Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

К ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В. С. Пацко

(Свердловск)

Показано, что из разрешимости задачи о программном максимине [1] времени перевода линейной системы с постоянными коэффициентами в общем случае не вытекает разрешимость аналогичной задачи в обратном времени.

Тем самым устанавливается, что стандартный в теории управляемых процессов прием синтеза оптимальных систем путем инверсии времени в рассматриваемых конфликтных ситуациях может применяться лишь при дополнительных условиях.

1. В работе содержится ответ на формулируемый ниже вопрос.

Пусть задана линейная система

$$dx \,/\, dt = Ax + u - v \tag{1.1}$$

Здесь A — постоянная матрица размерности $n \times n$; x — n-мерный вектор-столбец; u, v — управляющие параметры, стесненные в любой момент времени ограничениями

$$u\,(t) \in U, \qquad v\,(t) \in V,$$

где U, V — ограниченные, выпуклые, замкнутые множества размерности не больше n.

Системе (1.1) в обратном времени $\tau = -\,t$ соответствует система

$$dx \,/\, dt = -\,Ax - u + v \tag{1.2}$$

Ее управляющие параметры u, v в любой момент τ принадлежат соответственно множествам U, V.

Пусть $u^{(1)}(\cdot)$, $v^{(1)}(\cdot)$, $(u^{(2)}(\cdot)$, $v^{(2)}(\cdot))$ — произвольные измеримые, заданные на бесконечном интервале времени $0 \leqslant t < \infty$ $(0 \leqslant \tau < \infty)$, программы $u\,(t)$, $v\,(t)$ $(u\,(\tau)$, $v\,(\tau))$, удовлетворяющие при любом $t\,(\tau)$ условиям

$$u\,(t) \in U, \;\; v\,(t) \in V \qquad (u\,(\tau) \in U, \;\; v\,(\tau) \in V)$$

Выделим в фазовом пространстве две точки $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$. Через

$$T^{(1)}\,[u^{(1)}(\cdot),\; v^{(1)}(\cdot)] \qquad (T^{(2)}\,[u^{(2)}(\cdot),\; v^{(2)}(\cdot)])$$

обозначим наименьший момент времени, при котором система (1.1), (1.2) в силу программ $u^{(1)}(\cdot)$, $v^{(1)}(\cdot)$, $(u^{(2)}(\cdot)$, $v^{(2)}(\cdot))$ перейдет из точки $x^{(1)}$ $(x^{(2)})$ в точку $x^{(2)}$ $(x^{(1)})$. Если такой перевод при выбранных программах невозможен, положим

$$T^{(1)}\,[u^{(1)}(\cdot),\; v^{(1)}(\cdot)] = \infty \qquad (T^{(2)}\,[u^{(2)}(\cdot),\; v^{(2)}(\cdot)] = \infty)$$

Определим

$$T^{(i)} = \sup_v \min_u T^{(i)}[u^{(i)}(\cdot),\ v^{(i)}(\cdot)] \qquad (i = 1, 2)$$

(точная верхняя грань (минимум) берется по всем возможным программам $v^{(i)}(\cdot)$, $(u^{(i)}(\cdot))$).

Вопрос: вытекает ли из конечности времени $T^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ конечность времени $T^{(j)}$ $(j = 2, 1;\ j \neq i)$?

В общем случае (без дополнительных, кроме сделанных, предположений) ответ на этот вопрос отрицательный. Это показывается на примере системы второго порядка.

2. Рассмотрим систему второго порядка

$$dx_1 / dt = x_2, \qquad dx_2 / dt = u - v \tag{2.1}$$

с ограничениями на управляющие параметры

$$|u| \leqslant \mu,\ v = w + c,\ |w| \leqslant \nu,\ \nu < \mu,\ c = \text{const},\ \ \mu < c < \mu + \nu \tag{2.2}$$

В обратном времени системе (2.1) соответствует система

$$dx_1 / d\tau = -x_2, \qquad dx_2 / d\tau = -u + v \tag{2.3}$$

с ограничениями (2.2).

