Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПО ОТНОШЕНИЮ К ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

В. В. Румянцев

(Москва)

Исследование устойчивости движения по отношению к части переменных [1] представляет интерес в разнообразных задачах, в частности, при изучении движения систем с циклическими координатами, неголономных систем и т. п. Метод функций Ляпунова оказался эффективным и в этой задаче [3-5].

Ниже доказываются несколько теорем об асимптотической устойчивости и неустойчивости по отношению к части переменных, обобщающие некоторые из известных теорем метода функций Ляпунова. Приводятся два примера.

Рассмотрим уравнения возмущенного движения системы

$$dx_s / dt = X_s (t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где x_s — вещественные переменные, характеризующие отклонения системы от невозмущенного движения, t — время, $X_s (t, x_1, \ldots, x_n)$ — вещественные функции, определенные и непрерывные при всех значениях $t \geqslant 0$ в некоторой области G пространства $\{x_s\}$, содержащей точку $x = 0$. Будем предполагать, что в области G функции $X_s (t, x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют условиям существования и единственности решений $x_s (t; t_0; x_{10}, \ldots, x_{n0})$ уравнений (1), непрерывно зависящих от $t_0 \geqslant 0$ и x_{r0} $(r = 1, \ldots, n)$ и равных x_{s0} при $t = t_0$, причем $X_s (t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$.

Рассмотрим устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ по отношению к части переменных [1],— для определенности, по отношению к переменным $x_1, \ldots, x_k$ $(0 < k \leqslant n)$. Эти переменные условимся обозначать через $y_i = x_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, а остальные $m = n - k \geqslant 0$ переменных — через $z_j = x_{k+j}$ $(j = 1, \ldots, m)$, т. е. представим вектор x в виде $x = (y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_m)$ и для краткости устойчивость по отношению к переменным $x_i = y_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ назовем y-устойчивостью.

Область G будем рассматривать вида

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{k} y_i^2\right)^{1/2} < H = \text{const}, \qquad \|z\| = \left(\sum_{j=1}^{m} z_j^2\right)^{1/2} < \infty \tag{2}$$

При исследовании асимптотической устойчивости по части переменных включим, следуя [2], в определение свойства асимптотической устойчивости оценку области притяжения G_λ. Движение $x = 0$ называется асимптотически y-устойчивым и область G_λ пространства $\{x_s\}$ лежит в области y-притяжения точки $x = 0$, если оно y-устойчиво и выполняются условия

$$\lim y (t; t_0, x_0) = 0, \quad y (t; t_0, x_0) \in \Gamma_y \quad \text{при } t \geqslant t_0, \ x_0 \in G_\lambda \tag{3}$$

Здесь Γ_y означает некоторую наперед заданную область, лежащую в области G; G_λ — область возмущений. Для простоты области Γ_y и G_λ

определим условиями

$$\|y\| \leqslant A < H \text{ и } \|x_0\| = \left(\sum_{s=1}^{n} x_{s0}^2\right)^{1/2} < \lambda, \ \lambda > 0$$

соответственно и будем рассматривать область $\Gamma \supset \Gamma_y$, определенную неравенствами

$$\| y \| \leqslant A, \qquad \| z \| < \infty \tag{4}$$

В случае, когда $H = \infty$, движение $x = 0$ называется асимптотически y-устойчивым в целом, если оно y-устойчиво и условие $\lim\ y\ (t,\ t_0,\ x_0) = 0$ при $t \to \infty$ выполняется для любых $\| x_0 \|$, как бы велики они ни были.

Будем рассматривать функции $V\ (t,\ x)$, определенные и непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка при всех $t \geqslant 0$ в области (4), удовлетворяющие условию $V\ (t,\ 0) = 0$ при всех $t \geqslant 0$, и производные по времени от них в силу уравнений возмущенного движения $V^{\cdot}(t,\ x)$.

Напомним [3], что функция $V\ (t,\ x)$ называется y-определенно-положительной в области Г, если существует определенно-положительная функция $w\ (y)$ такая, что выполняется неравенство

$$V\ (t,\ x) \geqslant w\ (y) \ \text{ при } \ x \in \Gamma,\ t \geqslant 0 \tag{5}$$

Функция $V\ (t,\ x)$ допускает [2] в области Г высший предел по y, бесконечно малый в точке $x = 0$ (короче — бесконечно малый высший предел по y), если существует непрерывная функция $W\ (y)$, удовлетворяющая условиям

$$|\, V\ (t,\ x)\, | \leqslant W\ (y) \quad \text{при } x \in \Gamma,\ t \geqslant 0,\ W\ (0) = 0 \tag{6}$$

Достаточные условия y-устойчивости доставляет теорема об устойчивости по отношению к части переменных [3], допускающая обращение подобно теореме Ляпунова об устойчивости.

