

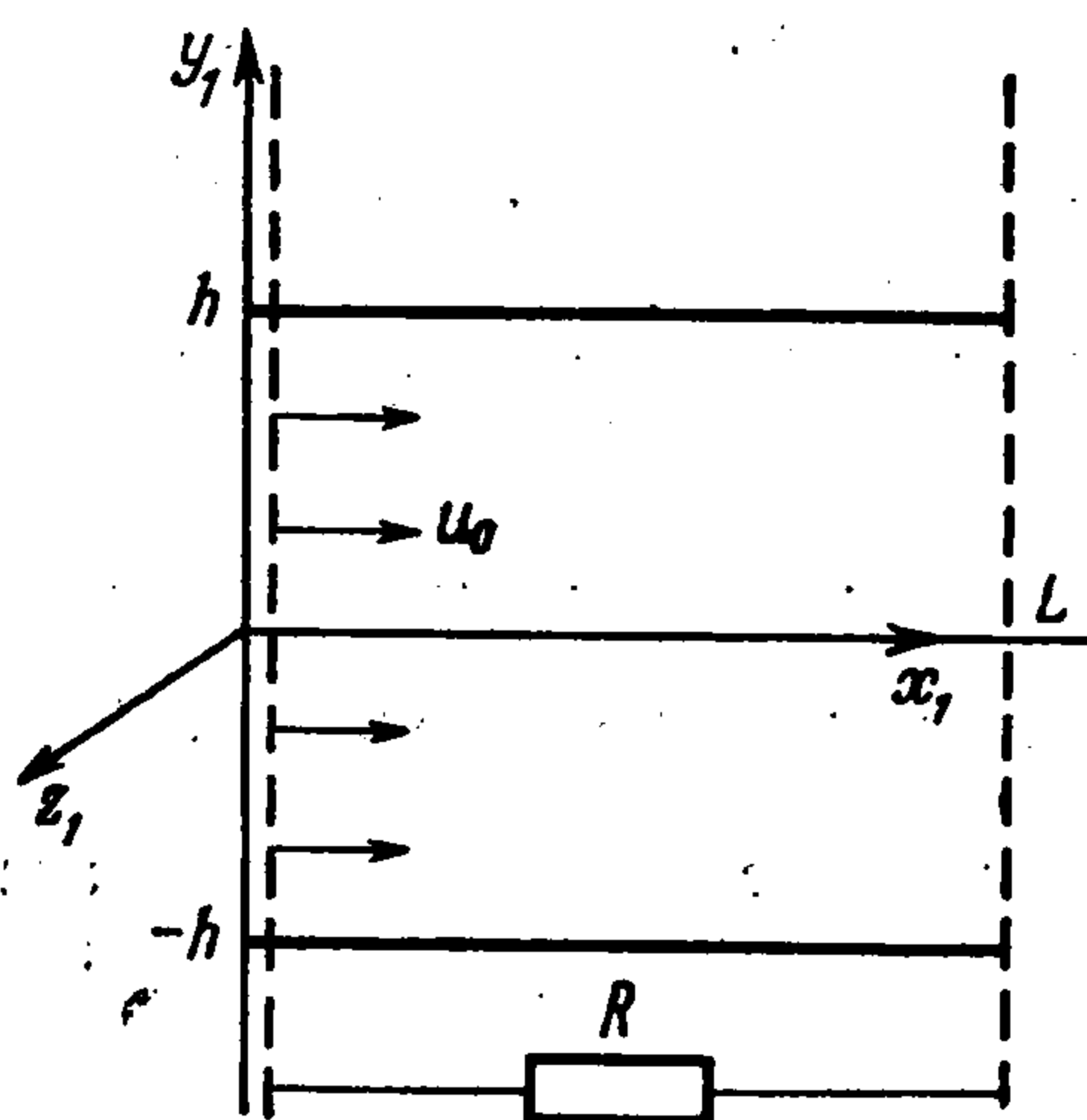
ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ И КРУГЛОМ КАНАЛАХ С НУЛЕВОЙ ПОДВИЖНОСТЬЮ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

И. П. Семенова, А. Е. Якубенко

(Москва)

Находится распределение электрического потенциала и электрического поля в плоском и круглом каналах постоянного сечения с бесконечными электродами на торцах при течении в них идеальной несжимаемой жидкости, содержащей объемный заряд. В предположении нулевой подвижности заряженных частиц проведено исследование влияния геометрических размеров канала на распределение электрических полей и установлены пределы применимости одномерной теории. Полученные решения соответствуют нулевому приближению при разложении в ряд по параметру взаимодействия решения о течении идеального совершенного газа в канале постоянного сечения. Проведен учет влияния электрогидродинамических эффектов на гидродинамическое течение в первом приближении.

Рассмотрим стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости в плоском канале постоянного сечения, на торцах которого расположены



Фиг. 1

бесконечно протяженные электроды (фиг. 1).

Предположим, что вектор скорости имеет только составляющую $u = u_0 = \text{const}$ вдоль оси x_1 . При этом уравнение неразрывности будет удовлетворяться тождественно, а уравнения движения будут служить для определения давления. Рассмотрим течение жидкости с нулевой подвижностью заряженных частиц ($b = 0$). При этих предположениях электрический ток, определенный законом Ома $\mathbf{j} = q\mathbf{u}$, будет течь только вдоль оси x_1 . В проекции на ось x_1 имеем

$$j_x = qu_0 \quad (1)$$

Здесь q — объемный заряд жидкости. Если предположить, что все величины от координаты z_1 не зависят, то из уравнения неразрывности для электрического тока получим $q = q(y_1)$. При этом вид функции $q(y_1)$ определяется граничными условиями на входе в канал. В дальнейшем будем считать $q = q_0 = \text{const}$. Величину q_0 можно связать с величиной полного тока I при помощи уравнения (1) соотношением $q_0 = I / 2hu_0$. Здесь $2h$ — высота канала. Длину канала в дальнейшем будем обозначать буквой L .