Положим $x^{(2)} = 0$. Точку $x^{(1)}$ обозначим через m. Будем считать в дальнейшем, что точка m принадлежит множеству

$$A = \left\{x : x_2 > 0,\ -\frac{x_2^2}{2(\mu - \nu + c)} + \frac{(\mu - \nu)(\mu + \nu - c)^2 x_2^2}{4(\mu + \nu + c)^2(\mu - \nu + c)^2} > \right.$$
$$\left. > x_1 > -\frac{x_2^2}{2(\mu - \nu + c)}\right\} \tag{2.4}$$

Покажем, что для любой точки $m \in A$

$$T^{(1)} = \infty, \qquad T^{(2)} < \infty$$

3. *Утверждение* 3.1. Для любой точки m из множества A время $T^{(1)} = \infty$.

Доказательство. Обозначим

$$t^\circ = \frac{x_{2m}}{\mu - \nu + c}$$

Пусть в систему (2.1) вместо u подставлена произвольная программа $u(t)$ $(|u(t)| \leqslant \mu)$, а вместо v — программа

$$v^\circ(t) = \begin{cases} -\nu + c, & \text{если } 0 \leqslant t < t^\circ \\ \nu + c, & \text{если } t^\circ \leqslant t \end{cases}$$

и пусть в начальный момент $t = 0$ система (2.1) находится в точке m.

Из формулы Коши

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t - s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ u(s) - v^\circ(s) \end{pmatrix} ds$$

с учетом (2.2), (2.4) вытекают следующие оценки положения системы (2.1):

если $0 \leqslant t < t^\circ$, $x_2(t) > 0$

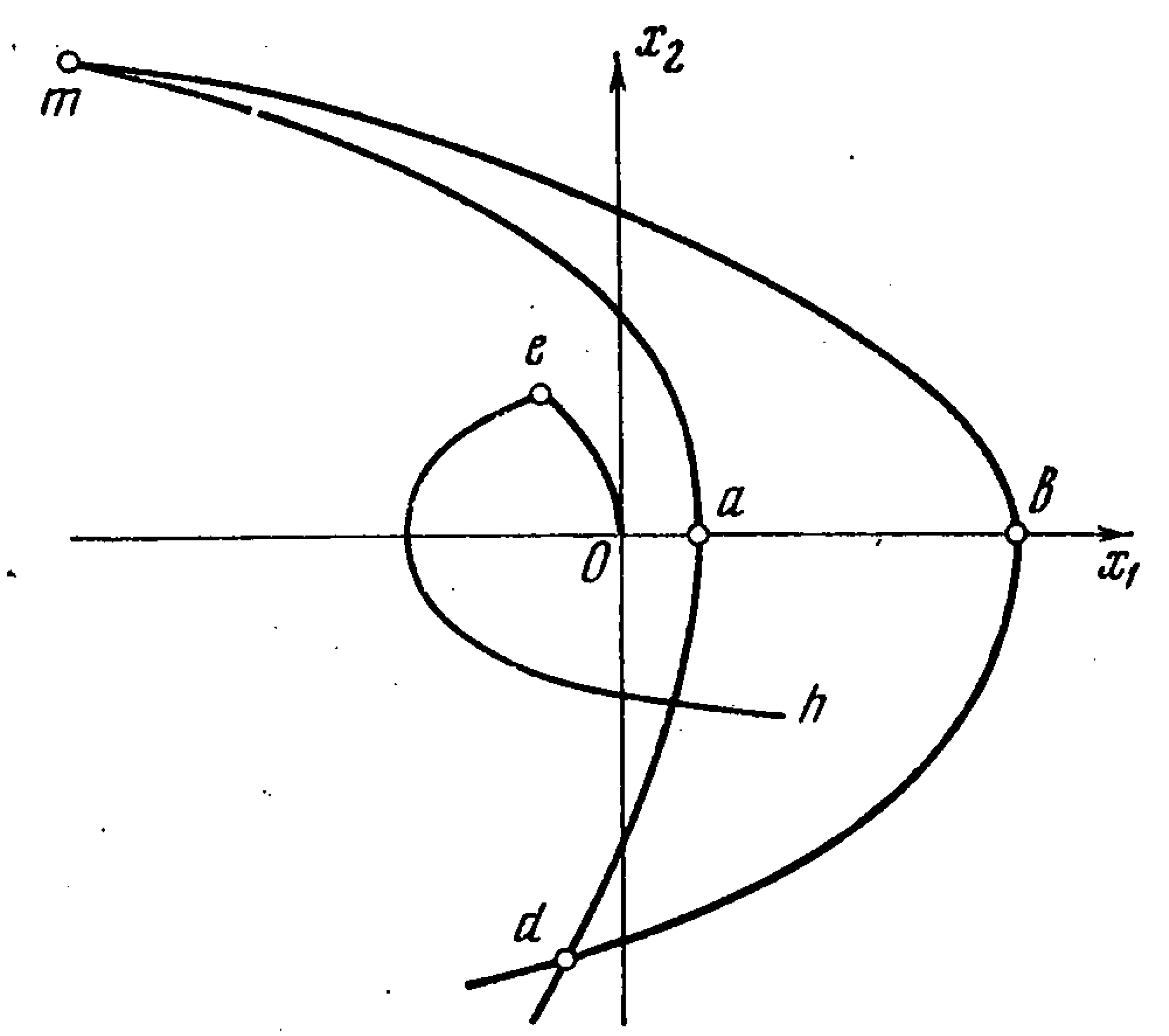
$$x_1(t^\circ) \geqslant \frac{x_{2m}^2}{2(\mu - \nu + c)} + x_{1m}, \quad x_2(t^\circ) \geqslant 0$$