Рассмотрим вопрос об асимптотической y-устойчивости. Введем обозначение: $V\ (t) = V\ (t,\ x\ (t;\ t_0,\ x_0))$.

Теорема 1. Если уравнения (1) таковы, что возможно найти y-знакоопределенную в области Г функцию $V\ (t,\ x)$, производная по времени от которой в силу этих уравнений $V^{\cdot}\ (t,\ x)$ является в области Г знакопостоянной функцией противоположного знака с V, причем $V\,(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и выполняется неравенство

$$\begin{gathered}\sup\ [V\ (t_0,\ x);\ \|\ x\ \| \leqslant \lambda] < \inf\, [V\ (t,\ x);\ \|\ y\ \|\ = A_1 < A \\ \|\, z\, \| < \infty,\ \ t_0 \leqslant t < \infty]\end{gathered} \tag{7}$$

то движение $x = 0$ асимптотически y-устойчиво и область G_λ лежит в области y-притяжения точки $x = 0$.

Доказательство. Пусть $V\ (t,\ x)$ — y-определенно-положительная функция, тогда найдется такая определенно-положительная функция $w\ (y)$, что в области Г имеют место неравенства (5) и $V^{\cdot}(t,\ x) \leqslant 0$. Обозначим

$$l = \inf\ [V\ (t,\ x);\ \ \|\, y\, \| = A_1\ \ \|\, z\, \| < \infty,\ \ t_0 \leqslant t\ < \infty]$$

Функция $V\ (t_0,\ x)$, как не зависящая от t, допускает бесконечно малый высший предел, так что для l найдется такое λ, что $V\ (t_0,\ x) < l$ при $\|\, x\, \| \leqslant \lambda$. Если начальные значения x_0 подчинить условию $\|x_0\,\| < \lambda$, то будем в силу свойств функции $V\ (t,\ x)$ иметь неравенства

$$w\ (y) \leqslant V\ (t,\ x) \leqslant V\ (t_0,\ x_0) < l$$

из которых следует, что $\| y \| < A$ для всех $t \geqslant t_0$. Следовательно, если при заданных A_1 и λ ($A_1 > \lambda$) выполнены условия: (7) и $V(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то $w(y(t, t_0; x_0)) \to 0$ при $t \to \infty$, откуда следует, что $\| y(t; t_0; x_0) \| \to 0$ при $t \to \infty$, что и требовалось доказать.

Теорема 1 обобщает ряд известных теорем об асимптотической устойчивости по части переменных [3–5], условия которых обеспечивают стремление $V(t) \to 0$ при $t \to \infty$. В формулировки этих теорем могут быть также включены оценки области G_λ, подобные (7); так, например, справедлива

Теорема 2. Если уравнения (1) таковы, что в области Г существует y-знакоопределенная функция $V(t, x)$, допускающая бесконечно малый высший предел по y (по x), производная по времени от которой $V^\cdot(t, x)$ является в области Г знакоопределенной по y (по x) функцией противоположного знака с V, причем выполняется условие (7), то движение $x = 0$ асимптотически y-устойчиво и область G_λ лежит в области y-притяжения точки $x = 0$.

На асимптотическую устойчивость по части переменных возможно также распространение теорем Красовского [2] и Четаева [6] об асимптотической устойчивости.

Теорема 3. Если уравнения (1) таковы, что их правые части $X(t, x)$ являются периодическими функциями времени t периода ϑ или не зависят явно от t, решения $z_j(t; t_0, x_0)$ ограничены для всех $\| x_0 \| \leqslant \lambda$ и в области Г существует y-определенно-положительная функция $V(t, x)$, периодическая по t с периодом ϑ или не зависящая явно от t и удовлетворяющая неравенству (7), производная по времени от которой удовлетворяет условиям:

1) $V^\cdot(t, x) \leqslant 0$ в области Г, 2) $V^\cdot(t, x) = 0$ лишь в точках множества M, не содержащего целиком траекторий системы (1), за исключением решения $x = 0$, то движение $x = 0$ асимптотически y-устойчиво и область G_λ лежит в области y-притяжения точки $x = 0$.