Для определения электрического поля и электрического потенциала вне и внутри канала воспользуемся уравнениями электрогидродинамики [1]

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_i = I / 2hu_0\varepsilon_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E}_e = 0, \quad \mathbf{E}_{e,i} = -\nabla\varphi_{e,i} \quad (2)$$

Здесь ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, буквами e и i обозначены величины вне и внутри канала соответственно. Кроме того, будем в дальнейшем предполагать, что электрическое поле \mathbf{E} имеет составляющие только вдоль осей x_1 и y_1 . Исключая электрическое поле из системы (2), получим

$$\Delta\varphi_i = -I / 2hu_0\varepsilon_0, \quad \Delta\varphi_e = 0 \quad (3)$$

Граничные условия для системы (3) сформулируем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_e(0, y_1) = \varphi_i(0, y_1) = 0, \quad \varphi_e(L, y_1) = \varphi_i(L, y_1) = \varphi_1 \quad (-\infty < y_1 < \infty) \\ \varphi_e(x_1, \pm h) = \varphi_i(x_1, \pm h), \quad \frac{\partial\varphi_e(x_1, \pm h)}{\partial y_1} = \frac{\partial\varphi_i(x_1, \pm h)}{\partial y_1} \quad (0 < x_1 < L) \quad (4) \\ \varphi_e = \varphi_1 x_1 / L \quad \text{при } y_1 \rightarrow \pm \infty \end{aligned}$$

Здесь φ_1 — разность потенциалов на электродах.

При написании граничных условий (4) предполагалось, что нормальная составляющая электрического поля непрерывна на непроводящих стенках $y_1 = \pm h$. Такое предположение означает отсутствие поверхностных зарядов на этих стенках.

Перейдем в уравнениях (3) и граничных условиях (4) к безразмерным переменным по формулам

$$x = \frac{x_1}{L}, \quad y = \frac{y_1}{L}, \quad \Phi_e = \frac{\varphi_e}{\varphi_1}, \quad \Phi_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \quad e = \frac{EL}{\varphi_1}, \quad \xi = \frac{h}{L}, \quad Q = \frac{IL^2}{2hu_0\varphi_1\varepsilon_0}$$

В новых переменных будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_i = -Q, \quad \Delta\Phi_e = 0 \quad (5) \\ \Phi_e(0, y) = \Phi_i(0, y) = 0, \quad \Phi_e(1, y) = \Phi_i(1, y) = 1 \quad (-\infty < y < \infty) \\ \Phi_e(x, \pm\xi) = \Phi_i(x, \pm\xi), \quad \frac{\partial\Phi_e(x, \pm\xi)}{\partial y} = \frac{\partial\Phi_i(x, \pm\xi)}{\partial y} \quad (0 < x < 1) \\ \Phi_e = x \quad \text{при } y \rightarrow \pm \infty \end{aligned}$$

Используя симметрию задачи (5) относительно оси канала, будем искать решение задачи в виде рядов Фурье только для $y > 0$

$$\Phi_i = x + 0.5Q(x - x^2) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch} \lambda_n y \sin \lambda_n x \quad (6)$$

$$\Phi_e = x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-\lambda_n y) \sin \lambda_n x$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим

$$A_n = -\frac{4Q}{\lambda_n^3} \exp(-\lambda_n \xi), \quad B_n = \frac{4Q}{\lambda_n^3} \operatorname{sh} \lambda_n \xi, \quad \lambda_n = (2n - 1)\pi \quad (7)$$

Формулы (6) и (7) дают полное решение задачи (5). Распределение давления в канале может быть при этом найдено при помощи интеграла Бернулли [2]

$$\frac{p_0 - p(x, y)}{\rho_0 u_0^2} = S \Phi_i(x, y), \quad S = \frac{I \Phi_1}{2h \rho_0 u_0^3} \quad (8)$$

Полученное решение позволяет найти выражение для среднего по сечению канала продольного электрического поля $\langle e_x \rangle$, значение поперечного поля e_{yw} на стенке канала $y = \xi$ и значение среднего по сечению электрического потенциала $\langle \Phi_i \rangle$

$$\begin{aligned} \langle e_x \rangle &= -1 + 0.5Q(2x - 1) + \frac{2Q}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-2\lambda_n \xi)}{\lambda_n^3} \cos \lambda_n x \\ e_{yw} &= 2Q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-2\lambda_n \xi)}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n x \\ \langle \Phi_i \rangle &= x + 0.5Q(x - x^2) - \frac{2Q}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-2\lambda_n \xi)}{\lambda_n^4} \sin \lambda_n x \end{aligned} \quad (9)$$

Решение аналогичной задачи для канала круглого сечения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_e &= x + 4Q\xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_1(\lambda_n \xi) K_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n x, \quad Q = \frac{IL^2}{\pi R_0^2 u_0 \Phi_1 \epsilon_0} \\ \Phi_i &= x + 0.5Q(x - x^2) - 4Q\xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0(\lambda_n r) K_1(\lambda_n \xi)}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n x \\ \lambda_n &= (2n - 1)\pi, \quad r = r_1 / R_0, \quad \xi = R_0 / L \end{aligned}$$

Здесь I_0, K_0, I_1, K_1 — функции Бесселя чисто мнимого аргумента, r_1 — полярная координата, R_0 — радиус канала. Входящий в решение параметр Q определен в данном случае по полному току I , текущему в канале.

Кроме того, выпишем еще формулы, аналогичные формулам (9)

$$\begin{aligned} \langle e_x \rangle &= -1 + 0.5Q(2x - 1) + 8Q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos \lambda_n x}{\lambda_n^2} \\ e_{rw} &= 4Q\xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin \lambda_n x}{\lambda_n}, \quad a_n = I_1(\lambda_n \xi) K_1(\lambda_n \xi) \\ \langle \Phi_i \rangle &= x + 0.5Q(x - x^2) - 8Q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin \lambda_n x}{\lambda_n^3} \end{aligned}$$

Выписанные решения дают возможность исследовать влияние геометрических размеров канала (параметра ξ) на пределы применимости одномерной теории для расчета электрогидродинамических течений в каналах. Рассмотрим случай, когда $\langle e_x \rangle = 0$ при $x = 1$ для плоского канала (отметим, что аналогичное исследование для течений в круглом канале имеет только количественное отличие).

