет

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{2b}{\sin \tau} = u + 1/4 I_0 \quad (\text{A.1})$$

Следовательно, существует предел

$$\frac{3h}{A^2 8^3} \equiv \lim_{b \rightarrow 0} b^3 B^2 = I_0 \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \tau}{\psi(\tau)} \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^3}{\sin^3 \tau} = \frac{3 I_0}{A^2} \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^3}{\sin^3 \tau} \quad (\text{A.2})$$

Поэтому из (A.1) вытекает

$$u = 1/4 [(h/I_0)^{1/3} - I_0], \quad v \equiv \lim_{b \rightarrow 0} v(\tau) = 1/4 [(h/I_0)^{1/3} + 3 I_0] \quad (\text{A.3})$$

Условие  $I_0 = \text{const}$ , при котором осуществляется предельный переход, эквивалентно условию  $h = \text{const}$ . Следовательно, предельный переход при  $b \rightarrow 0$ ,  $B \rightarrow \infty$  и  $h = \text{const}$  приводит к (А.3).

Приложение 3. В точке  $P_1(2r\sqrt{6}, 4r\sqrt{5})$  выполняется  $dv/du < 0$ . В силу того, что для кривой (1.10) справедливо

$$\frac{d}{dh} \left( \frac{dv}{du} \right) = - \frac{3u}{4v^3(v+3u)} < 0 \quad (u = \text{const} > 0)$$

и в силу (1.12), заключаем, что в точке  $P_N$  также справедливо  $dv/du < 0$ .

Приложение 4. Уравнение (2.14) заменой  $\zeta^2 = (N+1)(2N+3)$  приводится к виду

$$2p^2 + p(1 + 8\zeta^2)^{1/2} + \zeta^2 - [(\zeta - \sqrt{3})(3\sqrt{3} + \zeta)^3]^{1/2} = 0$$

Здесь  $\zeta \geq \sqrt{10}$ , так как  $N \geq 1$ . Для  $p$  получаем

$$4p = [1 + 8(\zeta - \sqrt{3})^{1/2}(3\sqrt{3} + \zeta)^{3/2}]^{1/2} - (1 + 8\zeta^2)^{1/2}$$

Рассмотрим функцию непрерывного аргумента  $\zeta$  ( $q$  параметр)

$$f(\zeta, q) = (1 + 8\zeta^2 + 16q\zeta)^{1/2} - (1 + 8\zeta^2)^{1/2}$$

для которой справедливо

$$f(0, q) = 0, \quad f'_\zeta(\zeta, q) > 0 \quad (\zeta > 0), \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} f(\zeta, q) = q\sqrt{8}$$

Легко показать, что при  $\zeta \geq \sqrt{10}$  справедливы неравенства

$$f(\zeta, 3/2\sqrt{3}) < 4p < f(\zeta, 3\sqrt{2}).$$

Так как для функции  $f(\zeta, q)$  справедливо

$$4 < f(\zeta, 3/2\sqrt{3}), \quad f(\zeta, 3\sqrt{2}) < 12$$

то для  $p$  будет

$$1 < p < 3$$

Приложение 5. Как известно, паре неподвижных точек преобразования  $T^2$  на диаграмме Ламерея соответствует прямоугольник, вершины которого расположены на кривых (1.10) и (2.1). Рассмотрим случай, когда кривая (1.10) пересекает лишь ветвь  $N=1$  кривой (2.1). Прямоугольник с вершиной, расположенной в минимуме (1.10) ( $\min v > \min v_1 = 2r\sqrt{6}$ ), соответствует паре устойчивых неподвижных точек преобразования  $T^2$ , а прямоугольник с вершиной, расположенной в минимуме (2.1) ( $\min v_1 > \min v = h^{1/4}/\sqrt{3}$ ), соответствует паре неустойчивых неподвижных точек преобразования  $T^2$ . Покажем, что существуют такие значения параметров, при которых осуществляются обе описанные возможности.

