Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА НАВЕДЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Ю. С. Осипов

(Свердловск)

Для систем с последействием рассматривается игровая задача о приведении конфликтно управляемого движения на заданное множество. Задача исследуется на основе понятия экстремальных стратегий, введенных раньше [1] для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Статья примыкает к исследованиям [1-6].

§ 1. Рассмотрим систему с последействием вида

$$dx(t)\,/\,dt = f_1(t,\ x_t(s),\ u) + f_2(t,\ x_t(s),\ v) \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор; r_1-мерный вектор u и r_2-мерный вектор v-управляющие воздействия, выбором которых распоряжаются первый и второй игроки соответственно и которые стеснены ограничениями

$$u \in P, \qquad v \in Q \tag{1.2}$$

где P, Q — компакты; функционалы $f_i(t, x(s), y)$ определены на произведениях $[t_\alpha,\ t_\beta] \times C_{[-\tau,0]} \times Y_i$ $(Y_i = P,\ \ Y_2 = Q)$, непрерывны по совокупности аргументов и удовлетворяют условиям Липшица по функциям $x(s)$

$$\| f_i(t,\ x_1(s),\ y) - f_i(t,\ x_2(s),\ y) \| \leqslant L \| x_1(s) - x_2(s) \|_\tau \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем $C_{[-\tau,0]}$ — пространство непрерывных n-мерных функций $x(s)$, $-\tau \leqslant s \leqslant 0$, $\tau = \mathrm{const} \geqslant 0$, $L = \mathrm{const} \geqslant 0$

$$\| z \| = (z_1^2 + \ldots + z_m^2)^{1/2} \text{ — норма в евклидовом пространстве } E_m$$
$$\| x(s) \|_\tau = \max_s \| x(s) \| \text{ — норма в } C_{[-\tau,0]}$$

отрезок $x_t(s) = x(t+s)$ траектории системы (1.1) называется состоянием системы в момент t (и обозначается иногда также символом $x_t(\cdot)$); промежуток $[t_\alpha,\ t_\beta]$ содержит в себе все промежутки времени, на которых рассматривается ниже поведение системы (1.1).

В дальнейшем следует иметь в виду, что встречающиеся ниже обозначения и понятия, не сопровождаемые ссылками и пояснениями, определены в [6]. Рассматриваемая задача наведения состоит в следующем.

В фазовом пространстве системы (1.1) задано некоторое замкнутое множество M. Заданы также начальная позиция игры

$$p_0 = \{t_0,\ x_0(s)\} \qquad (t_0 \in [t_\alpha,\ t_\beta),\ \ x_0(s) \in C_{[-\tau,\,0]})$$

и момент времени $\vartheta \in (t_0,\ t_\beta]$.

Требуется построить стратегию U первого игрока, гарантирующую встречу движений $x[t, p_0, U, V_T]$ системы (1.1), с целью M в заданный момент (к заданному моменту) ϑ. При этом под движением $x[t, p_0, U, V_T]$ понимается (см. [6]) n-мерная вектор-функция аргумента t, построенная следующим образом.

Возьмем некоторое покрытие Δ промежутка $[t_\alpha, t_\beta]$ полуинтервалами $[\tau_i, \tau_{i+1})$ $(\tau_0 = t_\alpha,\ i = 0, 1, \ldots)$ с диаметром покрытия $\delta = \sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i) > 0$.

Обозначим символом $x[t, p_0, U, V_T]_\Delta$ абсолютно непрерывную $(t \geqslant t_0)$ функцию $x[t]_\Delta$, удовлетворяющую условию $x[t_0 + s]_\Delta = x_0(s)$ и почти при всех $t \in [t_0, t_\beta]$ контингенции

$$\frac{dx[t]_\Delta}{dt} \in f_1(t, x_t[s]_\Delta, u[t]) + F_2(t, x_t[s]_\Delta) \tag{1.4}$$

$$u[t] = u[\tau_i] \in U(\tau_i, x_{\tau_i}[s]_\Delta), \qquad \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$$

Множества, $U(t, x(s))$ задают стратегию U

$$F_2(p) = F_2(t, x(s)) = \overline{c\,0}\,\{f_2(t, x(s), v) \mid v \in Q\}$$

символ $\overline{c\,0}\{z\}$ означает замыкание выпуклой оболочки множества векторов z.