Доказательство. Функция $V(t, x)$ удовлетворяет условиям теоремы об устойчивости по части переменных, так что $\| y \| < A$ при $t \geqslant t_0$ для всех $\| x_0 \| \leqslant \lambda$. По условию решения $z_j(t; t_0, x_0)$ ограничены, следовательно, ограничены все решения $x_s(t; t_0 x_0)$ уравнений (1) для всех $\| x_0 \| \leqslant \lambda$. Функция $V(t)$ является монотонной не возрастающей функцией времени, поэтому существует $\lim V(t) = V^*$ при $t \to \infty$, причем $V(t) \geqslant V^*$ для всех $t \geqslant t_0$. Рассмотрим последовательность точек $x^{(k)} = x(t_0 + k\vartheta, t_0; x_0)$ ($k = 1, 2, \ldots$), где ϑ — период функции $X(t, x)$ по времени или любое положительное число, если функция X не зависит явно от времени. Ограниченная последовательность точек $x^{(k)}$ имеет предельную точку $x = x^*$, причем вследствие непрерывности и периодичности функции $V(t, x)$ выполняется равенство $V^* = V(t_0, x^*)$. Доказательство равенства $V^* = 0$ проводится далее, как в теореме Красовского [2].

Отметим, что согласно результатам Йосидзава [7], для ограниченности всех решений $x(t; t_0; x_0)$ (или решений $z(t; t_0, x_0)$) уравнений (1) достаточно существования функции $V(t, x)$ такой, что $V(t, x) \geqslant w(x)$ (или $V(t, x) \geqslant w(z)$), где $w(x) \to \infty$ при $\| x \| \to \infty$ ($w(z) \to \infty$ при $\| z \| \to \infty$), и $V^\cdot(t, x) \leqslant 0$.

Теоремы 1—3 можно распространить на асимптотическую y-устойчивость в целом, если в (2) величина $H = \infty$. При этом дополнительно к условиям этих теорем надо потребовать, чтобы функции $V(t, x)$ допускали бесконечно большой низший предел [2] по y при $\|y\| \to \infty$, т. е. чтобы определенно-положительная функция $w(y)$ в условии (5) удовлетворяла условию $\lim w(y) = \infty$ при $\|y\| \to \infty$. Тогда всякая область $w(y) \leqslant V_0$ будет ограниченной и доказательство асимптотической y-устойчивости проводится аналогично доказательству теорем 1—3. При этом, разумеется, предполагается, что функция $V(t, x)$ в теореме 2 допускает высший предел по y (по x) во всем пространстве $\|x\| < \infty$, т. е. существует непрерывная функция $W(y)$ $(W(x))$ такая, что

$$V(t, x) \leqslant W(y) \quad (V(t, x) \leqslant W(x)), \quad W(0) = 0$$

а в теореме 3 решения $z_j(t; t_0, x_0)$ ограничены для всех $\|x_0\| < \infty$.

Теорема 4. Если уравнения (1) таковы, что существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям [6]: 1) функция

$$V(t, x) - \theta(t)\, w(y) \qquad (\theta(t_0) = 1)$$

является постоянно-положительной при определенно-положительной и не зависящей от времени функции $w(y)$ и при монотонно возрастающей до бесконечности вместе с ростом t функции $\theta(t)$, 2) ее производная в силу этих уравнений $V^{\cdot} \leqslant 0$, то движение $x = 0$ асимптотически y-устойчиво, причем область возможных значений переменных y_i определяется неравенством

$$w(y) \leqslant V_0 / \theta(t), \qquad V_0 = V(t_0, x_0) \tag{8}$$

Доказательство. Согласно условиям теоремы имеем неравенства

$$\theta(t)\, w(y) \leqslant V(t, x) \leqslant V_0$$

откуда следует (8). Так как $\theta(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, то $w(y(t; t_0; x_0)) \to 0$ и $\|y(t; t_0; x_0)\| \to$ $\to 0$ при $t \to \infty$.