если $x_2(t) \geqslant 0$, $t > t^\circ$, $\quad x_1(t) > \dfrac{x_{2m}^2}{2(\mu - \nu + c)} + x_{1m}$

если $x_2(t) < 0$, $t > t^\circ$

$$x_1(t) \geqslant \frac{x_{2m}^2}{2(\mu - \nu + c)} + x_{1m} - \frac{x_2^2(t)}{2(-\mu + \nu + c)}$$

Из этих оценок видно, что ни при каком $t \geqslant 0$ система (2.1) не попадает в начало координат. Отсюда в силу произвольности программы $u(t)$ время $T^{(1)} = \infty$. Утверждение доказано.



4. Прежде чем перейти к доказательству того, что для любой точки $m \in A$ время $T^{(2)} < \infty$, проделаем вспомогательные построения (фигура).

Из точки m выпустим движения системы (2.1) при $u = -\mu$, $v = -\nu + c$ и при $u = \mu$, $v = \nu + c$. Траектория первого движения описывается уравнением

$$x_1 = \frac{x_{2m}^2 - x_2^2}{2(\mu - \nu + c)} + x_{1m}, \qquad x_2 \leqslant x_{2m} \tag{4.1}$$

второго — уравнением

$$x_1 = \frac{x_{2m}^2 - x_2^2}{2(-\mu + \nu + c)} + x_{1m}, \qquad x_2 \leqslant x_{2m} \tag{4.2}$$

Точки пересечения кривых (4.1) и (4.2) с осью x_1 обозначим соответственно через a и b

$$x_{1a} = \frac{x_{2m}^2}{2(\mu - \nu + c)} + x_{1m}, \quad x_{1b} = \frac{x_{2m}^2}{2(-\mu + \nu + c)} + x_{1m}$$

Из точки a выпустим движение системы (2.1) при $u = -\mu$, $v = \nu + c$, а из точки b при $u = -\mu$, $v = -\nu + c$. Траектории этих движений

$$x_1 = \frac{x_{2m}^2}{2(\mu - \nu + c)} + x_{1m} - \frac{x_2^2}{2(\mu + \nu + c)}, \quad x_2 \leqslant 0$$

$$x_1 = \frac{x_{2m}^2}{2(-\mu + \nu + c)} + x_{1m} - \frac{x_2^2}{2(\mu - \nu + c)}, \quad x_2 \leqslant 0$$

пересекаются в точке d

$$x_{1d} = \frac{x_{2m}^2\,[2\nu c - \mu(\mu - \nu + c)]}{2\nu\,[c^2 - (\mu - \nu)^2]} + x_{1m}$$

$$x_{2d} = -x_{2m}\left(\frac{(\mu - \nu)(\mu + \nu + c)}{\nu(-\mu + \nu + c)}\right)^{1/2}$$

Утверждение 4.1. Перевод системы (2.3) из любой начальной позиции на кривой mad в точку m при любой программе $v(\tau) = w(\tau) + c$ $(|w(\tau)| \leqslant \nu)$ возможен за время, не большее некоторого числа t_*.