Тогда, по определению, $x[t, p_0, U, V_T]$ — непрерывная функция, обладающая следующим свойством: существует последовательность покрытий $\{\Delta_j\}$ с $\{\delta_j\} \to 0$ такая, что некоторая последовательность функций $\{x[t, p_0, U, V_T]_{\Delta j}\}$ сходится в $C_{[t_0, t_\beta]}$ к $x[t, p_0, U, V_T]$.

Заметим, что в силу равноограниченности и равностепенной непрерывности множества решений уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F_1(t, x_t(s)) + F_2(t, x_t(s))$$

$(x(t_0 + s) = x_0(s);\ \ F_1(p) = F_1(t, x(s)) = \overline{c0}\,\{f_1(t, x(s), u) \mid u \in P\};\ t_0 \leqslant t \leqslant t_\beta)$ определенное таким путем множество движений $\{x[t, p_0, U, V_T]\}$ не пусто).

Уточним постановку задачи. Пусть $\rho(x, M)$ — расстояние в E_n от точки x до множества M.

Определение 1.1. При заданной начальной позиции игры p_0 стратегия U гарантирует встречу движений $x[t] = x[t, p_0, U, V_T]$ системы (1.1) с целью M в момент ϑ (к моменту ϑ), если

$$\rho(x[\vartheta], M) = 0 \qquad (\min_{t_0 \leqslant t \leqslant t_\beta} \rho(x[t], M) = 0) \tag{1.5}$$

где $x[t]$ — любое движение $x[t, p_0, U, V_T]$.

Ниже указываются достаточные условия разрешимости задачи наведения и выясняется структура искомой стратегии U.

§ 2. Пусть каждому $t \in [t_\alpha, t_\beta]$ поставлено в соответствие непустое множество $W_t = W_t\{x(s)\} \subset C_{[-\tau, 0]}$. Зафиксируем число $\xi \in [-\tau, 0]$. Множество $W_{t\xi} = \{x(\xi) \mid x(s) \in W_t\}$ назовем ξ-сечением множества W_t. Последовательность $\{x^{(k)}(\xi)\}$, где $x^{(k)}(s) \in C_{[-\tau, 0]}$, назовем ξ-сечением последовательности $\{x^{(k)}(s)\}$.

Положим

$$r(x(s),\ W_t) = \inf \| x(s) - y(s) \|_\tau \quad (y \in W_t) \tag{2.1}$$

Пусть для данного $x(s)$ $\{y\} = \{x^{(k)}(s)\}$ — какая-либо минимизирующая для (2.1) последовательность.

Составим множество частичных пределов последовательности $\{x^{(k)}(0)\}$, являющейся 0-сечением последовательности $\{x^{(k)}(s)\}$.

Обозначим символом $Z(x(0))$ совокупность элементов этого множества, ближайших к $x(0)$ в E_n.

Определение 2.1. Экстремальными к системе множеств W_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, назовем стратегии U^e, V^e, задаваемые соответственно множествами $U^e(t,\ x(s))$, $V^e(t,\ x(s))$, построенными по правилу

$$\begin{gathered} U^e(t,\ x(s)) = \{u_e \mid (z - x(0)) f_1(t,\ x(s),\ u_e) = \\ = \max (z - x(0)) f_1(t,\ x(s),\ u)\} \quad (u \in P) \\ V^e(t,\ x(s)) = \{v_e \mid (z - x(0)) f_2(t,\ x(s),\ v_e) = \\ = \max (z - x(0)) f_2(t,\ x(s),\ v)\} \quad (v \in Q) \end{gathered} \tag{2.2}$$

по крайней мере при одном $z \in Z(x(0))$.

Теорема 2.1. Пусть на промежутке $[t_0,\ \vartheta]$ задана система сильно u-стабильных множеств W_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ (см. [6]), причем $M \supset W_{\vartheta 0}$. Если начальная позиция игры $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$ удовлетворяет условию $r(x_0,\ W_{t_0}), = 0$, то экстремальная к системе множеств W_t стратегия U^e первого игрока гарантирует встречу движений $x[t] = x[t,\ p_0,\ U^e,\ V_T]$ системы (1.1) с целью M в момент ϑ.

Данная теорема вытекает из следующей леммы, представляющей также и самостоятельный интерес.