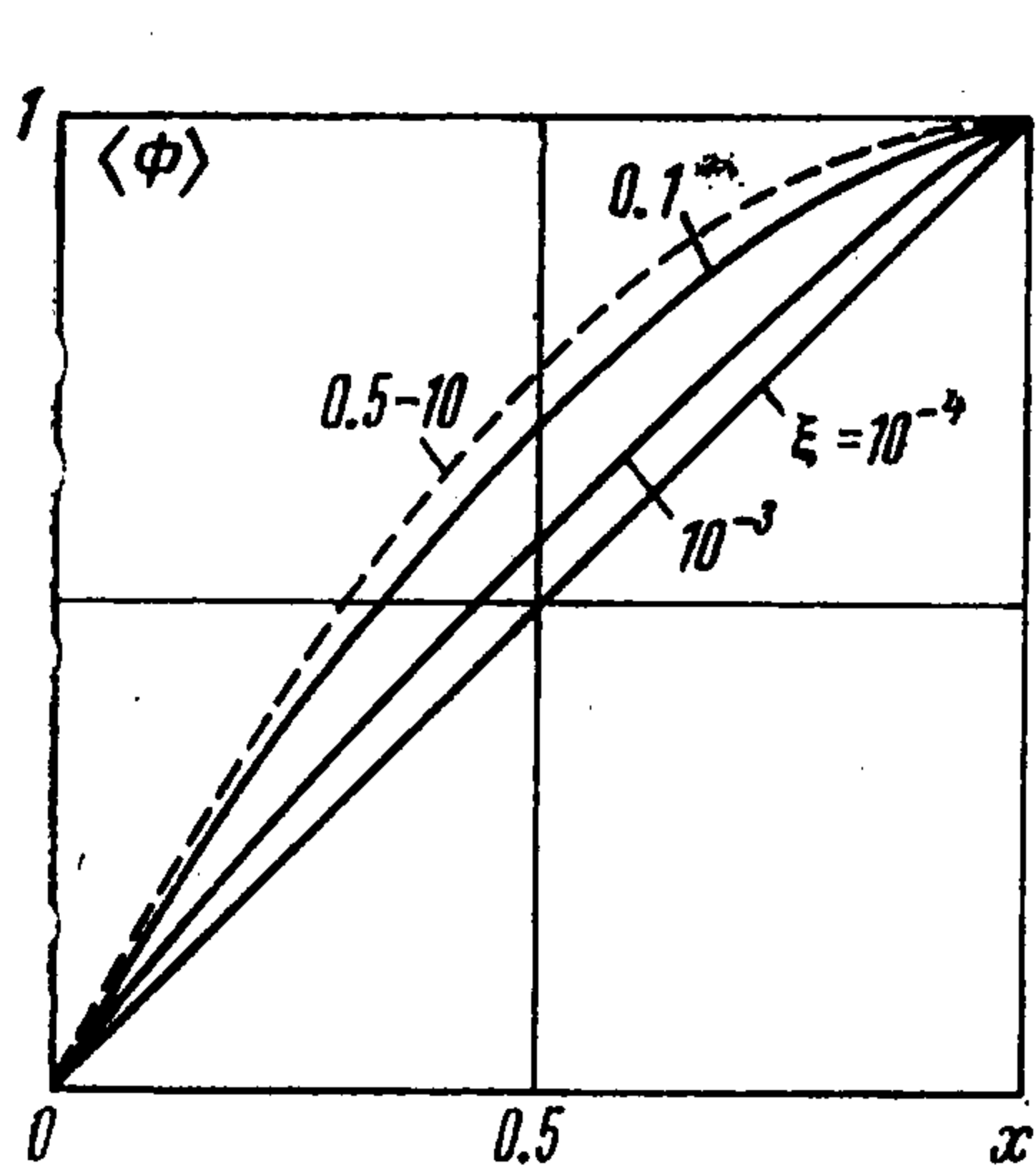
Из условия $\langle e_x \rangle = 0$ при $x = 1$ получим

$$Q = 2 \left[1 - \frac{4}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-2\lambda_n \xi)}{\lambda_n^3} \right]^{-1} \quad (10)$$

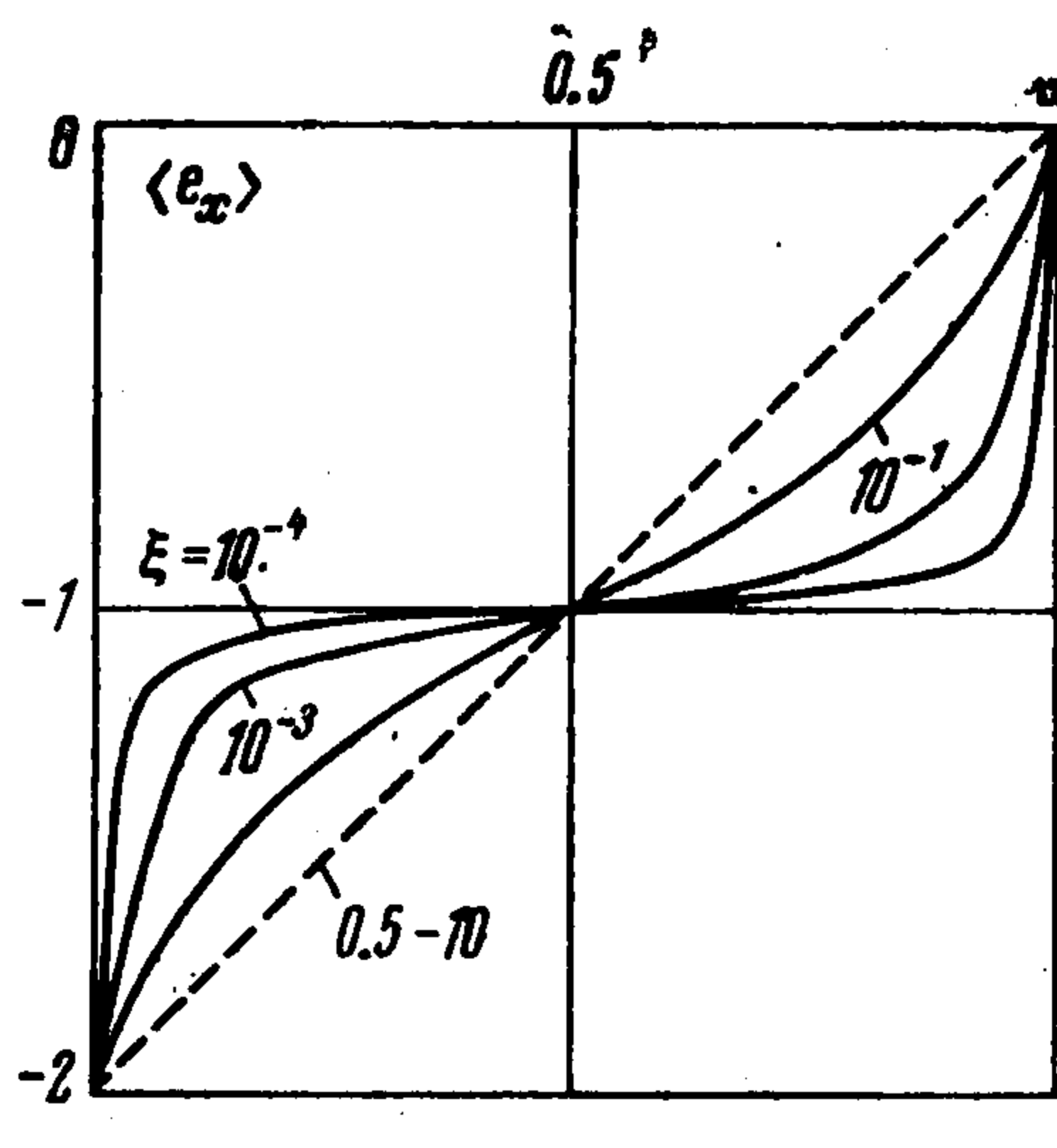
При $\xi \rightarrow \infty$ величина $Q = 2$, при этом $\langle e_x \rangle = 2(x - 1)$, $\langle \Phi_i \rangle = 2x - x^2$, т. е. в коротких широких каналах решение ведет себя как известное одномерное решение [2, 3]. Величина $e_{yw}(x)$ в этом случае конечна по величине на непроводящих стенках канала. Для $x = 0.5$ и $\xi \rightarrow \infty$ имеем $e_{yw} = -4G/\pi^2 = 0.37$. Здесь G — постоянная Каталана ($G = 0.915\dots$). Однако влияние поперечного электрического поля на течение мало и течение близко к одномерному.

