Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

О СТРУКТУРЕ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

Н. Н. Красовский, А. И. Субботин

(Свердловск)

Описывается построение оптимальных стратегий игроков, определяющих ситуации типа седловой точки в некоторых дифференциальных играх. В основе подхода, используемого при исследовании рассматриваемых здесь дифференциальных игр, лежит материал статьи [1], где введены понятия смешанных стратегий игроков и доказана альтернатива, которая имеет место для этого класса стратегий. Материал данной статьи примыкает к вопросам, рассматривавшимся в работах [2–5].

§ 1. Пусть движение управляемой системы описывается уравнением вида

$$dx / dt = f(t, x, u, v), \qquad x[t_0] = x_0 \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор, $f(t, x, u, v)$ — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по x; u и v — векторные управляющие воздействия, подчиненные первому и второму игрокам соответственно. Предполагается, что выбор управлений u и v стеснен ограничениями вида

$$u \in P, \qquad v \in Q \tag{1.2}$$

где P и Q — замкнутые ограниченные множества в соответствующих векторных пространствах.

Сформулируем игровые задачи (дифференциальные игры), рассматриваемые в данной работе.

Задача 1.1. Пусть в пространстве векторов $p = \{t, x\}$ заданы некоторые замкнутые множества N и G. Первый игрок, распоряжающийся выбором управления u, стремится осуществить движение системы (1.1) так, чтобы при любом допустимом поведении партнера точка $p[t] = \{t, x[t]\}$ попадала на множество N за наименьшее возможное время и при этом в процессе перевода точки $p[t]$ из начального состояния $p_0 = \{t_0, x_0\}$ на множество N выполнялось фазовое ограничение $p[t] \in G$. Цель второго игрока противоположна. Он стремится осуществить движение системы (1.1) либо так, чтобы фазовое ограничение $p[t] \in G$ нарушалось раньше, чем точка $p[t]$ попадет на множество N, либо так, чтобы точка $p[t]$ не попадала на множество N в течение максимально возможного промежутка времени $[t_0, \vartheta]$. Таким образом, плата в этой дифференциальной игре задается следующим соотношением:

$$\gamma = \begin{cases} \vartheta(x[\cdot]) - t_0 & \text{если } p[t] = \{t, x[t]\} \in G, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta(x[\cdot]) \\ \infty & \text{если } p[t_*] \notin G \text{ при некотором } t_* \in [t_0, \vartheta(x[\cdot])] \end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь символом $\vartheta(x[\cdot])$ будем обозначать момент времени, когда для некоторого движения $x[t]$ впервые имеет место включение $\{t, x[t]\} \in N$, причем в том случае, когда при $t \geqslant t_0$ точка $p[t] = \{t, x[t]\}$ не попадает на N, полагаем $\vartheta(x[\cdot]) = \infty$.

При постановке этой задачи предполагается, что любому из игроков в каждый текущий момент времени $t \geqslant t_0$ известна реализовавшаяся позиция игры $p[t] = \{t, x[t]\}$, но не известно управление, выбираемое партнером в данный и в последующие моменты времени. Решение поставленной задачи, которое состоит в определении стратегий, доставляющих седловую точку, будем искать в классе смешанных стратегий, введенных в работе [1].

Задача 1.2. Пусть движение управляемой системы по-прежнему описывается уравнением (1.1), в пространстве векторов $p = \{t, x\}$ задано некоторое замкнутое множество N. Плату игры определим равенством

$$\gamma = \max_t \varphi(t, x[t]) \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant \min\{T, \vartheta(x[\cdot])\} \tag{1.4}$$

где $\varphi(t, x)$ — заданная непрерывная функция, T — некоторый конечный момент времени, ограничивающий продолжительность игры, $\vartheta(x[\cdot])$ — как и выше, момент времени, когда точка $p[t]$ впервые попадает на N. Предполагается, что первый игрок заинтересован в минимизации величины γ (1.4), второй игрок, напротив, стремится ее максимизировать. При этом характер, предоставляемой игрокам информации такой же, как и в предыдущей дифференциальной игре.

Как и выше, задача здесь заключается в определении стратегий игроков, доставляющих седловую точку.

Задача 1.3. Эта задача отличается от предыдущей лишь тем, что плата здесь задается соотношением

$$\gamma = \begin{cases} \max_t \varphi(t, x) & \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta(x[\cdot]), \quad \text{если } \vartheta(x[\cdot]) \leqslant T \\ \infty & \text{если } \vartheta(x[\cdot]) > T \end{cases} \tag{1.5}$$

В этой игре первый игрок должен привести точку $p[t]$ на множество N не позже, чем в момент $t = T$, в противном случае игра считается для него проигранной.

Задача 1.4. В последней дифференциальной игре плата задается равенством

$$\gamma = \varphi(\vartheta, x[\vartheta]) + \int_{t_0}^{\vartheta} \Psi(t, x[t])\, dt \tag{1.6}$$

Здесь $\varphi(t, x)$ и $\Psi(t, x)$ — заданные непрерывные функции, определенные при всех x и при $t \in [t_0, T]$, где $T > t_0$ — некоторый конечный момент времени; $\vartheta = \vartheta(x[\cdot])$ — момент первого попадания точки $p[t]$ на заданное замкнутое множество N. Первый игрок, распоряжающийся выбором управления u, стремится минимизировать величину γ (1.6), второй игрок заинтересован в максимизации этой величины. При этом в случае, когда при $t \in [t_0, T]$ точка $p[t]$ не попадает на N, будем полагать $\gamma = \infty$, т. е. будем считать такую ситуацию проигрышной для первого игрока. Предполагается, что характер предоставляемой игрокам информации такой же, как в предыдущих задачах. Нетрудно заметить, что в том случае, когда множество N определяется как гиперплоскость $t = \vartheta = \mathrm{const}$ в пространстве векторов $p = \{t, x\}$, описанная выше игровая задача становится дифференциальной игрой с фиксированным моментом окончания $t = \vartheta$.

При решении поставленных выше игровых задач будем придерживаться тех определений и обозначений, которые были введены в работе [1]. Приведем формулировки результатов работы [1], которые будут лежать в основе дальнейших выкладок.