Условие того, что существует прямоугольник, вершина которого расположена в минимуме кривой (1.10), имеет следующий вид:

$$\{ [16r^2 + 4/27\sqrt{h} + 8r(r^2 + 4/27\sqrt{h})^{1/2}]^{1/2} - [16r^2 + 1/3\sqrt{h} - 8r(r^2 + 1/3\sqrt{h})^{1/2}]^{1/2} \} \times \\ \times \{ [16r^2 + 4/27\sqrt{h} + 8r(r^2 + 4/27\sqrt{h})^{1/2}]^{1/2} + 3[16r^2 + 1/3\sqrt{h} - 8r(r^2 + 1/3\sqrt{h})^{1/2}]^{1/2} \}^3 = h$$

Данное уравнение имеет относительно переменной  $r/h^{1/4}$  корень на интервале  $r_1(z, h)/h^{1/4} < r/h^{1/4} < 1/\sqrt{72}$ . Значение  $r/h^{1/4} = 1/\sqrt{72}$  соответствует, такому расположению кривых (1.10) и (2.1), что  $\min v = \min v_1$ , а  $r = r_1(z, h)$  такому, что  $dv/dv_1 = -1$  ( $r_1(z, h)$  определяется выражением (2.8)).

Условие того, что существует прямоугольник, вершина которого расположена в минимуме кривой (2.1), имеет следующий вид:

$$r\sqrt{24} - (16r^2 + \sqrt{h} - 8r\sqrt{r^2 + \sqrt{h}})^{1/2} [r\sqrt{24} + 3(16r^2 + \sqrt{h} - 8r\sqrt{r^2 + \sqrt{h}})^{1/2}]^3 = h$$

Данное уравнение имеет относительно переменной  $r/h^{1/4}$  корень на интервале  $1/\sqrt{72} < r/h^{1/4} < 1/\sqrt{48}$ .

Приложение 6. Возможны следующие случаи:

а) кривая (1.10) расположена так, что выполняется  $w > 2K$ . Тогда имеют место неравенства

$$\max \left| \frac{dv}{du} \right| < 2 < \min \left| \frac{dv_1}{du} \right|$$

в) кривая (1.10) расположена так, что выполняется  $w < 2u$ ,  $W < 2u$ . Тогда имеют место неравенства

$$\max |dv/du| < 1 < \min |dv_1/du|$$

с) кривая (1.10) расположена так, что выполняется или  $w < 2u < W$  (кривая (1.10) пересекает прямую  $v = 2u$ ) или  $2u < w < 2K$ ,  $W > 2K$ . Поскольку справедливо неравенство  $|dv/du| \leq 2$ , то кривая (1.10) в рассматриваемом случае может пересекать или прямую  $v = 2ue^{2\pi H}$  или прямую  $v = 2ue^{-2\pi H}$ , т. е. выполняется или

$$\begin{aligned} \max |dv/du| &< \max \{ 2 - \frac{3}{2} e^{-4\pi H}, 1 \} \quad (v < 2ue^{4\pi H}) \\ \text{или} \\ \max |dv/du| &< \max \{ 2 - \frac{3}{2} e^{-2\pi H}, 1 \} \quad (v < 2ue^{2\pi H}) \end{aligned}$$

Отметим, что если  $\max \{ 2 - \frac{3}{2} e^{-2\pi H}, 1 \} = 1$ , то выполняется неравенство случая в). Рассмотрим сначала случай  $H < \frac{1}{2} \pi \ln^3/2$ . В этом случае выполняется соответственно

$$\max |dv/du| < 2 - \frac{3}{2} e^{-4\pi H} < 2 - e^{-2\pi H} < \frac{1}{2} < \min |dv_1/du|$$

или

$$\max |dv/du| < 2 - \frac{3}{2} e^{-2\pi H} < 1 < \min |dv_1/du|$$

В случае  $H \geq \frac{1}{2} \pi \ln^3/2$  ниже прямой  $v = 2u$  может находиться лишь ветвь кривой (3.1) для  $N = 1$  и выполняются неравенства случая или а) или в).

Приложение 7. Рассмотрим сечения поверхностей (3.3) и (3.4) плоскостями  $K = \text{const}$  (кривые в плоскости  $Hh$ ). Легко видеть, что

$$G_1(N, H) < G_2(N, H), \quad G_1(N, H) < G_1(N+1, H), \quad G_2(N, H) < G_2(N+1, H)$$

покажем, что справедливо

$$G_2(N, H) < G_1(N+2, H) \quad (\text{A.4})$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} G_2(N, H) &= e^{8\pi HN} + 8e^{6\pi HN} + 18e^{4\pi HN} - 27 \\ G_1(N+2, H) &= e^{8\pi H(N+1)} + 8e^{6\pi HN+4\pi H} + 18e^{4\pi HN} - 27e^{-8\pi H} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

закключаем, что имеет место

$$G_1(N+2, H) - G_2(N, H) = e^{8\pi HN} (e^{8\pi H} - 1) + 8e^{6\pi HN} (e^{4\pi H} - 1) + 27(1 - e^{-8\pi H}) > 0$$

и неравенство (A.4) справедливо.

