О ВЛИЯНИИ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ НА СУЩЕСТВОВАНИЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А. П. Проскуряков

(Москва)

Дан анализ влияния порядка малости величины демпфирования на субгармонические колебания порядка $^1/_2$ в системе, описываемой уравнением Дюффинга.

Рассмотрим неавтономную систему с одной степенью свободы

$$x^{\cdot\cdot} + \frac{1}{n^2} x = f(t) + \mu F(t, x, x^{\cdot}, \mu) \tag{1}$$

Здесь n — целое положительное число. Функция $F(t, x, x^{\cdot}, \mu)$ является аналитической функцией x и $x^{\cdot}$ в некоторой области их изменения и малого параметра μ при $0 \leqslant \mu < \mu_0$. Кроме того, $f(t)$ и $F(t, x, x^{\cdot}, \mu)$ — непрерывные периодические функции t с периодом 2π.

Решение порождающей системы будет

$$x_0(t) = \varphi(t) + A_0 \cos\frac{t}{n} + nB_0 \sin\frac{t}{n} \tag{2}$$

При этом вынужденные колебания имеют период 2π, а собственные колебания — период $2\pi n$.

Будем искать субгармонические колебания порядка $1/n$ исходной системы с периодом $2\pi n$. Начальные условия примем, как обычно [1]

$$x(0) = \varphi(0) + A_0 + \beta, \quad x^{\cdot}(0) = \varphi^{\cdot}(0) + B_0 + \gamma \tag{3}$$

где β и γ — функции параметра μ, уничтожающиеся при $\mu = 0$.

Решение уравнения (1) запишем в виде

$$x(t) = \varphi(t) + (A_0 + \beta)\cos\frac{t}{n} + n(B_0 + \gamma)\sin\frac{t}{n} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[C_m(t) + \frac{\partial C_m(t)}{\partial A_0}\beta + \frac{\partial C_m(t)}{\partial B_0}\gamma + \ldots\right]\mu^m \tag{4}$$

Уравнения для определения амплитуд A_0 и B_0 будут

$$C_1(2\pi n) = -n\int_0^{2\pi n} F(t, x_0, x_0^{\cdot}, 0)\sin\frac{t}{n}\,dt = 0 \tag{5}$$

$$C_1^{\cdot}(2\pi n) = \int_0^{2\pi n} F_0(t, x_0, x_0^{\cdot}, 0)\cos\frac{t}{n}\,dt = 0$$

Эти уравнения всегда имеют решение: $A_0 = 0$, $B_0 = 0$, которое соответствует периодическому решению [2] с периодом 2π. Но, кроме того, они могут иметь и ненулевые решения, отвечающие периоду $2\pi n$.

Возникает вопрос, всегда ли будут существовать субгармонические колебания в данной системе. Для двух видов уравнений Хэйлу [3] удалось получить условия существования субгармонических колебаний. Одно из этих уравнений — обобщенное уравнение Дюффинга

$$x^{\cdot\cdot} + \frac{1}{(2n+1)^2} x = \nu\cos t + \mu\sum_{s=0}^{r} c_s x^{2s+1} - \mu^k b x^{\cdot} \tag{6}$$

Обозначим через $[n/r]$ наименьшее целое число, большее n/r. Хэйл показал, что субгармонические колебания в данной системе будут существовать, если $k \geqslant [n/r]$. Таким образом, чем больше n, т. е. чем выше порядок субгармонических колебаний, тем слабее должно быть демпфирование, достаточное для подавления этих колебаний. Приведенная оценка годится для субгармонических колебаний нечетного порядка.