Пусть $W(\tau, \vartheta)$ — множество точек w, удовлетворяющих следующему требованию: какова бы ни была смешанная стратегия второго игрока $V = V(t, x)$, существует движение $x[t] = x[t; \tau, w, U_T, V]$ такое, что точка $p[t] = \{t, x[t]\}$ попадает на множество M не позже, чем в момент $t = \vartheta$ и при этом выполняется фазовое ограничение $p[t] \in D$ при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta(x[\cdot]; M)$. Здесь M и D — некоторые замкнутые множества в пространстве векторов $p = \{t, x\}$, символом $\vartheta(x[\cdot]; M)$ обозначен момент времени, когда для некоторого движения $x[t]$ впервые выполняется условие $\{t, x[t]\} \in M$.

Теорема 1.1. Если $x_0 \in W(t_0, \vartheta)$, тогда экстремальная к системе множеств $W(t, \vartheta)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ смешанная стратегия первого игрока $U^{(e)} = U^{(e)}(t, x)$ для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U^{(e)}, V_T]$ обеспечивает выполнение соотношений

$$\vartheta(x[\cdot]; M) \leqslant \vartheta, \qquad p[t] \in D \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta(x[\cdot]; M) \tag{1.7}$$

Если $x_0 \notin W(t_0, \vartheta)$, тогда существует такое $\varepsilon > 0$ и такая смешанная стратегия второго игрока $V_* = V_*(t, x)$, что для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_T, V_*]$ будет выполняться условие

$$p[t] = \{t, x[t]\} \notin M^\varepsilon \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant \min\{\vartheta, \tau^\varepsilon(x[\cdot]; D)\} \tag{1.8}$$

Напомним, что символом M^ε обозначается замкнутая ε — окрестность множества M, $\tau^\varepsilon(x[\cdot]; D)$ — момент времени, когда впервые расстояние от точки $p[t] = \{t, x[t]\}$ до множества D равняется числу $\varepsilon > 0$.

Пусть $W_*(\tau, \vartheta)$ — множество точек w, удовлетворяющих следующему условию: какова бы ни была смешанная стратегия первого игрока $U = U(t, x)$, существует движение $x[t] = x[t; \tau, w, U, V_T]$, для которого выполяется соотношение

$$p[t] = \{t, x[t]\} \in D \quad \text{при} \quad \tau \leqslant t \leqslant \min\{\vartheta, \vartheta(x[\cdot]; M)\}$$

Теорема 1.2. Если $x_0 \in W_*(t_0, \vartheta)$, тогда экстремальная к системе множеств $W_*(t, \vartheta)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ смешанная стратегия второго игрока $V^{(e)} = V^{(e)}(t, x)$ обеспечивает для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_T, V^{(e)}]$ выполнение следующего условия:

$$p[t] = \{t, x[t]\} \in D \quad \text{при} \ t_0 \leqslant t \leqslant \min\{\vartheta, \vartheta(x[\cdot]; M)\} \tag{1.9}$$

Если $x_0 \notin W_*(t_0, \vartheta)$, тогда существует такое $\varepsilon > 0$, и такая смешанная стратегия первого игрока $U_* = U_*(t, x)$, что для любого движения

$x[t] = x[t;\ t_0,\ x_0,\ U_*,\ V_T]$ будут выполнены следующие соотношения:

$$\tau^\varepsilon(x[\cdot];\ D) \leqslant \vartheta,\ p[t] = \{t,\ x[t]\} \notin M^\varepsilon \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant \tau^\varepsilon\ (x[\cdot];\ D) \quad (1.10)$$

Примечание 1.1. Напомним, что теорема 1.1 и теорема 1.2 остаются справедливыми, если в определении множеств $W(t, \vartheta)$ и $W_*(t, \vartheta)$, а также в формулировках этих теорем поменять местами первого и второго игроков.

§ 2. Рассмотрим в этом параграфе дифференциальную игру наведения с фазовым ограничением, т. е. игровую задачу 1.1. Пусть $W^{(1)}(\tau, \vartheta)$ $(t_0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ — множество точек, удовлетворяющих следующему требованию: какова бы ни была смешанная стратегия второго игрока $V = V(t, x)$, существует движение $x[t] = x[t;\ \tau,\ w,\ U_T,\ V]$ такое, что выполняются условия

$$\vartheta(x[\cdot]) = \vartheta(x[\cdot];\ N) \leqslant \vartheta,\ \{t,\ x[t]\} \in G \quad \text{при } \tau \leqslant t \leqslant \vartheta(x[\cdot])$$

Будем предполагать, что существует, по крайней мере, одно значение параметра ϑ, при котором имеем место включение $x_0 \in W^{(1)}(t_0,\ \vartheta)$. В противном случае, как будет показано ниже, не существует стратегии первого игрока, гарантирующей завершение за конечное время рассматриваемой дифференциальной игры наведения с фазовым ограничением. Обозначим через ϑ° число, определяемое равенством

$$\vartheta^\circ = \inf\{\vartheta : x_0 \in W^{(1)}(t_0,\ \vartheta)\} \tag{2.1}$$

т. е. ϑ° — нижняя грань всех чисел ϑ, для которых выполнено условие $x_0 \in W^{(1)}(t_0, \vartheta)$. Покажем, что имеет место такое соотношение

$$x_0 \in W^{(1)}(t_0,\ \vartheta^\circ) \tag{2.2}$$

Нетрудно заметить, что справедливость включения (2.2) будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 2.1. Пусть последовательности чисел $\vartheta^{(k)}$ и точек w_k удовлетворяют условиям

$$\vartheta^{(k)} \geqslant \vartheta^*, \quad w_k \in W^{(1)}(\tau,\ \vartheta^{(k)}) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$
$$\lim_{k\to\infty} \vartheta^{(k)} = \vartheta^*, \quad \lim_{k\to\infty} w_k = w_*$$