Лемма 2.1. Пусть начальная позиция игры $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$ такова, что $r(x_0(s),\ W_{t_0}) = 0$. Если система множеств W_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, сильно u-стабильна [6], то экстремальная к ней стратегия U^e удовлетворяет условию

$$r(x_t[s],\ W_t) = 0, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{2.3}$$

где $x[t]$ — любое движение $x[t,\ p_0,\ U^e,\ V_T]$.

Доказательство. Пусть система множеств W_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, сильно u-стабильна, и $r(x_0(s),\ W_{t_0}) = 0$. Пусть $x[t]$ — произвольное движение из совокупности $\{x[t,\ p_0,\ U^e,\ V_T]\}$.

По определению этого движения существует последовательность функций $\{x[t]_{\Delta_j}\} = \{x[t,\ p_0,\ U^e, V_T]_{\Delta_j}\}$ $(c\{\delta_j\} \to 0)$, равномерно сходящаяся на $[t_0, \vartheta]$ к $x[t]$.

Справедливость соотношения (2.3) будет, очевидно, установлена, если показано, что каково бы ни было положительное число ε_0, отрезок $x_t[s]_{\Delta_j}$ любой функции $x[t]_{\Delta j}$ с достаточно большим номером j содержится в ε_0-окрестности $W_t^{\varepsilon_0}$ множества W_t каково бы ни было $t \in (t_0, \vartheta]$.

Для этого выберем из последовательности $\{x[t]_{\Delta_j}$ произвольным образом функцию $x[t]_\Delta$ и построим вдоль нее оценку величины $\varepsilon_\Delta[\tau_{i+1}]$ через величины $\varepsilon_\Delta[\tau_i]$ и δ. Здесь и в дальнейшем $\varepsilon_\Delta[t] = r(x[t]_\Delta,\ W_t)$.

Пусть $z(\tau_i)_\Delta$ — элемент множества $Z(x_{\tau_i}[0]_\Delta)$, определяющий при $t = \tau_i$ согласно (2.2) управление $u_e[t]$, отвечающее экстремальной стратегии U^e. Не нарушая общности, считаем, что сечение $\{x^{(k)}_{\tau_i}(0)_\Delta\}$ порождающей вектор $z(\tau_i)_\Delta$ минимизирующей последовательности $\{x^{(k)}_{\tau_i}(s)_\Delta\}$ сходится к $z(\tau_i)_\Delta$. Из (2.2) имеем

$$(x_{\tau_i}[0]_\Delta - x^{(k)}_{\tau_i}(0)_\Delta)\, N_1(\tau_i, u) \leqslant \beta_1(k) \qquad (u \in P) \tag{2.4}$$

Здесь

$$N_1(\tau_i, u) = f_1(\tau_i, x_{\tau_i}[s]_\Delta, u_e) - f_1(\tau_i, x_{\tau_i}[s]_\Delta, u), \quad \beta_1(k) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty$$

Рассмотрим позицию $p(k, i) = \{\tau_i, x^{(k)}_{\tau_i}(s)_\Delta\}$. В силу сильной u-стабильности системы множеств W_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ среди движений

$$x^{(k)}[t]_\Delta = x[t, p(k, i), U^{*}_{T}, V_{v_0}]$$

есть движение со свойством

$$x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s] \in W_{\tau_{i+1}} \tag{2.5}$$

Здесь стратегия V_{v_0} порождается функцией

$$v_0(t) = v_0[\tau_i] = v_0, \qquad \tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$$

удовлетворяющей для любого $v \in Q$ условию

$$(x_{\tau_i}[0]_\Delta - z(\tau_i)_\Delta)\, N_2(\tau_i, v) \leqslant 0 \tag{2.6}$$

$$N_2(\tau_i, v) = f_2(\tau_i, x_{\tau_i}[s], v) - f_2(\tau_i, x_{\tau_i}[s]_\Delta, v_0)$$

и, следовательно, условию: для любого $v \in Q$

$$(x_{\tau_i}[0]_\Delta - x^{(k)}_{\tau_i}(0)_\Delta)\, N_2(\tau_i, v) \leqslant \beta_2(k) \tag{2.7}$$

$$\beta_2(k) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty$$

По определению величины $\varepsilon_\Delta[t]$ с учетом (2.5) имеем оценку

$$\varepsilon_\Delta[\tau_{i+1}] \leqslant \| x_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta - x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta \|_\tau \tag{2.8}$$