Покажем, как в частных задачах можно проанализировать влияние сил сопротивления на существование субгармонических колебаний, используя при этом амплитудные уравнения. В качестве примера рассмотрим также уравнение Дюффинга

$$x^{\cdot\cdot} + n^{-2}x = \nu_0 \cos t + \lambda_0 \sin t + \mu (a_0 x + c_0 x^3) - \mu^k b_0 x^{\cdot} \tag{7}$$

где k — целое положительное число. Произведем преобразование времени $t = n\tau$ и введем обозначения $(n > 1)$

$$x' = dx / d\tau, \qquad n^2 a_0 = a, \qquad n^2 c_0 = c, \qquad nb_0 = b$$
$$n^2 \nu_0 = (1 - n^2)\nu, \quad n^2 \lambda_0 = (1 - n^2)\lambda$$

Получим

$$x'' + x = (1 - n^2)\nu \cos n\tau + (1 - n^2)\lambda \sin n\tau + \mu (ax + cx^3) - \mu^k bx' \tag{8}$$

Имеем решение порождающей системы

$$x_0 (\tau) = \nu \cos n\tau + \lambda \sin n\tau + A_0 \cos \tau + B_0 \sin \tau \tag{9}$$

В результате преобразования $t = n\tau$ собственные колебания будут иметь период 2π при любом порядке субгармонических колебаний.

Будем рассматривать субгармонические колебания порядка $^1/_2$. Составим сначала амплитудные уравнения при отсутствии демпфирования ($b = 0$). Имеем

$$C_1 (2\pi) = - \pi B_0 [a + {}^3/_2 c (\nu^2 + \lambda^2) + {}^3/_4 c (A_0^2 + B_0^2)] = 0 \tag{10}$$
$$C_1' (2\pi) = \pi A_0 [a + {}^3/_2 c (\nu^2 + \lambda^2) + {}^3/_4 c (A_0^2 + B_0^2)] = 0$$

Нулевое решение этих уравнений не представляет интереса, как как оно соответствует периодическому решению уравнения (8) с периодом по τ, равным π. Из уравнений (10) имеем только одно уравнение для определения амплитуд A_0 и B_0

$$a + {}^3/_2 c (\nu^2 + \lambda^2) + {}^3/_4 c (A_0^2 + B_0^2) = 0 \tag{11}$$

Уравнение (11) может быть записано в виде

$$A_0^2 + B_0^2 = P \tag{12}$$

Таким образом, условием вещественности решений амплитудных уравнений будет $P > 0$, или

$$\nu^2 + \lambda^2 < - {}^2/_3 a/c, \quad ac < 0 \tag{13}$$

Второе уравнение получим из членов порядка μ^2, используя соотношение [4]

$$A_0 C_2 (2\pi) + B_0 C_2' (2\pi) = 0 \tag{14}$$

В результате довольно громоздких вычислений имеем

$$2A_0 B_0 (A_0^2 - B_0^2) (\nu^2 - \lambda^2) - (A_0^4 - 6A_0^2 B_0^2 + B_0^4)\nu\lambda = 0 \tag{15}$$

Из уравнений (11) и (15) следует, что при $\nu \neq 0$, $\lambda \neq 0$ ни одна из амплитуд A_0 или B_0 не равняется нулю. Разделим обе части уравнения (15) на B_0^4 и введем обозначение $z = A_0 / B_0$. Тогда это уравнение можно записать в следующем виде

$$z^4 - 2lz^3 - 6z^2 + 2lz + 1 = 0, \qquad l = (\nu^2 - \lambda^2) / \nu\lambda \tag{16}$$

Нетрудно показать, что при вещественных значениях параметра l все корни уравнения (16) являются вещественными. Это следует из вида кривой, изображающей левую часть уравнения (16) на плоскости. Указанная кривая имеет четыре точки пересечения с осью абсцисс, так как она проходит через точки с координатами (0, 1) и (± 1, -4), а при $z \to \pm\infty$ стремится к $+\infty$.