На фиг. 2 и 3 можно видеть, что $\xi > 0.5$ решения для $\langle \Phi_i \rangle$ и $\langle e_x \rangle$ мало отличаются от одномерного решения (пунктирная кривая).

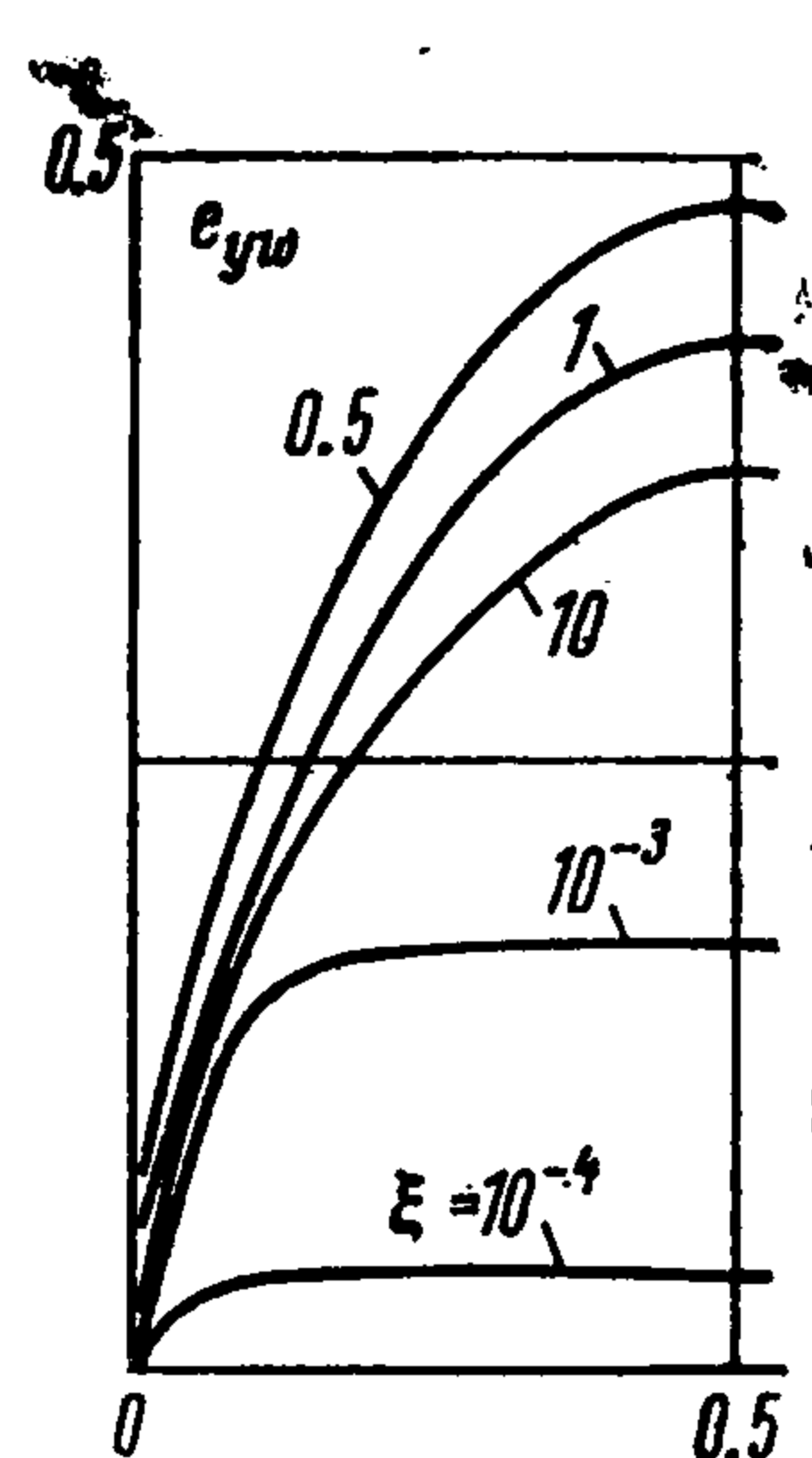
В длинных узких каналах ($\xi \rightarrow 0$, $Q \rightarrow \infty$) в режиме $\langle e_x \rangle = 0$ при $x = 1$ величина $e_{yw} \rightarrow 0$, а среднее поле $\langle e_x \rangle$ близко к -1 по всей длине канала, за исключением узких слоев вблизи электродов фиг. 2 и 3.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Кривые распределения e_{yw} по длине канала на фиг. 4 показывают, что в случае нулевой подвижности предположение о постоянстве поперечной составляющей электрического поля на непроводящих стенках канала, которое делается иногда при расчетах по усовершенствованной одномерной теории [4-7] справедливо для узких каналов (малые значения параметра ξ). Хотя при малых ξ поля e_{yw} невелики, фиг. 2 и 3 указывают на существенное влияние их на течение и подтверждают вывод о необходимости учета этих полей при расчетах по гидравлической теории.