Тогда справедливо включение

$$w_* \in W^{(1)}(\tau,\ \vartheta^*) \tag{2.3}$$

Доказательство. По определению множества $W^{(1)}(\tau, \vartheta^*)$ включение (2.3) должно означать следующее: какова бы ни была смешанная стратегия второго игрока $V = V(t, x)$, существует движение $x_*[t] = x[t;\ \tau,\ w_*,\ U_T,\ V]$ такое, что

$$\vartheta(x_*[\cdot]) \leqslant \vartheta^*, \quad \{t,\ x_*[t]\} \in G \quad \text{при } \tau \leqslant t \leqslant \vartheta(x_*[\cdot]) \tag{2.4}$$

Итак, пусть $V = V(t, x)$ — произвольная смешанная стратегия второго игрока. Поскольку $w_k \in W^{(1)}(\tau, \vartheta^{(k)})$, то существует движение $x_k[t] = x[t;\ \tau,\ w_k,\ U_T,\ V]$, удовлетворяющее условиям

$$\vartheta_k = \vartheta(x_k[\cdot]) \leqslant \vartheta^{(k)}, \quad p_k[t] = \{t,\ x_k[t]\} \in G \text{ при } \tau \leqslant t \leqslant \vartheta_k \tag{2.5}$$

Из последовательности чисел ϑ_k и из последовательности вектор-функций $p_k[t]$ можно выбрать сходящиеся подпоследовательности

$$\lim_{i\to\infty} \vartheta_{k_i} = \vartheta_* \leqslant \vartheta^*, \qquad \lim_{i\to\infty} (\max_{\tau\leqslant t\leqslant\vartheta_*} \| p_{k_i}[t] - p_*[t] \|) = 0 \tag{2.6}$$

$$p_{k_i}[t] = \{t, x_{k_i}[t]\}, \qquad p_*[t] = \{t, x_*[t]\}$$

Заметим теперь, что вектор-функция $x_*[t]$ является одним из движений $x[t; \tau, w_*, U_T, V]$ (см. в [1] стр. 1007 свойство полунепрерывности сверху относительно включения множества движений $x[t; \tau, w, U_T, V]$ по переменной w). В силу замкнутости множеств N и G из (2.5), (2.6) вытекает, что вектор-функция $p_*[t] = \{t, x_*[t]\}$ удовлетворяет фазовому ограничению $p_*[t] \in G$ при $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta_*$, причем выполняется неравенство $\vartheta(x_*[\cdot]) \leqslant \vartheta_* \leqslant \vartheta^*$, т. е. для движения $x_*[t] = x[t; \tau, w_*, U_T, V]$ выполняется условие (2.4). Таким образом, лемма 2.1 доказана.

Число ϑ° (2.1) будем в дальнейшем называть моментом позиционного поглощения множества N при фазовом ограничении $p \in G$. Выше показано, что момент поглощения ϑ° обладает следующим свойством: для любого $\vartheta < \vartheta^\circ$ имеет место соотношение $x_0 \notin W^{(1)}(t_0, \vartheta)$, а при $\vartheta = \vartheta^\circ$ выполняется включение (2.2). В силу теоремы 1.1, где следует положить $M = N$, $D = G$, из включения (2.2) вытекает, что экстремальная к системе множеств $W^{(1)}(t, \vartheta^\circ)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta^\circ)$ смешанная стратегия первого игрока $U^{(e)} = U^{(e)}(t, x)$ гарантирует приведение точки $p[t] = \{t, x[t]\}$ на N при выполнении фазового ограничения $p[t] \in G$ не позже, чем к моменту $t = \vartheta^\circ$. С другой стороны, при $\vartheta < \vartheta^\circ$ имеет место соотношение $x_0 \notin W^{(1)}(t_0, \vartheta)$, поэтому опять в силу теоремы 1.1 можно утверждать, что существует смешанная стратегия второго игрока $V_* = V_*(t, x)$, обеспечивающая выполнение условия (1.8). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. В игровой задаче наведения с фазовым ограничением, в которой плата γ задается равенством (1.3), существует цена игры, равная величине $\vartheta^\circ - t_0$, где ϑ° — момент поглощения, определяемый равенством (2.1). При этом экстремальная к системе множеств $W^{(1)}(t, \vartheta^\circ)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta^\circ)$ смешанная стратегия первого игрока гарантирует завершение игры с платой, удовлетворяющей неравенству $\gamma \leqslant \vartheta^\circ - t_0$, т. е. стратегия $U^{(e)}$ доставляет минимакс платы в рассматриваемой игре. Для любого числа $\vartheta < \vartheta^\circ$ можно указать такое $\varepsilon > 0$ и такую смешанную стратегию второго игрока $V_* = V_*(t, x; \vartheta, \varepsilon)$, что для любого движения $x[t; t_0, x_0, U_T, V_*]$ будет выполняться условие

$$\{t, x[t]\} \notin N^\varepsilon \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant \min\{\vartheta, \tau^\varepsilon(x[\cdot], G)\} \tag{2.7}$$

Таким образом, стратегия $V_* = V_*(t, x; \vartheta, \varepsilon)$ гарантирует завершение игры с платой, удовлетворяющей неравенству $\gamma \geqslant \vartheta - t_0$.

Заметим, что в качестве стратегии $V_* = V_*(t, x; \vartheta, \varepsilon)$ можно взять смешанную стратегию второго игрока, экстремальную к системе множеств $W_*^{(1)}(\tau, \vartheta; \varepsilon)$ $(t_0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$, где множества $W_*^{(1)}(\tau, \vartheta; \varepsilon)$ определяются следующим условием: точка w принадлежит множеству $W_*^{(1)}(\tau, \vartheta; \varepsilon)$ тогда и только тогда, если какова бы ни была смешанная стратегия первого игрока $U = U(t, x)$ можно указать движение $x[t] = x[t; \tau, w, U, V_T]$, для которого выполняется соотношение

$$\rho(\{t,\ x[t]\};\ N) \geqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad \tau \leqslant t \leqslant \min\{\vartheta,\ \tau^{\varepsilon}(x[\cdot];\ G)\}$$

Символом $\rho(p,\ N)$ здесь обозначается расстояние от точки p до множества N.