Покажем теперь, что уравнение

$$G_1(N+1, H) - G_2(N, H) = 0 \quad (\text{A.6})$$

имеет единственный положительный корень  $H^*$ . Используя (A.5), уравнение (A.6) для любого фиксированного  $N$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) приводится к виду

$$\begin{aligned} f_2(H) - f_1(H) &= 0 \\ f_1(H) &= 8e^{6\pi HN} (1 - e^{-2\pi H}) + 18e^{4\pi HN} (1 - e^{-4\pi H}), \quad f_2(H) = 27(1 - e^{-8\pi H}) \end{aligned}$$

Так как имеет место

$$\begin{aligned} f_1(0) = f_2(0) &= 0, \quad f_1'(0) = 88\pi, \quad f_1'(H) > 0, \quad f_1''(H) > 0 \\ f_2'(0) = 216\pi, \quad f_2'(H) &> 0, \quad f_2''(H) < 0, \quad \lim_{H \rightarrow \infty} f_1(H) = \infty, \quad \lim_{H \rightarrow \infty} f_2(H) = 27 \end{aligned}$$

то уравнение (А.6) имеет единственный положительный корень  $H^*$  и справедливы неравенства

$$G_2(N, H) < G_1(N+1, H) \quad (0 < H < H^*), \quad G_2(N, H) > G_1(N+1, H) \quad (H > H^*)$$

Выясним теперь вид сечений поверхностей (3.3) и (3.4) при  $K = \text{const}$  и фиксированном  $N$ . Легко получить, что в этом случае имеют место соотношения.

$$dG_2/dH > 0, \quad d^2G_2/dH^2 > 0, \quad dG_1/dH > 0, \quad \text{для } N = 1, 2, \dots$$

$$d^2G_2/dH^2 > 0 \quad \text{для } N = 4, 5, \dots$$

Сечения поверхности (3.3): для  $N = 1$  имеет максимум, точку перегиба и приближается к асимптоте  $h = K^4$  сверху; для  $N = 2, 3$  имеет точку перегиба.

*Приложение 8.* Рассмотрим при возрастании  $h$  переход в пространстве параметров через кусок поверхности  $\{\alpha_{N+1}\}$ , выделяемый условием

$$H_0 \equiv \frac{1}{2\pi(N+1)} \ln \frac{3}{2} < H < H^*$$

Здесь  $H^*$  — координата линии пересечения поверхностей  $\{\alpha_{N+1}\}$  и  $\{\beta_N\}$ . Для точек рассматриваемого куска справедливо

$$v_1(u_0, N+1) = ke^{2\pi HN} = v(u_0) < v(u_1), \quad \min v(u) < v_1(u_0, N+1)$$

При любом сколь угодно малом увеличении параметра  $h$  кривая (1.10) будет иметь точку пересечения с  $N+1$ -й ветвью кривой (3.1) и в двух точках  $R_1(u_2, v_1(u_0, N+1))$  и  $R_2(u_3, v_1(u_0, N+1))$  пересекать прямую  $v = v_1(u_0, N+1)$  ( $u_2 < u_{\min} < u_3$ ).

В силу (1.12) для каждого фиксированного значения параметра  $K$  найдутся на рассматриваемом куске такое значение  $H$ , при котором будет  $v_1(u_3) = v(u_1)$ .