Заметим далее, что отрезки $x_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta$, $x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta$ траекторий $x[t]_\Delta$, $x^{(k)}[t]_\Delta$ могут быть представлены в следующем виде (считаем, что $\tau_{i+1} - \tau_i < \tau$):

$$x_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta = x_{\tau_i}[0]_\Delta + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} \{f_1(t, x_t[\cdot]_\Delta, u_e) + \varphi_2[t]\}\, dt, \qquad -\alpha_i \leqslant s \leqslant 0$$

$$x_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta = x_{\tau_i}[s + \alpha_i], \qquad -\tau \leqslant s \leqslant -\alpha_i \tag{2.9}$$

$$x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta = x^{(k)}_{\tau_i}(0)_\Delta + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} \{\varphi^{(k)}_1[t] + f_2(t, x^{(k)}_t[\cdot]_\Delta, v_0(t))\}\, dt$$

$$-\alpha_i \leqslant s \leqslant 0$$

$$x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta = x^{(k)}_{\tau_i}(s + \alpha_i), \qquad -\tau \leqslant s \leqslant \alpha_i \quad (\alpha_i = \tau_{i+1} - \tau_i)$$

Здесь $\varphi^{(k)}_1[t]$, $\varphi_2[t]$ — суммируемые функции, удовлетворяющие почти при всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ включениям:

$$\varphi^{(k)}_1[t] \in F_1(t, x^{(k)}_t[s]_\Delta), \qquad \varphi_2[t] \in F_2(t, x_t[s]_\Delta)$$

Из (2.8), опираясь на определения движений $x[t, p_0, U, V_T]$, $x[t, p_0, U_T, V_v]$ и соотношения (2.9), получаем

$$\varepsilon_\Delta[\tau_{i+1}] \leqslant \max\{\max_{-\tau\leqslant s\leqslant -\alpha_i} \|x_{\tau_i}[s]_\Delta - x_{\tau_i}^{(k)}(s)_\Delta\|$$

$$\max_{-\alpha_i\leqslant s\leqslant 0} \|x_{\tau_i}[0]_\Delta - x_{\tau_i}^{(k)}(0)_\Delta + J_1(s) + J_2(s)\|\} \tag{2.10}$$

где

$$J_1(s) = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} \{f_1(t, x_t[\cdot]_\Delta, u_e)- \varphi_1^{(k)}[t]\}\,dt$$

$$J_2(s) = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} \{\varphi_2[t] - f_2(t, x_t^{(k)}[\cdot]_\Delta, v_0(t)\}\,dt$$

При этом, учитывая непрерывность множеств $F_i(t, x(s))$ по t, $x(s)$ и условие Липшица (1.3), можем утверждать, что

$$J_m(s) = (\alpha_i + s)(p_m + q_m) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} r_m^{(k)}(t)\,dt \tag{2.11}$$

$$p_m \in \overline{co}\{N_m(\tau_i, y) \mid y \in Y_m\}$$

$$\|r_m^{(k)}\| \leqslant L \|x_t[s]_\Delta - x_t^{(k)}[s]_\Delta\|_\tau \quad (m = 1, 2)$$

где $\| q_m \| \to 0$ при $\alpha_i \to 0$ равномерно по $\tau_i \in [t_0, \vartheta]$.

Покажем теперь, что, каково бы ни было положительное число β, все функции $x[t]_{\Delta_j}$ с достаточно большим номером j при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяют неравенству

$$\varepsilon_{\Delta_j}[t] \leqslant \beta \exp[3L(t - t_0)] \tag{2.12}$$

В самом деле, предполагая противное, заключаем, что существует такое число β_0, что для любого числа j_0 можно указать номер $j \geqslant j_0$ и момент $t_*(j) \in [t_0, \vartheta]$, для которых неравенство (2.12) нарушается при $\beta = \beta_0$. По условию теоремы в начальный момент $t = t_0$ при любом j имеет место равенство $\varepsilon_{\Delta_j}[t_0] = 0$. Пусть в точках τ_k условие (2.12) для функций $x[t]_{\Delta_j}$ впервые нарушается при $t_*(j) = \tau_{i+1} = \tau_{i+1}(j)$

$$\varepsilon_{\Delta_j}[\tau_{i+1}] > \beta_0 \exp[3L(\tau_{i+1} - t_0)] \tag{2.13}$$

Тогда при $t = \tau_i = \tau_i(j)$ для этих же функций выполняются соотношения

$$\varepsilon_{\Delta_j}[\tau_i] \leqslant \beta_0 \exp[3L(\tau_i - t_0)] \tag{2.14}$$