Выполнение условия (2.7) для любого движения

$$x[t] = x[t;\ t_0,\ x_0,\ U_T,\ V^{(e)}]$$

где $V^{(e)}$ — экстремальная к системе множеств $W_*^{(1)}(t,\ \vartheta;\ \varepsilon)$ смешанная стратегия второго игрока, будет вытекать из теоремы 1.2, где множества M и D следует определить соотношениями

$$M = \{p : \rho(p,\ G) \geqslant \varepsilon\}, \qquad D = \{p : \rho(p,\ N) \geqslant \varepsilon\}$$

§ 3. В этом параграфе рассматривается решение игровых задач 1.2 и 1.3, плата в которых задается равенствами (1.4), (1.5) соответственно. Введем некоторые обозначения. Пусть $H(c)$ и $K(c)$ — замкнутые множества в пространстве векторов $p = \{t,\ x\}$, заданные следующим образом:

$$H(c) = \{p : \varphi(t,\ x) \geqslant c\}, \qquad K(c) = \{p : \varphi(t,\ x) \leqslant c\} \tag{3.1}$$

Обратимся сначала к решению задачи 1.3. Введем в рассмотрение множества $W^{(3)}(\tau,\ T;\ c)$ $(t_0 \leqslant \tau \leqslant T)$, состоящие из всех точек w, удовлетворяющих следующему условию: какова бы ни была смешанная стратегия второго игрока $V = V(t,\ x)$, существует движение $x[t] = x[t;\ \tau,\ w,\ U_T,\ V]$, для которого выполняются соотношения

$$\vartheta(x[\cdot]) = \vartheta(x[\cdot];\ N)) \leqslant T, \quad \{t,\ x[t]\} \in K(c)$$
$$\text{при} \quad \tau \leqslant t \leqslant \vartheta(x[\cdot]) \tag{3.2}$$

Обозначим через c° нижнюю грань всех чисел, для которых выполняется включение

$$x_0 \in W^{(3)}(t_0,\ T;\ c) \tag{3.3}$$

Используя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 2.1, можно показать, что справедливо включение

$$x_0 \in W^{(3)}(t_0,\ T;\ c^{\circ}) \tag{3.4}$$

при этом, разумеется, следует предположить существование, по крайней мере, одного $c < \infty$, для которого имеет место условие (3.3). Используя теорему 1.1, теперь можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.1. Дифференциальная игра 1.3, плата в которой задается равенством (1.5), имеет цену, равную величине $c^{\circ} = \inf\{c : x_0 \in W^{(3)}(t_0,\ T;\ c)\}$. При этом экстремальная к системе множеств $W^{(3)}(t,\ T;\ c^{\circ})$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$ смешанная стратегия первого игрока $U^{(e)} = U^{(e)}(t,\ x)$ гарантирует завершение игры с платой, удовлетворяющей неравенству $\gamma \leqslant c^{\circ}$, т. е. стратегия $U^{(e)}$ является минимаксной. Для любого числа $c < c^{\circ}$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, и такую смешанную стратегию второго игрока $V_* = V_*(t,\ x;\ c,\ \varepsilon)$, что для любого движения $x[t] = x[t;\ t_0,\ x_0,$

U_T, V_*] будет выполняться условие

$$\rho(\{t, x[t]\}, N) \geqslant \varepsilon, \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant \min\{T, \vartheta(x[\cdot]; H(c))\} \tag{3.5}$$

где $\vartheta(x[\cdot]; H(c))$ — момент времени, когда точка $p[t] = \{t, x[t]\}$ впервые попадает на множество $H(c)$. Таким образом, стратегия V_* гарантирует завершение игры с платой, удовлетворяющей неравенству $\gamma \geqslant c$.

Доказательство. Поскольку справедливо включение (3.4), то из определения системы множеств, $W^{(3)}(t, T; c^\circ)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$ из теоремы 1.1, где следует положить

$$M = N, \qquad D = K(c^\circ)$$

вытекают следующие соотношения:

$$\vartheta(x[\cdot]) \leqslant T, \qquad \{t, x[t]\} \in K(c^\circ) \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta(x[\cdot])$$

которые имеют место для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U^{(e)}, V_T]$.

По определению платы игры γ (1.5) и из (3.1) вытекает, что экстремальная стратегия $U^{(e)}$ гарантирует завершение игры с платой, удовлетворяющей неравенству $\gamma \leqslant c^\circ$. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть $c < c^\circ$, тогда по определению числа c° должно выполняться следующее соотношение:

$$x_0 \notin W^{(3)}(t_0, T; c) \tag{3.6}$$

Предположим, что второе утверждение теоремы неверно. Пусть $V = V(t, x)$ — произвольная смешанная стратегия второго игрока, поскольку (3.5) неверно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует движение $x_\varepsilon[t] = x[t; t_0, x_0, U_T, V]$ и число $t^*(\varepsilon)$ такие, что выполняются условия

$$\begin{gathered} t^*(\varepsilon) \leqslant T, \qquad \{t^*(\varepsilon), x_\varepsilon[t_\varepsilon^*]\} \in N^\varepsilon \\ \varphi(t, x_\varepsilon[t]) \leqslant c \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t^*(\varepsilon) \end{gathered} \tag{3.7}$$

Используя свойство компактности в себе множества движений $x[t; t_0, x_0, U_T, V]$ (см. [1], стр. 1007), из (3.7) получим предельным переходом при $\varepsilon \to 0$, что существует движение $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_T, V]$, удовлетворяющее условиям (3.2) при $\tau = t_0$. Поскольку $V = V(t, x)$ здесь произвольная стратегия второго игрока, то для точки x_0 выполняется включение $x_0 \in W^{(3)}(t_0, T; c)$, что, однако, противоречит соотношению (3.6). Полученное противоречие доказывает справедливость второго утверждения теоремы. Теорема 3.1 доказана.