Решить систему амплитудных уравнений (11) и (15) в общем виде не представляется возможным. При $\nu = 0$ или $\lambda = 0$ получим

$$A_0^2 = B_0^2 = -(\lambda^2 + {}^2/_3\, a/c), \qquad A_0 = B_0^2 = -(\nu^2 + {}^2/_3\, a/c) \tag{17}$$

При $\nu = \lambda$ найдем

$$A_0^2 = -(2 \pm \sqrt{2})(\nu^2 + {}^1/_3\, a/c), \qquad B_0^2 = -(2 \mp \sqrt{2})(\nu^2 + {}^1/_3\, a/c) \tag{18}$$

Функциональный определитель уравнений (11) и (15) не обращается в нуль. Следовательно, решения амплитудных уравнений простые. Поэтому периодические решения уравнения (8) периода 2π при $n = 2$ и $b = 0$ будут разлагаться по целым степеням параметра μ.

Очевидно, что амплитудные уравнения останутся без изменения, если в систему ввести демпфирование порядка μ^k при $k > 2$. Следовательно, демпфирование, имеющее указанный порядок величины, не влияет на возможность появления рассматриваемых субгармонических колебаний.

Рассмотрим теперь субгармонические колебания с демпфированием порядка μ^2. Первое амплитудное уравнение (11) не изменится. Второе уравнение будет

$$ {}^{33}/_{16} c^2\, [2A_0 B_0 (A_0^2 - B_0^2)(\nu^2 - \lambda^2) - (A_0^4 - 6A_0^2 B_0^2 + B_0^4)\nu\lambda] - b(A_0^2 + B_0^2) = 0 \tag{19}$$

Это уравнение можно сделать однородным, если умножить его на (12). Предполагая, что $\nu \neq 0$, $\lambda \neq 0$, после преобразований получим

$$z^4 - 2Mz^3 - Nz^2 + 2Mz + 1 = 0 \tag{20}$$

$$M = \frac{l}{1+Q}, \qquad N = 2\frac{3-Q}{1+Q}, \qquad Q = \frac{16}{33}\frac{b}{c^2}\frac{1}{\nu\lambda}\frac{1}{P} \tag{21}$$

Кривая, представляющая левую часть уравнения (20), проходит через точки (0, 1) и (± 1, $2 - N$). Следовательно, можно утверждать, что по крайней мере при $2 - N \leqslant 0$ уравнение (20) имеет вещественные решения. Таким образом, достаточным условием существования вещественных решений будет $Q \leqslant 1$. Можно показать, что при достаточно больших значениях Q субгармонические колебания не будут существовать.

Если одна из величин ν или λ обращается в нуль, например $\lambda = 0$, то уравнению (20) можно придать вид

$$R(z^2 + 1)^2 - 2z(z^2 - 1) = 0, \qquad R = \frac{16}{33}\frac{b}{c^2}\frac{1}{\nu^2 P} \tag{22}$$

Решение этого уравнения при $R = 0$ приведено выше (17). Очевидно, что на некотором отрезке $0 \leqslant R \leqslant R_0 < 1$ также будут существовать вещественные решения уравнения (22).

Таким образом демпфирование порядка μ^2 позволяет получать субгармонические колебания порядка $^1/_2$, но в более узкой области коэффициентов уравнения Дюффинга, чем при отсутствии демпфирования.

Наконец, выясним вопрос о существовании субгармонических колебаний порядка $^1/_2$ в системе Дюффинга при $k = 1$. Амплитудные уравнения в этом случае будут

$$C_1(2\pi) = -\pi\{B_0[a + {}^3/_2\, c(\nu^2 + \lambda^2) + {}^3/_4\, c(A_0^2 + B_0^2)] - bA_0\} = 0 \tag{23}$$
$$C_1'(2\pi) = \pi\{A_0[a + {}^3/_2\, c(\nu^2 + \lambda^2) + {}^3/_4\, c(A_0^2 + B_0^2)] + bB_0\} = 0$$

Эти уравнения имеют единственное вещественное решение: $A_0 = 0$, $B_0 = 0$. Таким образом, при введении демпфирования, имеющего порядок малости параметра μ, субгармонические колебания порядка $^1/_2$ в системе Дюффинга невозможны.