Предположим, что правые части уравнений (1) определены, непрерывны, ограничены и удовлетворяют условиям существования и единственности решения в области

$$t \geqslant 0, \quad \|x\| < H = \text{const} \tag{9}$$

Теорема 5. Если уравнения (1) таковы, что в некоторой области $\|x\| < H_1 < H$ существует знакоопределенная функция $V(t, x)$, производная по времени от которой $V^{\cdot}(t, x)$ является y-знакоопределенной функцией противоположного знака с V, причем выполнено условие (7), то движение $x = 0$ устойчиво и асимптотически y-устойчиво и область G_λ лежит в области y-притяжения точки $x = 0$.

Доказательство элементарно и опирается на теорему Ляпунова об устойчивости и теорему [5].

Пример 1. Рассмотрим уравнения движения механической системы в окрестности положения равновесия $q_i = q_i^{\cdot} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ под действием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} g_{ij} q_j^{\cdot} + Q_i, \quad g_{ij} = -g_{ji} \quad (i, j = 1, \ldots n) \tag{10}$$

для которой полная механическая энергия $H = T - U$ не зависит явно от времени. Пусть диссипативные силы $Q_i = Q_i(q_1, \ldots, q_n, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot})$ удовлетворяют условиям

$$Q_i(q_i, \ldots, q_n;\ 0, \ldots, 0) \equiv 0, \quad Q_1 q_1^{\cdot} + \ldots + Q_n q_n^{\cdot} \leqslant 0$$

причем $Q_1 q_1^{\cdot} + \ldots + Q_n q_n^{\cdot} = 0$ тогда и только тогда, когда все $q_i^{\cdot} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Из уравнений (10) следует равенство

$$dH/dt = Q_1q_1^{\cdot} + \ldots + Q_nq_n^{\cdot}$$

означающее рассеивание энергии на всяком движении системы, для которого $Q_1q_1^{\cdot} + \ldots + Q_nq_n^{\cdot} \not\equiv 0$ для $t \geqslant t_0$. Энергия системы, как функция невозрастающая, при $t \to \infty$ стремится к некоторому пределу H^*, причем $H \geqslant H^*$.

Если $H(q_1, \ldots, q_n^{\cdot}, q_1; \ldots, q_n^{\cdot})$ — определенно-положительная функция $q_i, q_i^{\cdot}$ $(i = 1, \ldots, n)$, то начало является изолированным положением равновесия, асимптотически устойчивым согласно теореме 1, так как энергия H рассеивается, пока система не придет в начало координат $(H^* = 0)$ [6]. Если $H = H(q_1, \ldots, q_k, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot})$ — определенно-положительная функция своих аргументов $(k < n)$, то $H^* = 0$ и начало асимптотически устойчиво по отношению к $q_i^{\cdot}, q_s$ $(i = 1, \ldots, n;$ $s = 1 \ldots, k)$.

Если $H(q_1, \ldots q_n, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot})$ — определенно-положительная функция $q_i^{\cdot}$, q_s $(i = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, k)$ и из каких-либо соображений (например, если $H \to \infty$ при $q_{k+1}^2 + q_{k+2}^2 + \ldots, q_n^2 \to \infty$) известно, что переменные $q_{k+1}, \ldots, q_n$ остаются ограниченными при $t \geqslant t_0$, то $H^* = 0$ и, согласно теореме 3, начало асимптотически устойчиво по $q_i^{\cdot}, q_s$ $(i = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, k)$.

В некоторых случаях можно сделать вывод об асимптотической устойчивости по части переменных и в том случае, когда заранее неизвестна ограниченность по остальным переменным. В частности, рассмотрим пример [5] движения тяжелой точки по поверхности при действии сил вязкого трения, когда энергия

$$H = \tfrac{1}{2}(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + z^{\cdot 2}) + \tfrac{1}{2} g y^2 (1 + x^2)$$

является определенно-положительной функцией переменных $x^{\cdot}$, $y^{\cdot}$, y. Согласно теореме 1, начало $x = y = x^{\cdot} = y^{\cdot} = 0$ асимптотически устойчиво по отношению к переменным $x^{\cdot}$, $y^{\cdot}$, y.