Заметим, что стратегию $V_* = V_*(t, x; c, \varepsilon)$ можно определить как экстремальную к системе множеств $W_*^{(3)}(t, T; c, \varepsilon)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$. При этом множества $W_*^{(3)}(\tau, T; c, \varepsilon)$ следует определить как совокупность точек w, удовлетворяющих следующему условию: какова бы ни была смешанная стратегия первого игрока $U = U(t, x)$, существует движение $x[t] = x[t; \tau, w, U, V_T]$, для которого выполняется условие

$$\rho(\{t, x[t]\}, N) \geqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad \tau \leqslant t \leqslant \min\{T, \vartheta(x[\cdot]; H(c))\}$$

Выполнение условия (3.5) для любого движения

$$x[t] = x[t; t_0, x_0, U_T, V^{(e)}]$$

где $V^{(e)}$ — экстремальная к системе множеств $W_*^{(3)}(t, T; c, \varepsilon)$ смешанная стратегия второго игрока будет вытекать из теоремы 1.2, где полагаем $M = H(c)$, $D = \{p\colon \rho(p, N) \geqslant \varepsilon\}$.

Обратимся теперь к рассмотрению задачи 1.2. Нетрудно заметить, что игровая задача 1.2 будет совпадать с дифференциальной игрой 1.3, если к множеству N, попадание на которое точки $p\,[t]$ определяет момент окончания игры 1.3, добавить гиперплоскость $t = T$. Тогда для всех движений $x\,[t]$ будет выполняться неравенство $\vartheta\,(x\,[\cdot]) \leqslant T$, и, следовательно, плата (1.4) будет совпадать с платой (1.5). Таким образом, дифференциальная игра 1.2 является частным случаем рассмотренной выше игровой задачи 1.3, поэтому подробное исследование ее проводить не будем, а сформулируем лишь окончательный результат.

Пусть $W_*^{(2)}\,(\tau,\ T;\ c)$ — совокупность точек w, удовлетворяющих условию: какова бы ни была смешанная стратегия второго игрока $V = V\,(t, x)$, существует движение $x\,[t] = x\,[t;\ \tau,\ w,\ U_T,\ V]$, для которого имеет место соотношение $\{t,\ x\,[t]\} \in K\,(c)$ при $\tau \leqslant t \leqslant \min\,\{T,\ \vartheta\,(x[\cdot])\}$.

Теорема 3.2. Дифференциальная игра 1.2, плата в которой задается равенством (1.4), имеет цену, равную величине

$$c_*{}^\circ = \inf\,\{c;\ x_0 \in W_*^{(2)}\,(t_0,\ T;\ c)\}$$

При этом экстремальная к системе множеств $W_*^{(2)}\,(t,\ T;\ c^\circ)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$ смешанная стратегия первого игрока $U^{(e)} = U^{(e)}\,(t,\ x)$ гарантирует завершение игры с платой, удовлетворяющей неравенству $\gamma \leqslant c_*{}^\circ$, т. е. стратегия $U^{(e)}$ является минимаксной. Для любого числа $c < c_*{}^\circ$ можно указать такое $\varepsilon > 0$ и такую смешанную стратегию второго игрока $V_* = V_*\,(t,\ x;\ c,\ \varepsilon)$, что для любого движения $x\,[t] = x\,[t;\ t_0,\ x_0,\ U_T,\ V_*]$ будут выполняться следующие соотношения

$$\vartheta\,(x\,[\cdot];\ H\,(c)) \leqslant T, \quad \rho\,(\{t,\ x\,[t]\},\ N) \geqslant \varepsilon \text{ при } \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\,(x\,[\cdot];\ H\,(c))$$

Таким образом, стратегия V_* гарантирует завершение игры с платой, удовлетворяющей неравенству $\gamma \geqslant c$.

Заметим, что и здесь стратегию V_* можно определить как экстремальную к системе множеств $W^{(2)}\,(t,\ T;\ c,\ \varepsilon)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$. При этом множества $W^{(2)}(\tau,\ T;\ c,\ \varepsilon)$ следует определить как совокупность точек w, удовлетворяющих такому требованию: какова бы ни была смешанная стратегия первого игрока $U = U\,(t,\ x)$, существует движение $x\,[t] = x\,[t;\ \tau,\ w,\ U,\ V_T]$, для которого выполнены условия

$$\vartheta\,(x\,[\cdot];\ H\,(c)) \leqslant T, \quad \rho\,(\{t,\ x\,[t]\},\ N) \geqslant \varepsilon \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\,(x\,[\cdot];\ H\,(c))$$

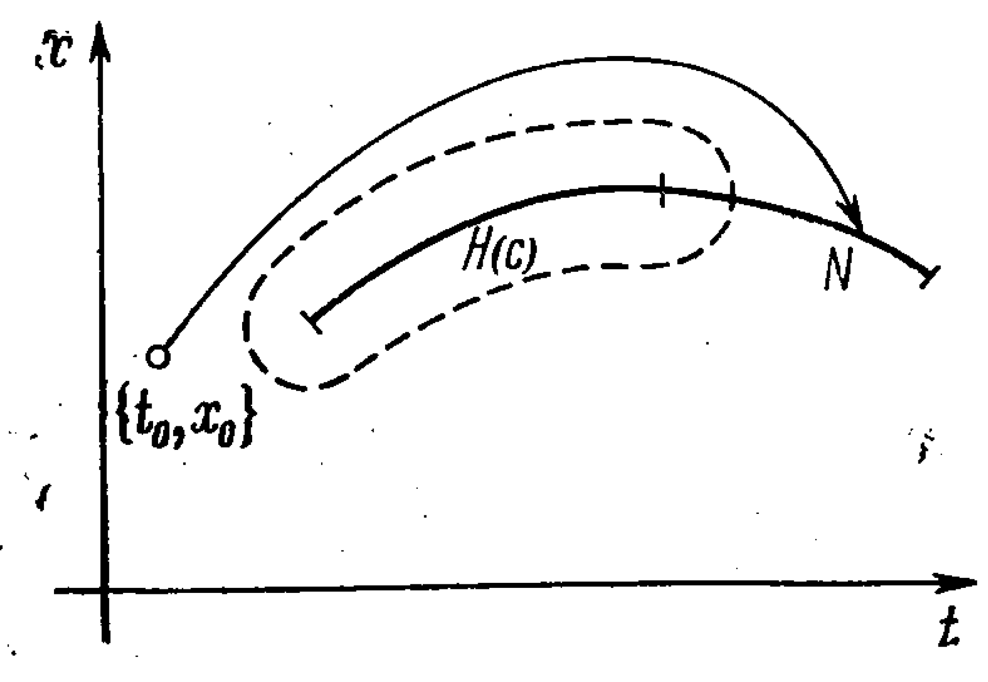
§ 4. В заключение данной статьи рассмотрим дифференциальную игру 1.4. Известным способом эту дифференциальную игру можно заменить эквивалентной ей дифференциальной игрой вида 1.4, плата в которой не будет содержать второго слагаемого. Для этого достаточно к фазовым координатам системы (1.1) добавить новую компоненту ξ, изменение которой задать уравнением