Выберем положительное число $\beta_1 \leqslant \beta_0$. Для функций $x[t]_{\Delta_j}$, удовлетворяющих условиям (2.13), (2.14), могут представиться два случая:

либо (1) при любом выборе β_1 можно указать число $j(\beta_1)$ такое, что при $j \geqslant j(\beta_1)$

$$\varepsilon_{\Delta_j}[\tau_i] < \beta_1 \tag{2.15}$$

либо (2) существует число β_1 такое, что для любого числа j_0 можно указать номер $j \geqslant j_0$, для которого

$$\varepsilon_{\Delta_j}[\tau_i] \geqslant \beta_1 \tag{2.16}$$

В первом случае из (2.11) следует оценка

$$\varepsilon_{\Delta_j}[\tau_{i+1}] \leqslant \beta_1 + O(j), \qquad (O(j) \to 0 \text{ при } j \to \infty) \tag{2.17}$$

Неравенство (2.17) при достаточно малом β_1 и большом j противоречит условию (2.13).

Рассмотрим случай (2). Если теперь для всех функций $x\,[t]_{\Delta_j}$, имеющих достаточно большой номер j, выполняется неравенство

$$\| x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - z(\tau_i)_{\Delta_j} \| < \alpha \tag{2.18}$$

где α — сколь угодно малое положительное число, то из соотношения (2.10), выбирая k достаточно большим, получаем для этих функций оценку

$$\varepsilon_{\Delta_j}[\tau_{i+1}] \leqslant \| x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}^{(k)}(s)_{\Delta_j} \|_\tau \tag{2.19}$$

из этой оценки следует неравенство

$$\varepsilon_{\Delta_j}[\tau_{i+1}] \leqslant \varepsilon_{\Delta_j}[\tau_i] \tag{2.20}$$

Если же среди функций $x\,[t]_{\Delta_j}$, для которых имеет место случай (2), есть функции со сколь угодно большими номерами j, удовлетворяющие при некотором положительном α неравенству

$$\| x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - z(\tau_i)_{\Delta_j} \| \geqslant \alpha \tag{2.21}$$

то для таких функций, подставляя (2.11) в (2.10), выбирая k достаточно большим и учитывая (2.4), (2.7), получаем соотношение

$$\varepsilon_{\Delta_j}[\tau_{i+1}] \leqslant (1 + 2L\alpha_i) \| x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}^{(k)}(s)_{\Delta_j} \|_\tau + o(\alpha_i) \tag{2.22}$$

Здесь $o(\alpha_i)$ равномерно по k и $\tau_i \in [t_0, \vartheta]$ имеет более высокий порядок малости, чем α_i. Отсюда вытекает оценка

$$\varepsilon_{\Delta_j}[\tau_{i+1}] \leqslant (1 + 2L\delta_j)\, \varepsilon_{\Delta_j}[\tau_i] + o(\delta_j) \tag{2.23}$$

$$\delta_j^{-1} o(\delta_j) \to 0 \quad \text{при } j \to \infty \qquad (\text{равномерно по } \tau_i \in [t_0, \vartheta])$$

Соотношения (2.20), (2.21) противоречат, очевидно, совокупности неравенств (2.13), (2.14).

Итак, неравенство (2.12) доказано. Отсюда следует, что все функции $x\,[t]_{\Delta_j}$ с достаточно большим номером j удовлетворяют условию

$$\varepsilon_{\Delta_j}[t] \leqslant \varepsilon_0, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{2.24}$$

где ε_0 — произвольное сколь угодно малое положительное число. Из (2.24) и определения движения $x\,[t] = x\,(t, p_0, U, V_T]$ вытекает соотношение (2.3).

Из предыдущих рассуждений непосредственно вытекает также следующее утверждение.

Лемма 2.2. Пусть на промежутке $[t_0, \vartheta]$ задана система сильно u-стабильных множеств W_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$. Экстремальная к этой системе множеств стратегия U^e обладает следующим свойством: каково бы ни было положительное число ε, можно указать положительное число $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ такое, что для всех движений $x\,[t] = x\,[t, p_0, U^e, V_T]$ системы (1.1) будет выполняться неравенство

$$r(x_t[s], W_t) < \varepsilon, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$$

если только начальная позиция игры $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$ удовлетворяет включению

$$x_0(s) \in W_{t_0}^{\alpha}.$$

Здесь W_t^α — α-окрестность в $C_{[-\tau,0]}$ множества W_t, т. е. совокупность элементов $x(s) \in C_{[-\tau,0]}$ вида:

$$x(s) = y(s) + z(s), \quad y(s) \in W_t, \quad \|z(s)\|_\tau \leqslant \alpha$$

Примечание 2.1. Свойствами, аналогичными свойствам стратегии U^e обладает и экстремальная стратегия V^e второго игрока. Именно справедливы следующие утверждения.