Условие $\langle e_x \rangle = 0$ при $x = 1$, которое в случае одномерной теории соответствует режиму максимальной мощности, накладывает ограничения на параметр Q

$$\frac{L^2}{2hu_0 R \epsilon_0} = Q(\xi) \quad (11)$$

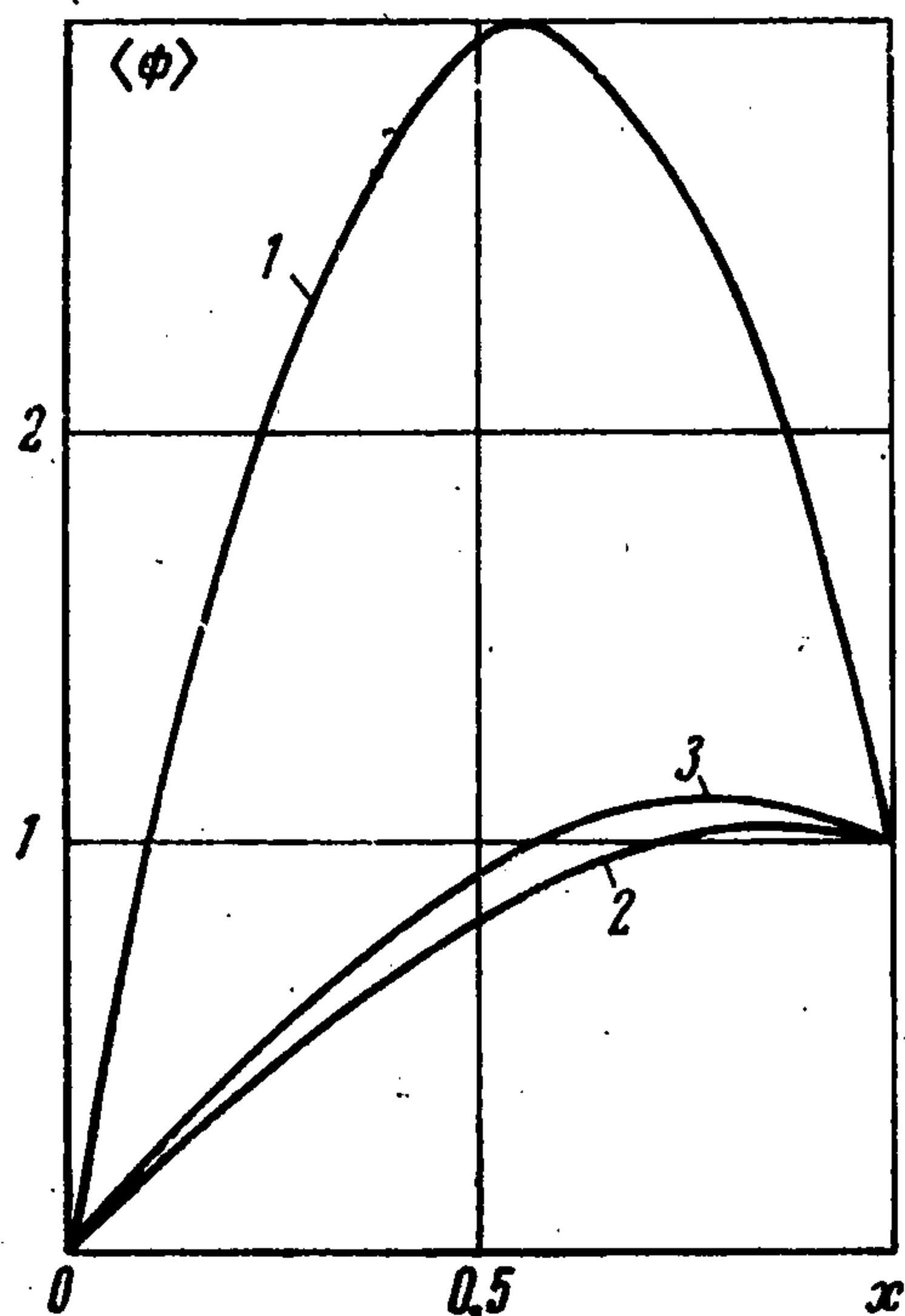
Здесь $Q(\xi)$ — определяется формулой (10), а R — сопротивление внешней цепи на единицу длины канала вдоль оси z_1 . При больших ξ условие (11) переходит в известное [2,3] в одномерной теории условие $Q = 2$.

В том случае, когда условие $\langle e_x \rangle = 0$ при $x = 1$ не выставляется, то для того чтобы при помощи полученного решения можно было рассчитать