$$d\xi\,/\,dt = \psi\,(t,\ x), \qquad \xi\,[t_0] = 0 \tag{4.1}$$

В дифференциальной игре, эквивалентной исходной игровой задаче 1.4, плату следует определить равенством

$$\gamma = \varphi^* (\vartheta, x [\vartheta], \xi [\vartheta]) \tag{4.2}$$

где $\varphi^* (t, x, \xi) = \varphi (t, x) + \xi$, $\vartheta = \vartheta (x [\cdot])$ — по-прежнему момент попадания точки $p [t] = \{t, x [t]\}$ на множество N. В дальнейшем для упрощения выкладок и обозначений будем предполагать, что необходимые преобразования уже сделаны и плата рассматриваемой игры имеет вид



$$\gamma = \varphi (\vartheta, x [\vartheta]) \quad (\vartheta = \vartheta (x [\cdot]) \leqslant T) \tag{4.3}$$

Введем некоторые обозначения, используемые ниже. Пусть $H (c)$ и $K (c)$ — замкнутые множества в пространстве векторов p, которые задаются соотношениями

$$H (c) = \{p : p \in N, \quad \varphi (t, x) \geqslant c\}$$
$$K (c) = \{p : p \in N, \quad \varphi (t, x) \leqslant c\} \tag{4.4}$$

Через $C^\circ (\beta)$ обозначим множество всех чисел c, удовлетворяющих следующему условию.

Условие 4.1. Какова бы ни была смешанная стратегия второго игрока $V = V (t, x)$, существует движение $x [t] = x [t; t_0, x_0, U_T, V]$, для которого выполняются соотношения

$$\vartheta (x [\cdot]) \leqslant T, \ \rho (\{t, x [t]\}, H (c)) \geqslant \beta > 0 \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta (x [\cdot]) \tag{4.5}$$

На фигуре изображены множества N, $H (c)$ и движение $x [t]$, удовлетворяющее условию (4.5). Штриховой линией отмечена граница множества $H^\beta (c)$.

Обозначим через c° число, определяемое равенством

$$c^\circ = \inf c \quad \text{при } c \in \bigcup C^\circ (\beta) \quad (\beta > 0) \tag{4.6}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. Если $c > c^\circ$, то существует такое $\beta > 0$ и такая смешанная стратегия первого игрока $U_0 = U_0 (t, x; c, \beta)$, что для любого движения $x [t] = x [t; t_0, x_0, U_0, V_T]$ будут выполняться условия

$$\vartheta (x [\cdot]) \leqslant T, \quad \rho (\{t, x [t]\}, H (c)) \geqslant \beta \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta (x [\cdot]) \tag{4.7}$$

т. е. стратегия U_0 гарантирует завершение игры с платой, удовлетворяющей неравенству $\gamma < c$. Если же $c < c^\circ$, то для любого сколь угодно малого $\beta > 0$ можно указать смешанную стратегию второго игрока $V_* = V_* (t, x; c, \beta)$, обеспечивающую выполнение, по крайней мере, одного из следующих двух соотношений:

$$\rho (\{t, x [t]\}, N) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, T] \tag{4.8}$$
$$\min \rho (\{t, x[t]\}, H (c)) \leqslant \beta \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta (x [\cdot])$$

для любого движения $x [t] = x [t; t_0, x_0, U_T, V_*]$.

Доказательство. Пусть $c > c^\circ$, по определению числа c° это неравенство означает существование такого $\beta > 0$ и такого c^* из множества $C^\circ(\beta)$, что будет выполняться неравенство $c > c^*$. Введем в рассмотрение систему множеств $W^{(4)}(\tau, T; c^*, \beta)$ $(t_0 \leqslant \tau \leqslant T)$. Множество $W^{(4)}(\tau, T; c^*, \beta)$ определим как совокупность всех точек w, для которых имеет место условие: какова бы ни была смешанная стратегия второго игрока $V = V(t, x)$, существует движение $x[t] = x[t; \tau, w, U_T, V]$, удовлетворяющее соотношениям

$$\vartheta(x[\cdot]) \leqslant T, \qquad \rho(\{t, x[t]\}, H(c^*)) \geqslant \beta \quad \text{при } \tau \leqslant t \leqslant \vartheta(x[\cdot])$$

Поскольку число c^* принадлежит множеству $C^\circ(\beta)$, то из определения множеств $C^\circ(\beta)$ и $W^{(4)}(\tau, T; c^*, \beta)$ вытекает справедливость включения

$$x_0 \in W^{(4)}(t_0, T; c^*, \beta) \tag{4.9}$$

Определим теперь стратегию $U_0 = U_0(t, x; c, \beta)$ как экстремальную к системе множеств $W^{(4)}(t, T; c^*, \beta)$, тогда выполнение соотношений (4.7) будет вытекать из теоремы 1.1, где полагаем $M = N$, $D = \{p: \rho(p, H(c^*)) \geqslant \beta\}$, а также из соотношения (4.9) и неравенства $c > c^*$. Непосредственно из определения платы (4.3) и множества $H(c)$ (4.4) получим справедливости неравенства $\gamma < c$. Первое утверждение теоремы 4.1 доказано.

Пусть теперь $c < c^\circ$, тогда, каково бы ни было число $\beta > 0$ число c не содержится во множестве $C^\circ(\beta)$. Это означает по определению множества $C^\circ(\beta)$ существование стратегии V_*, обеспечивающей выполнение одного из соотношений (4.8). Таким образом, второе утверждение теоремы 4.1 также справедливо.