Итак, для решения вопроса об условиях существования субгармонических колебаний в конкретных задачах может быть использован метод анализа амплитудных уравнений.

Поступила 21 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

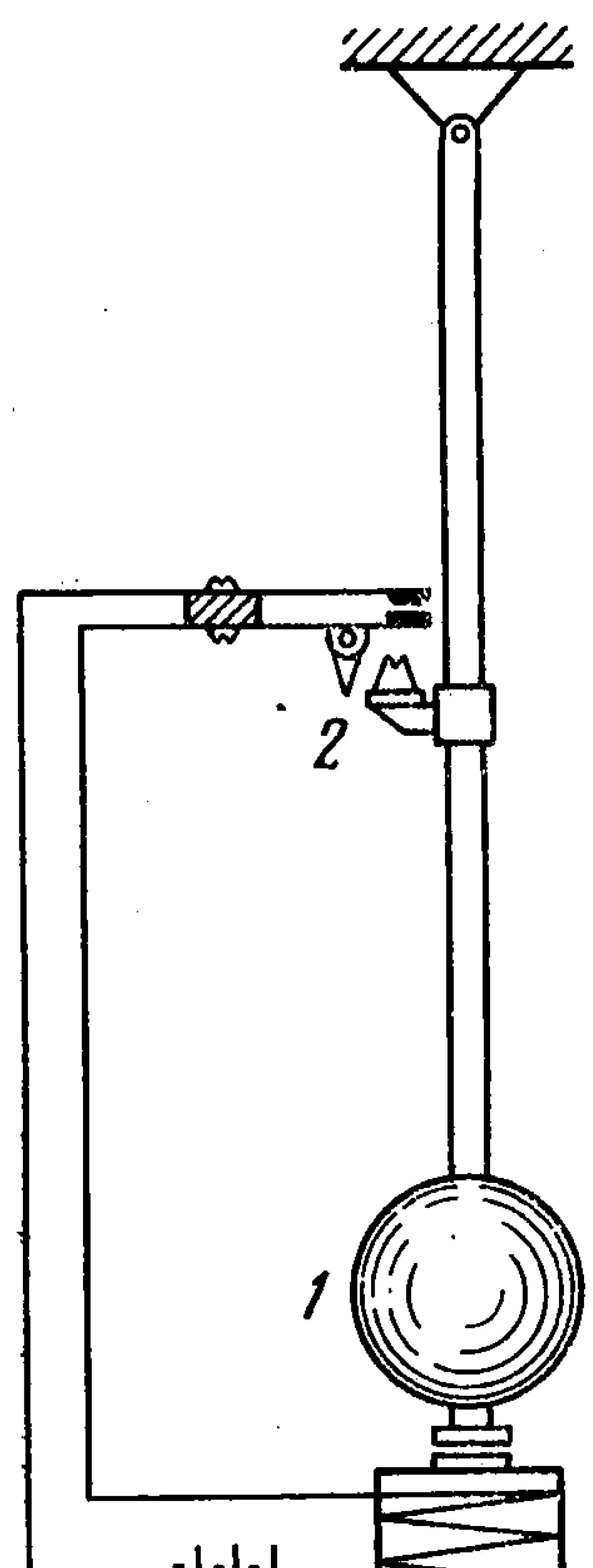
1. Проскуряков А. П. Колебания квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы вблизи резонанса. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
3. Hale J. K. On differential equations containing a small parameter. Contrib. different. equations, vol. 1. N. Y. J. Wiley a Sons, Inc., 1963.
4. Архангельский Ю. А. Об одном случае построения периодических решений квазилинейных систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАЯТНИКОВОГО РЕГУЛЯТОРА ГИППА