Лемма 2.3. Пусть начальная позиция игры $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$ такова, что $r(x_0(s), W_{t_0}) = 0$. Если система множеств W_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ сильно v-стабильна (см. [6]), то экстремальная к ней стратегия V^e удовлетворяет условию

$$r(x_t[s], W_t) = 0, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$$

где $x[t]$ — любое движение $x[t, p_0, U_T, V^e]$ (см. [6]).

Лемма 2.4. Пусть система множеств W_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, сильно v — стабильна. Каково бы ни было положительное число ε, можно указать положительное число $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, такое, что для всех движений $x[t] = x[t, p_0, U_T, V^e]$ системы (1.1) будет выполняться неравенство

$$r(x_t[s], W_t) < \varepsilon, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$$

если только начальная позиция игры $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$ удовлетворяет включению $x_0(s) \in W_{t_0}^\alpha$.

Рассмотрим теперь задачу о встрече системы (1.1) с целью M к моменту ϑ.

Справедливо утверждение.

Теорема 2.2. Пусть начальная позиция игры $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$, такова, что $r(x_0(s), W_{t_0}) = 0$. Если система множеств W_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ будет u-стабильной, причем $M \supset W_{\vartheta_0}$, то экстремальная к этой системе стратегия U^e гарантирует встречу движений $x[t, p_0, U^e, V_T]$ системы (1.1) с целью M к моменту ϑ.

Доказательство. Пусть попрежнему $x[t]$ — произвольное движение из совокупности $\{x[t, p_0, U^e, V_T]\}$ и $\{x[t]_{\Delta_j}\}$ — порождающая это движение последовательность функций $x[t]_\Delta = x[t, p_0, U^e, V_T]_\Delta$. Для доказательства утверждения теоремы (см. определение 1.11.), достаточно, очевидно, проверить, что все функции $x[t]_{\Delta_j}$, имеющие достаточно большой номер j, удовлетворяют неравенству

$$\min_{t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta} \rho(x[t]_{\Delta_j}, M) < \varepsilon \tag{2.25}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

Предполагая противное, получаем, что существует такое полжительное число ε_0, что для любого числа j_0 можно указать номер $j \geqslant j_0$, для которого

$$\min_{t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta} \rho(x[t]_{\Delta_j}, M) \geqslant \varepsilon_0 \tag{2.26}$$

Рассмотрим подпоследовательность функции $x[t]_{\Delta_j}$, каждый член которой удовлетворяет условию (2.26). Для этой подпоследовательности сохраним прежнее обозначение $\{x[t]_{\Delta_j}\}$. Условимся i-й узел τ_i $(i = 0, 1, \ldots)$ разбиения Δ_j обозначать теперь символом $\tau_i[j]$. Пусть, как и выше,

$$\{x^{(k)}_{\tau_i[j]}(s)\} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots)$$

минимизирующая последовательность для (2.1), где

$$x(s) = x_{\tau_i[j]}[s]_{\Delta_j}$$

При этом 0-сечение этой последовательности $\{x^k_{\tau_i[j]}(0)\}$ сходится к $z(\tau_i[j])_{\Delta_j}$ (см. стр. 126). Пусть

$$x^{(k)}_i[t;\ \tau_i[j]] = x^{(k)}[t,\ p(k,\ \tau_i),\ U_T,\ V_{v_0}], \qquad p(k,\ i) = \{\tau_i[j],\ x^{(k)}_{\tau_i[j]}(s)\}$$

где функция v_0 удовлетворяет (2.7) при $\Delta = \Delta_j$, — движение $c0$ обладает свойством выполняется включение

$$x^{(k)}_{\tau_{i+1}[j]}[s,\ \tau_i[j]] \in W_{\tau_{i+1}[j]} \tag{2.27}$$

или, хотя бы при одном $t = t(j) \in [\tau_i[j],\ \tau_{i+1}[j])$, условие

$$x^{(k)}[t(j),\ \tau_i[j]] \in M \tag{2.28}$$

Такое движение существует в силу включения

$$x^{(k)}_{\tau_i[j]}(s) \in W_{\tau_i[j]}$$

и определения u-стабильности системы множеств W_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ (см. [6]).