Итак, в теореме 4.1 дана оценка значения платы игры, которое может гарантировать себе первый игрок, выбирая смешанные стратегии $U_0 = U_0(t, x; c, \beta)$, экстремальные к системе множеств $W^{(4)}(t, T; c, \beta)$. Получим теперь аналогичную оценку гарантируемой платы для второго игрока.

Обозначим через $C_0(\beta)$ множество чисел c, для которых выполняется такое условие.

Условие 4.2. Какова бы ни была смешанная стратегия первого игрока $U = U(t, x)$, существует движение $x[t] = x[t; t_0, x_0, U, V_T]$, удовлетворяющее следующему соотношению:

$$\rho(\{t, x[t]\}, K(c)) \geqslant \beta > 0 \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant \min\{T, \vartheta(x[\cdot])\}$$

Пусть c_0 — число, заданное равенством

$$c_0 = \sup c \quad \text{при} \quad c \in \bigcup C_0(\beta) \ (\beta > 0) \tag{4.10}$$

Теорема 4.2. Если $c < c_0$, тогда существует такое $\beta > 0$ и такая смешанная стратегия второго игрока $V_0 = V_0(t, x; c, \beta)$, что для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_T, V_0]$ будет выполняться следующее соотношение:

$$\rho(\{t, x[t]\}, K(c)) \geqslant \beta \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant \min\{T, \vartheta(x[\cdot])\} \tag{4.11}$$

т. е. стратегия V_0 гарантирует второму игроку завершение игры с платой, удовлетворяющей неравенству $\gamma > c$. Если же $c > c_0$, тогда, каково бы ни было положительное число $\beta > 0$, можно указать смешанную стратегию первого игрока $U_* = U_*(t, x; c, \beta)$, обеспечивающую выполнение следующего условия:

$$\min \rho(\{t, x[t]\}, K(c)) \leqslant \beta \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant \min\{T, \vartheta(x[\cdot])\} \tag{4.12}$$

для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_*, V_T]$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1. Отличие будет состоять лишь в том, что вместо системы множеств $W^{(4)}(\tau, T; c, \beta)$ $(t_0 \leqslant \tau \leqslant T)$ здесь следует ввести в рассмотрение множества $W_*^{(4)}(\tau, T; c, \beta)$, которые определяются как совокупности всех точек w, удовлетворяющих следующему требованию: какова бы ни была смешанная стратегия первого игрока $U = U(t, x)$, существует движение $x[t] = x[t; \tau, w, U, V_T]$, для которого выполняется условие

$$\rho(\{t, x[t]\}, K(c)) \geqslant \beta \quad \text{при} \quad \tau \leqslant t \leqslant \min\{T, \vartheta(x[\cdot])\}$$

Так как $c < c_0$, то существует такое $\beta > 0$, при котором имеет место включение

$$x_0 \in W_*^{(4)}(t_0, T; c, \beta) \tag{4.13}$$

Полагая, что $V_0 = V_0(t, x; c, \beta)$ — экстремальная к системе множеств $W_*^{(4)}(t, T; c, \beta)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$ стратегия второго игрока, справедливость соотношения (4.11) получим в силу условия (4.13) из теоремы 1.2, где полагаем $M = N$, $D = \{p: \rho(p, K(c)) \geqslant \beta\}$.

При любом $\beta > 0$ число c не принадлежит множеству $C_0(\beta)$, если $c > c_0$, поэтому второе утверждение теоремы 4.2 будет вытекать непосредственно из определения множеств $C_0(\beta)$.

Таким образом, если числа c^0 и c_0 определены соотношениями (4.6), (4.10), тогда первый игрок может гарантировать себе завершение игры с платой, удовлетворяющей неравенству $\gamma \leqslant c^0 + \varepsilon$, а второй игрок может обеспечить выполнение неравенства $\gamma \geqslant c_0 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно мало. Нетрудно заметить, что числа c^0 и c_0 связаны неравенством $c_0 \leqslant c^0$. При некоторых дополнительных условиях можно показать, что числа c_0 и c^0 совпадают. В частности, как известно из § 2, дифференциальная игра наведения имеет цену, кроме этого, ниже показано, что эту игру можно свести к дифференциальной игре, плата в которой задается равенством (4.3). Поэтому представляет интерес выявление тех дополнительных условий, которые выполняются для этой задачи и обеспечивают совпадение чисел c_0 и c^0. Ниже сформулировано такое условие, затем для дифференциальной игры наведения проверено его выполнение.

Условие 4.3. Для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_T, V_T]$ при выполнении соотношения $\{t_*, x[t_*]\} \in K(c)$, где $t_* \leqslant T$, должно иметь место условие

$$\{\vartheta(x[\cdot]), x[\vartheta(x[\cdot])]\} \in K(c) \tag{4.14}$$

Кроме того, для любого $\alpha > 0$ можно указать такое $\beta > 0$, что при условии

$$\{\vartheta(x[\cdot]), x[\vartheta(x[\cdot])]\} \in K(c), \quad \vartheta(x[\cdot]) \leqslant T \tag{4.15}$$

будет иметь место неравенство

$$\rho(\{t, x[t]\}, H(c + \alpha)) \geqslant \beta \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta(x[\cdot]) \tag{4.16}$$

для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_T, V_T]$, удовлетворяющего соотношению (4.15).