Уравнение поверхности, которая, пересекая поверхность (3.5), дает соответствующую бифуркационную кривую, имеет вид

$$h = (Ke^{2\pi HN} - u)(Ke^{2\pi HN} + 3u)^3$$

где  $u$  — корень уравнения

$$(Ke^{2\pi HN} - u)(Ke^{2\pi HN} + 3u)^3 - (ue^{2\pi H(N+1)} - K)(ue^{2\pi H(N+1)} + 3K)^3 = 0$$

Эта кривая и  $H = H^*$  выделяют на рассматриваемом куске поверхности  $\{\alpha_{N+1}\}$  область, для которой  $v_1(u_3) > v(u_1)$ . Поэтому пересекая поверхность  $\{\alpha_{N+1}\}$  через эту область, попадаем в область  $[1_2]$ , для которой справедливо  $v_1(u_2) < v(u_1)$ ,  $v_1(u_3) > v(u_1)$ .

Рассматривая взаимное расположение кривых (1.10) и (3.1), соответствующее области  $[1_2]$  обнаруживаем, что преобразование  $T^2$  переводит отрезок  $v_1(u_2) \leq v < v(u_1)$  в его часть. Следовательно, сжимающее преобразование  $T^2$  имеет устойчивую неподвижную точку.

Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что в области  $[1]$  ниже куска поверхности (3.5) существует область  $[1_n]$ , которой соответствуют устойчивые неподвижные точки преобразований  $T$  и  $T^n$ .

В заключение автор благодарит Н. Н. Баутина за многочисленные советы и обсуждения.

Поступила 2 III 1970

## ЛИТЕРАТУРА

1. Комраз Л. А. Динамическая модель спускового регулятора с магнито-электрическим приводом. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4.
2. Комраз Л. А. Особенности динамики спускового регулятора с электромагнитным приводом. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
3. Аксельрод З. М. Электромеханические часы. М., Машгиз, 1952.
4. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Изв. вузов. Радиофизика, 1958, т. 1, № 2.
5. Баутин Н. Н. Динамическая модель электромеханических часов с ходом Гиппа. Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 11.

## ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ В ОДНОМ БЛИЗКОМ К КРИТИЧЕСКОМУ СЛУЧАЕ

В. Г. Веретенников

(Москва)

Рассматривается действительная дифференциальная система вида

$$\begin{aligned} x_s' &= \mu_s x_s - \lambda_s y_s + X_s(x, y), & y_s' &= \mu_s y_s + \lambda_s x_s + Y_s(x, y) \\ x &\equiv (x_1, \dots, x_n), & y &\equiv (y_1, \dots, y_n) \quad (s = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (0.1)$$

Здесь  $\mu_s$  — малые положительные вещественные части комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения.  $X_s, Y_s$  — голоморфные функции  $x_s, y_s$ , разложения которых начинаются с членов не ниже второго порядка.

На основании определения устойчивости движения в случаях, близких к критическим, данного в работе [1], и результатов работы [2], развитых на случай  $n$ -пар чисто мнимых корней, выделяются области устойчивости для системы (0.1).

1. Для исследования устойчивости системы (0.1) при всех  $\mu_s = 0$  в нерезонансных случаях от этой системы преобразованием Каменкова Г. В. [3, 4] перейдем к эквивалентной задаче об устойчивости системы

$$\begin{aligned} \rho &= 2\rho^{k+1} R_0(z) + 2\rho^{k+2} R_1(z) + \dots \\ z_s' &= 2\rho^k z_s (z_1 R_{s1}^{(2)} + z_2 R_{s2}^{(2)} + \dots + z_n R_{sn}^{(2)}) + \dots \\ R_{sj}^{(2)} &= R_s^{(2)} - R_j^{(2)}, \quad R_0 = \sum z_j R_j^{(2)}(z) \quad (z_1 + \dots + z_n = 1, s = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.1)$$

На основании теоремы Г. В. Каменкова [3] о неустойчивости можем утверждать, что невозмущенное движение неустойчиво, если хотя бы на одном, отличном от тривиального, вещественном решении системы уравнений

$$z_s z_j R_{sj}^{(2)} = 0 \quad (1.2)$$

выражение  $R_0 > 0$ .

Таким образом, устойчивость может иметь место только в том случае, если на всех вещественных прямых (1.2) выражение  $R_0 \leq 0$ .

Как показано в работе [5], для  $s = n$  и в работе [2] для  $s = 3$  условие  $R_0 < 0$  на прямых (1.2) является необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости по формам третьего порядка.

Когда задача об устойчивости системы (1.1) решается формами третьего порядка, тогда функцию Ляпунова можно взять в виде [2]

$$V = \operatorname{re} \exp[-Nu(z)] \quad (1.3)$$