Для функций $x[t]_{\Delta_j}$ из $\{x[t]_{\Delta_j}\}$ могут представиться два случая:

(1) либо существует такое число j_*, что для любого $j \geqslant j_*$ и любого $\tau_i[j]$ можно указать номер k_* такой, что для всякого движения $x^{(k)}[t,\ \tau_i[j]]$ с $k \geqslant k_*$ имеет место включение (2.27);

(2) либо для любого числа j^* можно указать номер $j \geqslant j^*$ и узел $\tau_m[j]$ такие, что в совокупности $\{x^{(k)}[t,\ \tau_m[j]],\ k = 1,\ 2,\ \ldots\}$ есть движения со сколь угодно большими номерами k, для которых выполняется условие (2.28). Но тогда, выбирая из $\{x^{(k)}_{\tau_m[j]}(s)\}$, если нужно, подпоследовательность, можем, очевидно, считать, что условие (2.28) для $x^{(k)}[t,\ \tau_m[j]]$ имеет место при всех достаточно больших k.

Итак, пусть имеет место случай (1). Тогда (см. доказательство леммы 2.1) для функций $x[t]_{\Delta_j}$ справедлива оценка (2.12). Пользуясь этой оценкой, учитывая включение $W_{\vartheta_0} \subset M$ и неравенство $\rho(x[t]_\Delta,\ M) \leqslant \varepsilon_\Delta[t]$, получаем что при достаточно большом j имеет место соотношение $\rho(x[\vartheta]_{\Delta_j},\ M) \leqslant \varepsilon_0$, противоречащее (2.26).

Рассмотрим теперь случай (2). Не нарушая общности, считаем, что $[\tau_m[j],\ \tau_{m+1}[j])$ — первый полуинтервал для функции $x[t]_{\Delta_j}$, на котором имеет место условие (2.28). Непосредственно проверяется, что для функций $x[t]_{\Delta_j}$ из случая (2) имеет место оценка

$$\rho(x[t(j)]_{\Delta_j},\ M) \leqslant \varepsilon_{\Delta_j}[\tau_m[j]] + O(j) \tag{2.29}$$

$O(j) \to 0$ при $j \to \infty$ (равномерно по $\tau_i \in [t_0, \vartheta]$).

Далее рассуждениями, аналогичными рассуждениям из доказательства леммы 2.1, можно показать, что каждая функция $x[t]_{\Delta_j}$ из случая (2), имеющая достаточно большой номер j, удовлетворяет на $[t_0,\ \tau_m[j]]$ неравенству (2.12), где β — сколь угодно малое положительное число. Но тогда из (2.29) и (2.12) (при $t = \tau_m[j]$) заключаем, что при достаточно большом j имеет место соотношение $\rho(x[t]_{\Delta_j},\ M) < \varepsilon_0$, также противоречащее условию (2.26). Теорема доказана.

Примечание 2.2. Теоремы 2.1, 2.2 остаются, очевидно, справедливыми и в случае, когда множество $M = M(t)$ зависит непрерывно от t. В этом случае в формулировках теорем условие $W_{\vartheta_0} \subset M$ следует заменить на включение $W_{\vartheta 0} \subset M(\vartheta)$.

Примечание 2.3. В связи с теоремами 2.1, 2.2 встает вопрос о существовании системы множеств W_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, обладающей нужными свойствами стабильности. Этот вопрос обсуждался в работе [6], где указаны достаточные условия сильной u-стабильности множеств программного поглощения цели M системой (1.1). Там же указано (без доказательства), что свойством u-стабильности обладает система множеств позиционного поглощения (см. [6]). Последнее (в связи с теоремой 2.2) особенно важно при решении игровой задачи на минимакс (максимин) времени до встречи системы (1.1) с целью M (см. [2]).

Автор благодарит Н. Н. Красовского за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Поступила 6 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи динамики, I. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 5.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. О структуре дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 3.
3. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх, I. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 6.
4. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 1.
5. Пшеничный Б. Н. Линейные дифференциальные игры. Автоматика и телемеханика, 1968, № 1.
6. Осипов Ю. С. Дифференциальные игры систем с последействием. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 4.