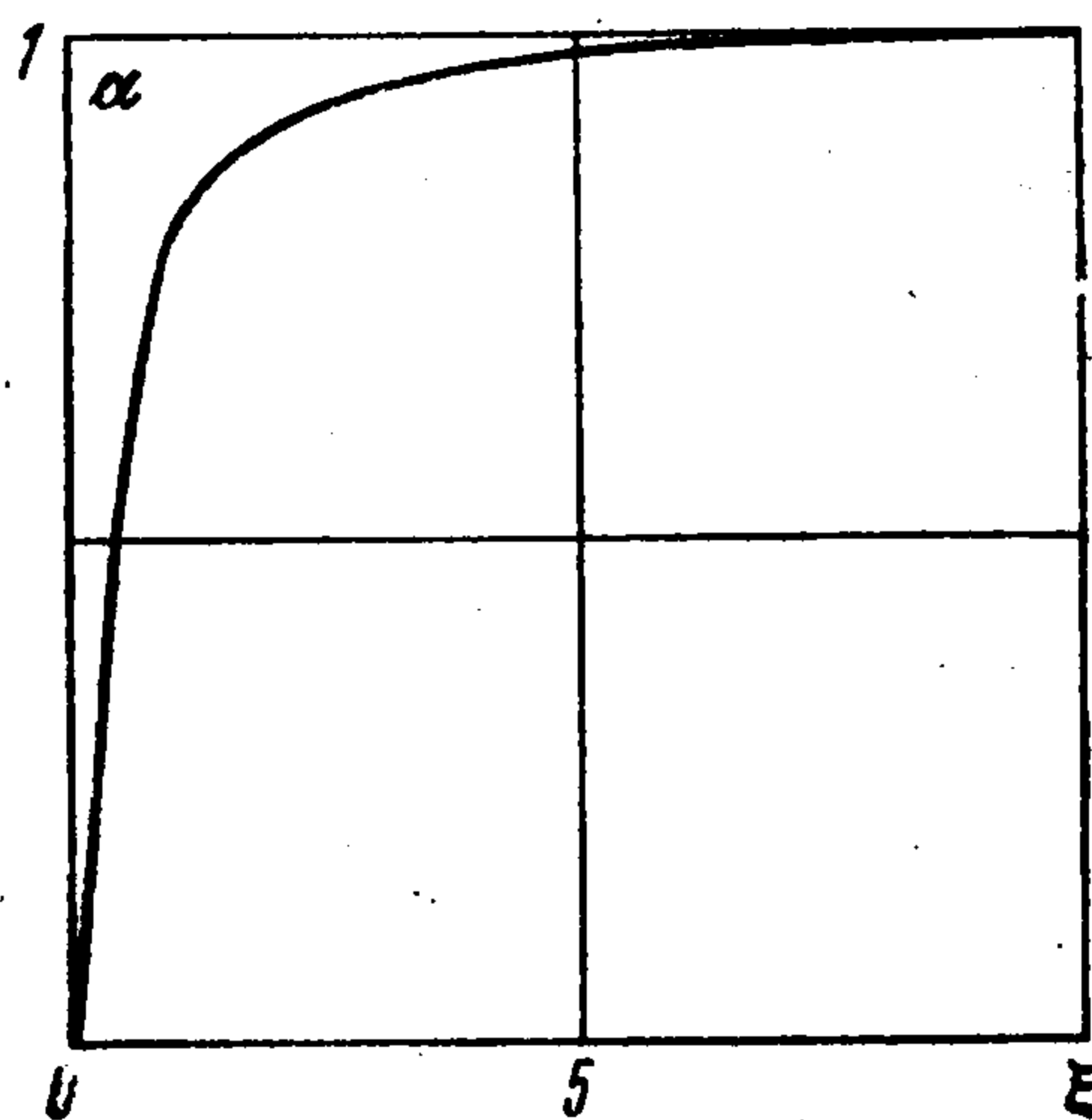
режимы, соответствующие различным режимам в реальных устройствах, необходимо иметь дополнительную зависимость $\varphi_1 = \varphi_1(L)$, которая является вольт-амперной характеристикой устройства. Эта зависимость должна быть установлена либо теоретически с учетом работы коронного разряда, расположенного на входе в канал и являющегося источником

заряженных частиц, либо экспериментально.

Для выяснения влияния двумерных эффектов (влияние параметра ξ) на рас-



Фиг. 5



Фиг. 6

пределение вдоль канала среднего по сечению значения электрического потенциала было рассмотрено решение при $\xi = 0.1$ и $Q = 20$.

На фиг. 5 представлены результаты расчетов по одномерной теории (кривая 1) и решение двумерной задачи (кривая 2), полученные при одних и тех же параметрах Q и ξ . Полученные кривые позволяют сделать вывод о существенной неоднородности течения в канале, в котором отношение ширины к длине $2h/L$ равно 0.2.

Обычно при учете поперечного электрического поля в одномерной теории предполагается, что оно постоянно по длине канала, однако одномерная теория не позволяет определить порядок величины e_{yw} . Полученное двумерное решение позволяет определить порядок величины e_{yw} , которую надо использовать в одномерном приближении для того, чтобы правильно учесть двумерные эффекты.

Осредним по сечению канала уравнения $\text{div } \mathbf{e} = Q$ и $\nabla \Phi = -\mathbf{e}$, получим

$$\frac{d \langle e_x \rangle}{dx} = Q - \frac{e_{yw}(x)}{\xi}, \quad \frac{d \langle \Phi \rangle}{dx} = -\langle e_x \rangle \quad (12)$$

Здесь $e_{yw}(x)$ — истинное значение поперечного поля на стенке канала. Полученные из двумерной теории величины $\langle e_x \rangle$ и e_{yw} тождественно удовлетворяют уравнению (12). Наряду с уравнением (12) рассмотрим уравнение

$$\frac{de_x^*}{dx} = Q - \frac{e_{yw}^*}{\xi} = Q^*, \quad \frac{d\Phi^*}{dx} = -e_x^* \quad (13)$$

В уравнении (13) вместо истинного значения поля $e_{yw}(x)$ входит среднее по длине канала значение поперечного поля на стенке e_{yw}^*

$$e_{yw}^* = \int_0^1 e_{yw}(x) dx = \xi [Q - \langle e_x(1) \rangle + \langle e_x(0) \rangle]$$

Величина Q^* , стоящая в правой части первого уравнения (13), может быть вычислена при помощи решения (9). Имеем

$$Q^* = Q \left[1 - \frac{4}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-2\lambda_n \xi)}{\lambda_n^3} \right] = \alpha(\xi) Q \quad (14)$$

Решение системы (13) с граничными условиями $\Phi^* = 0$ при $x = 0$ и $\Phi^* = 1$ при $x = 1$ имеет вид

$$\Phi^* = x + 0.5Q^*(x - x^2) \quad (15)$$

Это решение совпадает с решением, полученным по одномерной теории, в котором параметр Q заменен на параметр Q^* , определенный формулой (14). Входящая в эту формулу функция $\alpha(\xi)$ учитывает поправку за счет двумерных эффектов. Величина $\alpha(\xi)$ меняется в пределах от нуля (при $\xi \rightarrow 0$) до единицы (при $\xi \rightarrow \infty$). Зависимость $\alpha(\xi)$ приведена на фиг. 6.

Кривая 3 на фиг. 5, соответствующая решению (15), дает лучшее совпадение с точным решением по сравнению с решением, полученным по чисто одномерной теории (кривая 1).

Таким образом, двумерное решение показывает, что в случае нулевой подвижности при расчетах течений в коротких и широких каналах ($\xi > 0.5$) можно использовать чисто одномерное приближение. В случае узких каналов существенны двумерные эффекты. Приведенный выше пример показывает, что в этом случае расчет распределения электрического потенциала по длине канала нужно проводить по одномерной теории с учетом постоянного поперечного поля. Это сводится к замене в одномерном решении Q на $Q^* = \alpha(\xi)Q$. Величина $\alpha(\xi)$, учитывающая отклонение от одномерности, является универсальной для каналов различной длины и ее график представлен на фиг. 6.

Отметим, что полученное решение является точным для случая течения идеальной несжимаемой жидкости. Если движущаяся среда есть идеальный совершенный газ, то это решение можно рассматривать как нулевой член разложения решения в ряд по малому параметру взаимодействия S . Учет следующих членов разложения может быть проведен аналогично тому, как это сделано в работе [8].