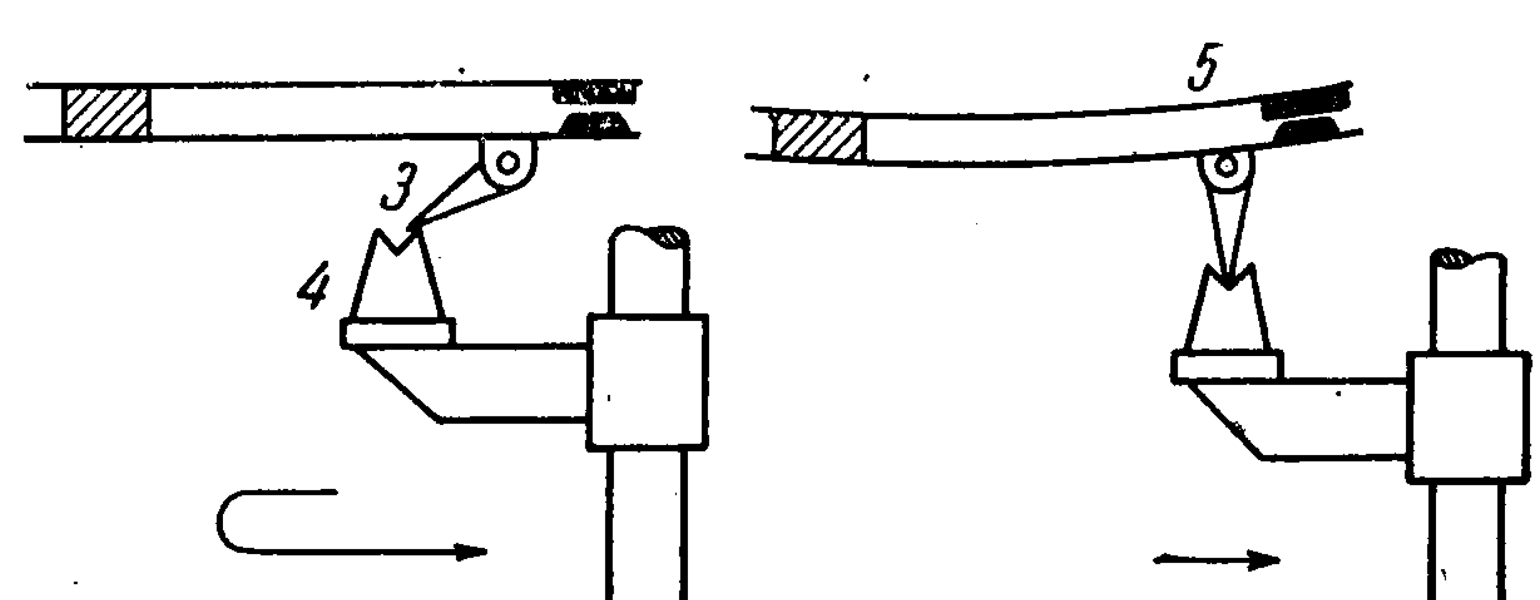
Л. А. Комраз

(Горький)

Рассматривается динамика электромеханических часов с ходом Гиппа. Исследуются две модели: модель с сухим трением и модель с вязким трением. Для модели с сухим трением выделены области в пространстве параметров, соответствующие простым устойчивым периодическим движениям, найдены области, соответствующие сложным устойчивым периодическим движениям и выделена область значений параметров, при которых в системе существует колебательное непериодическое движение. Для модели с вязким трением в пространстве параметров выделены области, соответствующие одному простому устойчивому периодическому движению, области, соответствующие двум простым устойчивым периодическим движениям, области, соответствующие сложным устойчивым периодическим движениям, и области, соответствующие двум устойчивым периодическим движениям, из которых одно простое, а второе сложное.



Фиг. 1



Фиг. 2

1. Описание конструкции. Уравнения движения. Переход к модели с мгновенным импульсом. Принципиальная схема регулятора Гиппа в электромеханических часах изображена на фиг. 1.

Маятник *1* совершает свободные затухающие колебания до тех пор, пока контактное устройство *2* замкнет электрическую цепь и маятник получит подталкивающий импульс, увеличивающий его амплитуду.