Доказательство разобьем на два этапа: вначале рассмотрим перевод системы (2.3) с кривой mad на кривую mb, затем с кривой mb в точку m.

Пусть в начальный момент система (2.3) находится в некоторой точке на кривой mad. Положим $u = -\mu$. Тогда при любой программе $v(\tau)$

$$dx_1 / d\tau = -x_2, \quad \mu + \nu + c \geqslant dx_2 / d\tau = \mu + v(\tau) \geqslant \mu - \nu + c > 0$$

Следовательно, движение будет идти между кривыми mad, bd и через конечное время попадет на кривую mb. Время перехода с кривой mad на кривую mb ограничено сверху числом

$$t_1 = \frac{x_{2m} - x_{2d}}{\mu - \nu + c}$$

Пусть система (2.3) находится в начальный момент на кривой mb. Тогда при любой программе $v(\tau)$ программа

$$u(\tau) = \mu - \nu - c + v(\tau)$$

обеспечивает движение системы (2.3) по кривой mb в направлении точки m, причем скорость движения не зависит от программы $v(\tau)$. Время движения до точки m ограничено сверху числом

$$t_2 = \frac{x_{2m}}{-\mu + \nu + c}$$

Таким образом, перевод системы (2.3) с кривой mad в точку m при любой программе $v(\tau)$ может быть завершен за время, не большее числа $t_* = t_1 + t_2$. Утверждение доказано.

Положим

$$\alpha = \frac{x_{2m}}{\mu - \nu + c} - \left[\frac{4\nu}{(\mu + c)^2 - \nu^2}\left(x_{1m} + \frac{x_{2m}^2}{2(\mu - \nu + c)}\right)\right]^{1/2}$$

$$v_* = x_{2m} / \alpha - \mu$$

Так как точка $m \in A$, величины α и v_* удовлетворяют неравенствам

$$\frac{x_{2m}}{\mu - \nu + c} > \alpha > \frac{x_{2m}}{\mu - \nu + c} - \frac{x_{2m}(\mu + \nu - c)}{(\mu + \nu + c)(\mu - \nu + c)} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{(\mu - \nu)\nu}{(\mu + c)^2 - \nu^2}} > \frac{2cx_{2m}}{(\mu + c)^2 - \nu^2} > \frac{x_{2m}}{2\mu}$$

$$\mu > v_* > -\nu + c$$

Утверждение 4.2. Перевод системы (2.3) из начала координат на кривую ma возможен за время, не большее α при любой программе $v(\tau) = w(\tau) + c$ $(|w(\tau)| \leqslant \nu)$ со средним значением на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant \alpha$

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha v(\tau)\, d\tau \geqslant v_*$$

Доказательство. Пусть система (2.3) находится в момент $\tau = 0$ в начале координат и движется затем в силу программ $v(\tau)$ и $u(\tau) = -\mu$. При любом $\tau \geqslant 0$

$$dx_2 / d\tau = \mu + v(\tau) > 0$$

Обозначим через β момент времени, при котором система (2.3) выходит на прямую $x_2 = x_{2m}$; $\beta \leqslant \alpha$, так как по предположению

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha v(\tau)\,d\tau \geqslant v_* \qquad \left(\beta = \alpha \text{ при } \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha v(\tau)\,d\tau = v_*\right)$$

Через v^* обозначим среднее значение программы $v(\tau)$ на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant \beta$

$$v^* = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta v(\tau)\,d\tau = \frac{x_{2m}}{\beta} - \mu$$

Введем вспомогательную программу

$$v^\circ(\tau) = \begin{cases} \nu + c, & \text{если } 0 \leqslant \tau < \beta^\circ, \\ -\nu + c, & \text{если } \beta^\circ \leqslant \tau \end{cases}$$

$$\beta^\circ = \frac{x_{2m} - \beta(\mu - \nu + c)}{2\nu} < \beta$$

Среднее значение программы $v^\circ(\tau)$ на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant \beta$ равно v^*.