Выпишем уравнения электрогидродинамики в случае нулевой подвижности заряженных частиц [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial q u}{\partial x} + \frac{\partial q v}{\partial y} = 0, \quad \operatorname{div} e = Qq, \quad p = \frac{\rho T}{\partial M_0^2} \\ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + S q e_x, \quad \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + S q e_y \quad (16) \\ \rho \left(u \frac{\partial i}{\partial x} + v \frac{\partial i}{\partial y} \right) &= S q (u e_x + v e_y), \quad i = \frac{T}{(\gamma - 1) M_0^2} + \frac{u^2 + v^2}{2} \end{aligned}$$

Здесь

$$u = \frac{u}{u_0}, \quad v = \frac{v}{u_0}, \quad p = \frac{p}{\rho_0 u_0^2}, \quad \rho = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad T = \frac{T}{T_0}, \quad q = \frac{q}{q_0}, \quad e = \frac{EL}{\Phi_1}$$

$$x = \frac{x_1}{L}, \quad y = \frac{y_1}{L}, \quad S = \frac{q_0 \Phi_1}{\rho_0 u_0^2}, \quad Q = \frac{q_0 L^2}{\Phi_1 \epsilon_0}, \quad M_0^2 = \frac{u_0^2}{\partial RT_0} \quad (17)$$

Будем предполагать, что течение происходит в плоском канале, простирающемся от минус до плюс бесконечности. Знаком нуль в соотношениях (17) отмечены значения гидродинамических величин при $x \rightarrow -\infty$. Предположим, что в сечении $x = 0$ в канал поступают заряды с постоянной по сечению плотностью q_0 , которые полностью снимаются на электроде в сечении $x = 1$. Таким образом, в областях $x < 0$ и $x > 1$ электрический заряд отсутствует, и в них справедливы уравнения обычной гидродинамики с $e \equiv 0$.

В случае, когда параметр взаимодействия S мал, решение системы (16) можно искать в виде

$$u = 1 + Su_1, \quad v = Sv_1, \quad p = \frac{1}{\gamma M_0^2} + Sp_1, \quad T = 1 + ST_1$$

$$\rho = 1 + Sp_1, \quad q = 1 + Sq_1, \quad e = e_i + Se_1 \quad (18)$$

В качестве нулевого приближения для гидродинамических величин в (18) принято решение, соответствующее течению в плоском канале с постоянными значениями параметров и постоянной плотностью зарядов в области $0 < x < 1$. Для первого приближения в области $0 < x < 1$ будем иметь

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{T}{(\gamma - 1) M_0^2} + u_1 \right] = e_x, \quad p_1 = \frac{\rho_1 + T_1}{\gamma M_0^2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + e_x, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial y} + e_y \quad (19)$$

Входящий в формулы (18) и (19) вектор электрического поля e_i определяется формулами (6) и (7). Для определения течения в областях $x < 0$ и $x > 1$ справедливы уравнения обычной гидродинамики. Эти уравнения можно получить из уравнений (19), полагая в них $e_i \equiv 0$.

Исключим из уравнений (19) величины p_1 , T_1 , ρ_1 . Будем иметь в области $0 < x < 1$

$$(1 - M_0^2) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = -M_0^2 e_x, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} = \omega_2(y) \quad (20)$$

В областях $x < 0$ и $x > 1$ получим

$$(1 - M_0^2) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} = \begin{cases} \omega_1(y) & \text{при } x < 0 \\ \omega_3(y) & \text{при } x > 1 \end{cases} \quad (21)$$

Здесь ω_1 , ω_2 и ω_3 — произвольные функции y .

Систему уравнений (20), (21) будем решать со следующими граничными условиями:

$$u_1 = v_1 = 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty, \quad v_1 = 0 \text{ при } y = \pm \xi \quad (22)$$

К условиям (22) необходимо еще добавить соотношения на поверхностях $x = 0$ и $x = 1$, на которых могут претерпевать разрыв нормальные производные искомых функций. На этих поверхностях имеем [8]

$$\left\{ \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\} = \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial y} \right\} = \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial y} \right\} = \{e_y\} = 0 \quad (23)$$

Здесь фигурными скобками обозначена разность значений соответствующих величин до и после разрыва.

Используя (19) — (23), получим, что $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ и, кроме того

$$\{v_1\} = \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial x} \right\} = 0 \text{ при } x = 0, x = 1 \quad (24)$$

Таким образом, течение в канале будет потенциальным. Вводя потенциал ψ соотношением $u_1 = \nabla\psi$, получим

$$(1 - M_0^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -M_0^2 e_x \delta, \quad \delta = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ и } x > 1 \end{cases} \quad (25)$$

Граничные условия для системы (25) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 & \text{ при } x \rightarrow -\infty, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \pm \xi \\ \{\psi\} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} = 0 & \text{ при } x = 0 \text{ и } x = 1 \end{aligned} \quad (26)$$

Решение системы уравнений (25) с граничными условиями (26) проводится различно для случаев $M_0 > 1$ и $M_0 < 1$.

При $M_0 > 1$ течение в области $x < 0$ происходит с постоянными параметрами, так что $u_1 = v_1 = 0$. Решение в областях $0 < x < 1$ и $x > 1$ находится последовательно — сначала в области $0 < x < 1$ с граничными условиями

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \pm \xi$$

а затем в области $x > 1$ с граничными условиями

$$\{\psi\} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} = 0 \text{ при } x = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \pm \xi$$

Эти решения можно получить, применяя метод Фурье. Выпишем эти решения для $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{M_0^2}{1 - M_0^2} \left[\Phi_i - \sum_{n=1}^{\infty} v_n \int_0^x \Phi_n(\tau) \sin v_n(x - \tau) d\tau \cos \mu_n y \right] \\ v_1 &= - \frac{M_0^2}{1 - M_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \int_0^x \Phi_n(\tau) \cos v_n(x - \tau) d\tau \sin \mu_n y \end{aligned} \quad (27)$$

$$p_1 = -(u_1 + \Phi_i), \quad T_1 = (\gamma - 1) M_0^2 p_1, \quad \mu_n = n\pi/\xi, \quad v_n = \mu_n / \sqrt{M_0^2 - 1}$$