Пример 2. Рассмотрим движение в окрестности положения равновесия $q_i = q_i^{\cdot} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ системы, стесненной линейными неголономными связями [8,9], под действием потенциальных и диссипативных сил Q_i $(i = 1, \ldots, k)$ того же вида, что и в примере 1. Из уравнений движения в форме Воронца следует уравнение для скорости рассеяния энергии

$$d/dt\,(T - U) = \sum_{i=1}^{k} Q_i q_i^{\cdot}$$

Предположим, что $Q_1q_1^{\cdot} + \ldots + Q_kq_k^{\cdot} = 0$ тогда и только тогда, когда все $q_i^{\cdot} = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$. Если силовая функция $U(q_1, \ldots, q_n)$ и выражение

$$\sum_{i=1}^{k} q_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_r} b_{ri} \right)$$

определенно-отрицательны по отношению к переменным q_i $(i = 1, \ldots, k)$, то функция $T - U$ является определенно-положительной по отношению к переменным q_i, $q_j^{\cdot}$ $(i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, n)$ и в окрестности положения равновесия обобщенные потенциальные силы $Q_i^* \neq 0$, если $q_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, k)$. При этих условиях происходит диссипация энергии до тех пор, пока все скорости $q_i^{\cdot}$ не станут равными нулю $q_i^{\cdot} = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$. Следовательно, если переменные q_r $(r = k + 1, \ldots, n)$ остаются ограниченными при $t \geqslant t_0$, то $T - U \to 0$ при $t \to \infty$ и, согласно теореме 3, начало является асимптотически устойчивым по отношению к переменным q_i, $q_i^{\cdot}$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Пользуясь случаем, заметим, что асимптотическая устойчивость положения равновесия по отношению к переменным q_i, $q_i^{\cdot}$ $(i = 1, \ldots, k)$ устанавливается с помощью функции (3, 4) работы [8] в предположении, что знакоопределенность функции U обнаруживается по ее квадратичной части в разложении в ряд Маклорена.

Перейдем к рассмотрению неустойчивости.

Как уже отмечалось в работе [3], для исследования неустойчивости по отношению к части переменных возможно применение общей теоремы Четаева [6] о неустойчивости. Легко видеть, что эта теорема допускает следующую формулировку:

Теорема 6. Если уравнения (1) таковы, что возможно найти функцию $V(t, y)$, ограниченную в области $V(t, y) > 0$, существующей при всяком $t \geqslant t_0$ и для сколь угодно малых по абсолютной величине значений переменных y_i, производная которой $V^{\cdot}(t, x)$ в силу этих уравнений была бы y-определенно-положительной в области $V(t, y) > 0$, то движение $x = 0$ — y-неустойчиво.

Доказательство ничем не отличается от доказательства [6]. Подобно тому как обе теоремы Ляпунова о неустойчивости следуют из теоремы Четаева [6], из теоремы 6 следуют аналоги теорем Ляпунова для y-неустойчивости. Рассматривая функции $V(t, y)$, нетрудно видеть, что аналог первой теоремы Ляпунова о неустойчивости получается из теоремы Ляпунова при условии, что производная $V^{\cdot}(t, x)$ является y-знакоопределенной функцией, а формулировка аналога второй теоремы Ляпунова ничем не отличается от формулировки последней. Чтобы убедиться в справедливости сказанного, достаточно заметить, что если функция $V(t, y)$ допускает бесконечно малый высший предел, то y-знакоопределенная функция $U(t, x)$ будет знакоопределенной в области $V(t, y) > 0$; функция $V^{\cdot}(t, x) = \lambda V(t, y) + W(t, x)$ есть y-знакоопределенная функция в области, где $V(t, y)$ имеет значения знака, совпадающего со знаком знакопостоянной функции $W(t, x) \not\equiv 0$, а если $W \equiv 0$, то $V^{\cdot}$ будут знакоопределенной как в области $V > 0$, так и в области $V < 0$ [6].

Поступила 7 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Собр. соч., т. 2, стр. 272. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1956.
2. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., Физматгиз, 1959.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вест. МГУ. Сер. матем., механ., физ., хим., астрон., 1957, № 4.
4. Corduneanu C. Sur la stabilité partielle. Rev. Roumaine math. pures appl., 1964, vol. 9, No. 3, pp. 229—236.
5. Peiffer K., Rouche N. Liapunov's second method applied to partial stability. J. Méc., 1969, vol. 8, No. 2, pp. 323—334.
6. Четаев Н. Г. Устойчивость движения, изд. 2. М., Гостехиздат, 1955.
7. Yoshizawa T. Stability theory Liapunov's second method. Tokyo, Math. Soc. Japan, 1966, p. 223.
8. Румянцев В. В. Об устойчивости движения неголономных систем. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
9. Risito C. Sulla stabilita asintotica parziale. Annali di Matematica pura ed applicatu, 1970,, Ser. 4, vol. 84, pp. 279—292.