Положение системы (2.3) в момент $\tau = \beta$ оценивается следующим образом:

$$x_2(\beta) = x_{2m}, \quad x_1(\beta) = \int_0^\beta (\tau - \beta)[\mu + v(\tau)]\,d\tau \geqslant \int_0^\beta (\tau - \beta)[\mu + v^\circ(\tau)]\,d\tau =$$

$$= \frac{(\mu + c)^2 - \nu^2}{4\nu}\left(\frac{x_{2m}}{\mu - \nu + c} - \beta\right)^2 - \frac{x_{2m}^2}{2(\mu - \nu + c)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(\mu + c)^2 - \nu^2}{4\nu}\left(\frac{x_{2m}}{\mu - \nu + c} - \alpha\right)^2 - \frac{x_{2m}^2}{2(\mu - \nu + c)} = x_{1m}.$$

Так как при $\tau > 0$

$$dx_1 / d\tau = -x_2 < 0$$

то из этих оценок следует, что система (2.3) пересекает кривую ma при $\tau \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Утверждение доказано.

Утверждение 4.3. Перевод системы (2.3) из начала координат на кривую ad возможен за время, не большее α при любой программе $v(\tau) = w(\tau) + c$ ($|w(\tau)| \leqslant \nu$) со средним значением на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant \alpha$

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha v(\tau)\,d\tau < v_*$$

Доказательство. Введем вспомогательную программу

$$v^\circ(\tau) = \begin{cases} \nu + c, & \text{если } 0 \leqslant \tau < \alpha^\circ \\ -\nu + c, & \text{если } \alpha^\circ \leqslant \tau \end{cases}$$

$$\alpha^\circ = \frac{x_{2m} - \alpha(\mu - \nu + c)}{2\nu} < \alpha$$

Среднее значение программы $v^\circ(\tau)$ на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant \alpha$ равно v_*.

Движение $x^\circ(\tau)$ (фигура, траектория Oeh) системы (2.3) в силу программ $v^\circ(\tau)$, $u(\tau) = \mu$ с начальной позицией в момент $\tau = 0$ в начале координат при $\tau \geqslant \alpha^\circ$ описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x_1^\circ(\tau) &= (\mu - \nu - c)(\alpha^\circ)^2/2 + (\mu - \nu - c)\alpha^\circ(\tau - \alpha^\circ) + \\ &\quad + (\mu + \nu - c)(\tau - \alpha^\circ)^2/2 \\ x_2^\circ(\tau) &= (-\mu + \nu + c)\alpha^\circ - (\mu + \nu - c)(\tau - \alpha^\circ) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Нетрудно проверить, что это движение для любой точки $m \in A$ пересекает кривую ad на интервале $\alpha^\circ < \tau \leqslant \alpha$.

Пусть теперь действует произвольная программа $v(\tau)$, имеющая на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant \alpha$ среднее значение, меньшее v_*. Снова положим $u(\tau) = \mu$. Движение $x(\tau)$ системы (2.3) в силу программ $v(\tau)$ и $u(\tau)$ будет находиться при любом $\tau \geqslant 0$ строго справа от траектории eh движения (4.3). Отсюда с учетом неравенства

$$x_2(\alpha) < x_2^\circ(\alpha)$$

получаем, что движение $x(\tau)$ пересекает кривую ad при $\tau \leqslant \alpha$. Утверждение доказано.

Из утверждений 4.1.—4.3 следует, что для любой точки $m \in A$ $T^{(2)} < \infty$.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за обсуждение этой работы и ценные замечания.

Поступила 29 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.