Для $x > 1$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{M_0^2}{1 - M_0^2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} v_n \int_0^1 \Phi_n(\tau) \sin v_n(x - \tau) d\tau \cos \mu_n y \right] \\ v_1 &= - \frac{M_0^2}{1 - M_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \int_0^1 \Phi_n(\tau) \cos v_n(x - \tau) d\tau \sin \mu_n y \end{aligned} \quad (28)$$

$$p_1 = -(1 + u_1), \quad T_1 = (\gamma - 1) M_0^2 p_1$$

Здесь $\Phi_n(x)$ — коэффициенты разложения функции $\Phi_i(x, y)$ в ряд Фурье по $\cos \mu_n y$ на отрезке $-\xi < y < \xi$

$$\Phi_0 = \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} \Phi_i dy = \langle \Phi_i \rangle, \quad \Phi_n(x) = \frac{2}{\xi} \int_0^{\xi} \Phi_i \cos \mu_n y dy, \quad n = 1, 2, \dots$$

При $M_0 < 1$ решение задачи необходимо искать одновременно во всех трех областях, используя граничные условия (26). Применяя снова метод Фурье, получим

для $x < 0$ (29)

$$u_1 = -\frac{M_0^2}{1-M_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \int_0^1 \Phi_n(\tau) \exp[-v_n(\tau-x)] d\tau \cos \mu_n y$$

$$v_1 = \frac{M_0^2}{1-M_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \int_0^1 \Phi_n(\tau) \exp[-v_n(\tau-x)] d\tau \sin \mu_n y$$

$$p_1 = -u_1, \quad T_1 = (\gamma-1) M_0^2 p_1 \quad [(v_n = \mu_n / \sqrt{1-M_0^2})]$$

для $0 < x < 1$ (30)

$$u_1 = \frac{M_0^2}{1-M_0^2} \left\{ \Phi_i - \sum_{n=1}^{\infty} v_n \left[a_n(x) + \int_0^x \Phi_n(\tau) \operatorname{sh} v_n(x-\tau) d\tau \right] \cos \mu_n y \right\}$$

$$v_1 = \frac{M_0^2}{1-M_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left[a_n(x) + \int_0^x \Phi_n(\tau) \operatorname{ch} v_n(x-\tau) d\tau \right] \sin \mu_n y$$

$$p_1 = -(u_1 + \Phi_i), \quad T_1 = (\gamma-1) M_0^2, \quad a_n(x) = \int_0^1 \Phi_n(\tau) \exp[v_n(x-\tau)] d\tau$$

для $x > 1$ (31)

$$u_1 = \frac{M_0^2}{1-M_0^2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} v_n b_n(x) \cos \mu_n y \right], \quad v_1 = -\frac{M_0^2}{1-M_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n b_n(x) \sin \mu_n y$$

$$p_1 = -(1 + u_1), \quad T_1 = (\gamma-1) M_0^2 p_1, \quad b_n(x) = \int_0^1 \Phi_n(\tau) \exp[-v_n(x-\tau)] d\tau$$

Для определения q_1 и e_1 имеем систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} (q_1 + u_1) + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad \operatorname{div} e_1 = Q q_1 \quad (32)$$

Используя граничные условия $q_1 = 0$ при $x = 0$, получим в области $0 < x < 1$

$$q_1 = -M_0^2 [\Phi_i + u_1(x, y) - u_1(0, y)] \quad (33)$$

Входящие в (32) и (33) функции u_1 и v_1 определяются формулами (27) и (30) для случаев $M_0 > 1$ и $M_0 < 1$ соответственно. Вектор электрического поля e_1 может быть найден при помощи второго уравнения (32), в котором величина q_1 задается формулой (33).

Исследуем решения (27) — (31). В случае $M_0 > 1$ формула (28) показывает, что возмущения из области, занятой зарядами $0 < x < 1$, распространяются с незатухающей амплитудой только вниз по потоку. В случае $M_0 < 1$ при $x \rightarrow \infty$ гидродинамические величины выходят на постоянные значения. При $x \rightarrow \infty$ получим

$$u_1 = \frac{M_0^2}{1-M_0^2}, \quad p_1 = \frac{1}{M_0^2-1}, \quad T_1 = \frac{(\gamma-1) M_0^2}{M_0^2-1}$$

При этом изменение полной энтальпии Δi по всей длине канала равно S , как в случае $M_0 < 1$, так и в случае $M_0 > 1$.

Используем решения (27) — (31) для нахождения средних по сечению гидродинамических величин. Для $x < 0$ имеем $\langle u_1 \rangle = \langle p_1 \rangle = \langle T_1 \rangle = 0$. Для $0 < x < 1$ получим

$$\langle u_1 \rangle = \frac{M_0^2}{1 - M_0^2} \langle \Phi_i \rangle, \quad \langle p_1 \rangle = - \frac{\langle \Phi_i \rangle}{1 - M_0^2}, \quad T_1 = - \frac{(\gamma - 1) M_0^2 \langle \Phi_i \rangle}{1 - M_0^2} \quad (34)$$

И, наконец, для $x > 1$

$$\langle u_1 \rangle_i = \frac{M_0^2}{1 - M_0^2}, \quad \langle p_1 \rangle = - \frac{1}{1 - M_0^2}, \quad \langle T_1 \rangle = - \frac{[(\gamma - 1) M_0^2]}{1 - M_0^2} \quad (35)$$

Входящая в формулу (34) функция $\langle \Phi_i \rangle$ определяется при помощи формулы (9). График этой функции для различных значений ξ изображен на фиг. 2. Следуя изложенной выше приближенной теории учета двумерных эффектов в гидравлическом приближении, функцию $\langle \Phi_i \rangle$ можно заменить функцией Φ^* , определенной формулой (15), имеющей простой аналитический вид.

В заключение авторы благодарят Г. А. Любимова за обсуждение данной работы.

Поступила 15 VII 1970

Институт Механики МГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле. Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 2.
2. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Исследование электрогидродинамических течений при больших электрических числах Рейнольдса. ПМТФ, 1969, № 1.
3. Marks A., Vargeto E., Chu C. K. Charged aerosol Energy converter. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 1.
4. Семенова И. П. Исследование влияния поперечного электрического поля на одномерное электрогидродинамическое течение. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
5. Grandmaier H. E. Radial space charge fields in electrofluid dynamic generators. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 5.
6. Grandmaier H. E. Electrofluid-dynamic generator performance limits. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 6.
7. Kahn B. X., Gourdine M. C. Electrogasdynamic power generation. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 8.
8. Ватажин А. Б. О деформации профиля скорости при электрогидродинамическом течении в плоском канале. Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 5.