Теорема 4.3. Если выполняется условие 4.3, то имеет место равенство $c_0 = c^\circ$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть числа c и α удовлетворяют неравенствам $c_0 < c < c + \alpha < c^\circ$. В силу второго утверждения теоремы 4.2 при любом сколь угодно малом $\beta > 0$ имеет место соотношение

$$\rho(\{t_*, x[t_*]\}, K(c)) \leqslant \beta \quad \text{при } t_0 \leqslant t_* \leqslant \min\{T, \vartheta(x[\cdot])\}$$

для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_*, V]$, где $V = V(t, x)$ — некоторая смешанная стратегия второго игрока. Выбирая из движений $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_*, V]$, отвечающих различным значениям параметра $\beta > 0$, некоторую сходящуюся при $\beta \to 0$ последовательность, предел которой обозначим через $x^*[t]$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$, получим, что $\{t^*, x^*[t^*]\} \in K(c)$, где t^* — некоторое число из промежутка $[t_0, T]$. Заметим, что $x^*[t]$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$ совпадает с одним из движений $x[t; t_0, x_0, U_T, V]$ и в силу условия (4.14) справедливо включение $\{\vartheta(x^*[\cdot]), x^*[\vartheta(x^*[\cdot])]\} \in K(c)$, из которого в силу (4.15), (4.16) вытекает такое соотношение

$$\rho(\{t, x^*[t]\}, H(c+\alpha)) \geqslant \beta > 0 \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta(x^*[\cdot]) \leqslant T$$

Поскольку $V = V(t, x)$ — произвольная смешанная стратегия второго игрока, а число $\beta > 0$ здесь не зависит от V, то можно утверждать, что число $c + \alpha$ принадлежит множеству $C^\circ(\beta)$, следовательно, $c + \alpha \geqslant c^\circ$, что, однако, противоречит предположению $c + \alpha < c^\circ$. Это противоречие доказывает справедливость теоремы 4.3.

Полагая $\varphi \equiv 0$, $\Psi \equiv 1$ в (1.6), получим дифференциальную игру наведения, которая отличается от дифференциальной игры, рассмотренной в § 2, тем, что здесь отсутствует фазовое ограничение $\{t, x[t]\} \in G$. Однако это отличие для дальнейших рассуждений является несущественным. (Игровую задачу 1.4 можно было бы сформулировать так, чтобы потребовать от первого игрока выполнения ограничения $p[t] \in G$, тогда при $\varphi \equiv 0$, $\Psi \equiv 1$ получили полное совпадение задач 1.1 и 1.4. При этом введение дополнительного ограничения $p[t] \in G$ не вносит существенных изменений в доказательство утверждений данного параграфа.) Покажем, что при $\varphi \equiv 0$, $\Psi \equiv 1$, т. е. для задачи наведения, выполняется условие 4.3.

Действительно, множества $H(c)$ и $K(c)$, которые следует строить в $n+2$-мерном пространстве векторов $\{t, x, \xi\}$, определяются условиями

$$H(c) = \{p = \{t, x\} \in N,\ \xi = t - t_0 \geqslant c\}, \quad K(c) = \{p = \{t, x\} \in N,\ \xi = t - t_0 \leqslant c\}$$

Нетрудно видеть, что из условия $\{t_*, x[t_*], \xi[t_*]\} \in K(c)$ вытекает справедливость включения $\{\vartheta(x[\cdot]), x[\vartheta(x[\cdot])], \xi[\vartheta(x[\cdot])]\} \in K(c)$, поскольку $\vartheta(x[\cdot]) \leqslant t_*$. Аналогично легко проверяется справедливость неравенства (4.16) при выполнении условия (4.15). Таким образом, условие 4.3 в данном случае выполняется.

Из теоремы 4.3 вытекает, что дифференциальная игра 1.4 имеет цену. Этот факт, установленный ранее в § 2, получен как следствие материала данного параграфа. Заметим, что условие 4.3 имеет место для более общего случая, а именно для дифференциальной игры 1,4, в которой $\varphi(t, x) \equiv 0$, $\Psi(t, x) > 0$ при всех $\{t, x\}$. Кроме этого, условие 4.3 выполняется также для дифференциальной игры 1.4, когда момент окончания ее зафиксирован, т. е. в соотношении (1.6), определяющем плату $\vartheta = T = \text{const}$. Таким образом, дифференциальная игра 1.4 с фиксированными моментом окончания также имеет цену. Используя материал данного параграфа нетрудно показать, что оптимальными стратегиями в этой игре будут стратегии игроков, экстремальные к соответствующим образом определенным множествам поглощения $W^{(4)}(t, T)$ и $W_*^{(4)}(t, T)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$.

В заключение данного параграфа приведем один пример, в котором числа c° (4.6) и c_0 (4.10) не совпадают.

Пусть движение системы описывается уравнениями

$$dx_1/dt = b_1(t)v, \qquad x_1[0] = 0$$
$$dx_2/dt = b_2(t)u, \qquad x_2[0] = 0$$

где $b_1(t)$ и $b_2(t)$ — некоторые непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$b_1(t) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < 1, \qquad b_1(t) = 0 \quad \text{при } t \geqslant 1$$
$$b_2(t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad b_2(t) > 0 \quad \text{при} \quad t > 1$$

Управления u и v стеснены ограничениями

$$0 \leqslant u \leqslant 1, \quad -1 \leqslant v \leqslant 0$$

Множество N состоит из двух точек

$$A_1 = \{t = 1, \ x_1 = 0, \ x_2 = 0\}, \qquad A_2 = \{t = 2, \ x_1 = 0, \ x_2 = 0\}$$

двух прямых

$$L_1 = \{t = 3, \ x_2 = 0\}, \qquad L_2 = \{t = 4, \ x_2 = 0\}$$

и плоскости

$$\Gamma = \{p = \{t, x_1, x_2\} : t = 5\}$$

Функция $\varphi(t, x_1, x_2)$ на множестве N определена следующим образом: в точке A_1 и на прямой L_2 полагаем $\varphi(t, x_1, x_2) = 0$, в точке A_2, на прямой L_1 и на плоскости Γ полагаем $\varphi(t, x_1, x_2) = 1$.

Непосредственно из определения чисел c° (4.6) и c_0 (4.10) вытекает, что в данном примере $c^\circ = 1$, $c_0 = 0$.

Поступила 17 VIII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
2. Понтрягин Л. С. Линейная дифференциальная игра убегания. Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 2.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. О структуре дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 3.
4. Varaiya P., Lin J. Existence of saddle points in Differential games. SIAM J. Control, 1969, vol. 7, No. 1.
5. Friedman A. Existence of Value and of Saddle Points for Differential Games of Survival. J. Differential Equations, 1970, vol. 7, No. 1.